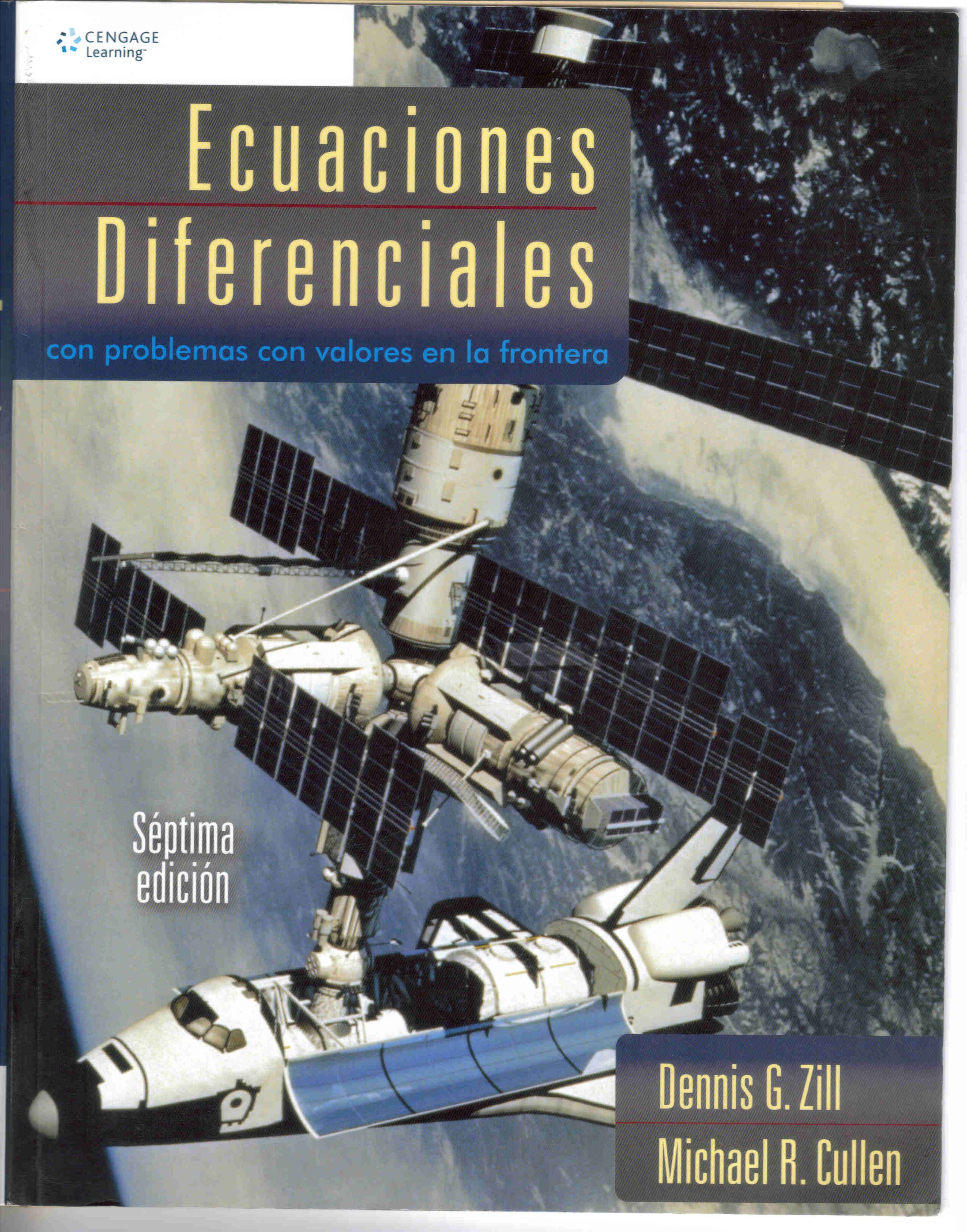

CENGAGE Learning
Ecuaciones Diferenciales
con problemas con valores en la frontera
Séptima edición
Dennis G. Zill
Michael R. Cullen

SÉPTIMA EDICIÓN

ECUACIONES DIFERENCIALES

con problemas con valores en la frontera

DENNIS G. ZILL

Loyola Marymount University

MICHAEL R. CULLEN

Late of Loyola Marymount University

TRADUCCIÓN

Dra. Ana Elizabeth García Hernández

Universidad La Salle Morelia

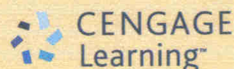
REVISIÓN TÉCNICA

Dr. Ernesto Filio López

Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería

y Tecnologías Avanzadas

Instituto Politécnico Nacional



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE Learning™

Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera
Séptima edición
Dennis G. Zill y Michael R. Cullen

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Javier Arellano Gutiérrez

Director general México y Centroamérica:
Pedro Turbay Garrido

Director editorial Latinoamérica:
José Tomás Pérez Bonilla

Director de producción:
Raúl D. Zendejas Espejel

Cordinadora editorial:
María Rosas López

Editor:
Sergio R. Cervantes González

Editora de producción:
Abril Vega Orozco

Ilustrador:
Jade Myers, Matrix

Diseño de portada:
Grupo Insigne OTA, S.A de C.V.

Imagen de portada:
Photos.com

Composición tipográfica:
EDITEC S.A. de C.V.


JUN

Editorial Progreso, S. A. de C. V.
Naranjo No. 248, Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc
C. P. 06400, México, D. F.

2009


Traducido del libro *Differential Equations with Boundary-Value Problems,* Seventh Edition.
Zill, Dennis G. and Michael R. Cullen
Publicado en inglés por Brooks & Cole /Cengage Learning ©2009
ISBN-13: 978-0-495-10836-8
ISBN-10: 0-495-10836-7

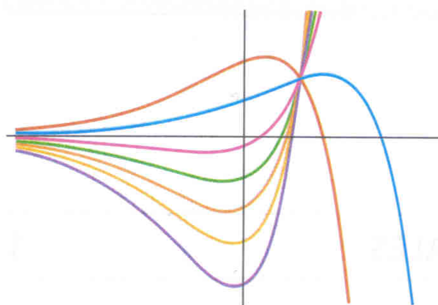
Datos para catalogación bibliográfica:
Zill, Dennis G. y Michael R. Cullen
Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera
Séptima edición
ISBN-13: 978-970-830-038-4
ISBN-10: 970-830-038-1

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

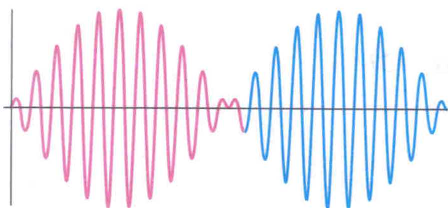
Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 12 11 10 09

CONTENIDO

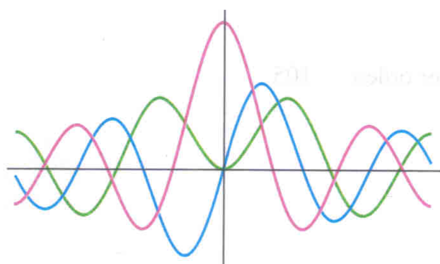
4 ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR 117



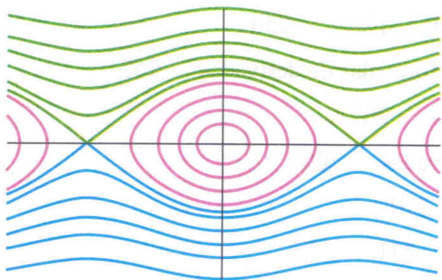
5 MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR 181



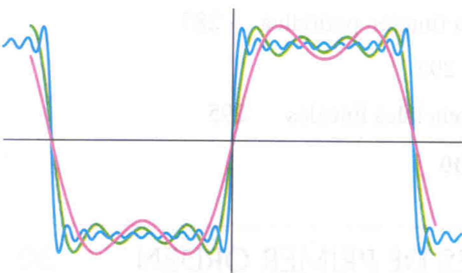
6 SOLUCIONES EN SERIES DE ECUACIONES LINEALES 219



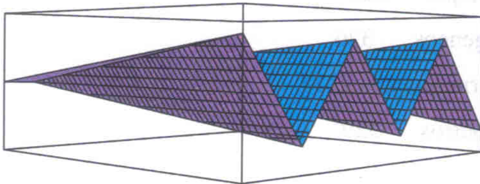
10 SISTEMAS AUTÓNOMOS PLANOS 363



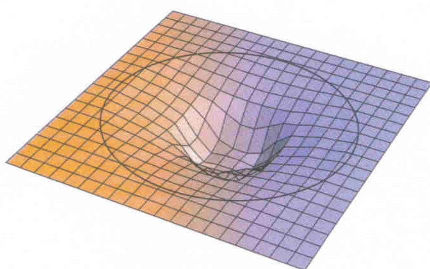
11 FUNCIONES ORTOGONALES Y SERIES DE FOURIER 397



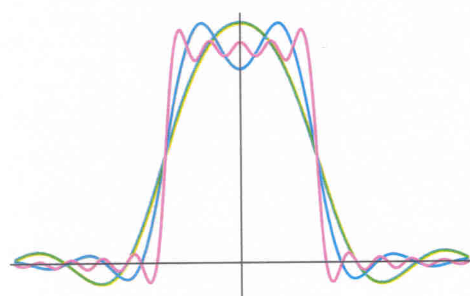
12 PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA EN COORDENADAS RECTANGULARES 432



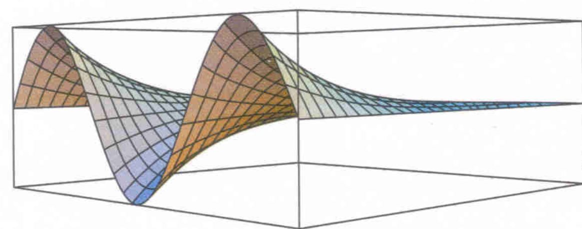
13 PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA EN OTROS SISTEMAS COORDENADOS 471



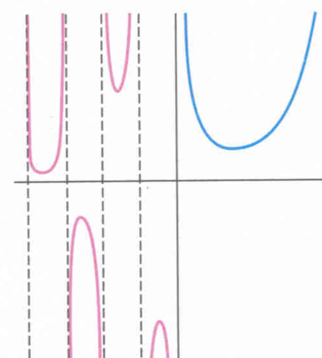
14 TRANSFORMADA INTEGRAL 488



15 SOLUCIONES NUMÉRICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES 511



APÉNDICES



PREFACIO

AL ESTUDIANTE

Los autores de los libros viven con la esperanza de que alguien en *realidad* los lea. Contrariamente a lo que usted podría creer, casi todo texto de matemáticas de nivel universitario está escrito para usted y no para el profesor. Cierto es que los temas cubiertos en el texto se escogieron consultando a los profesores, ya que ellos toman la decisión acerca de si hay que usarlos en sus clases; pero todo lo escrito en él está dirigido directamente al estudiante. Entonces quiero invitarle, no, en realidad quiero decirle que ¡lea este libro de texto! Pero no lo haga como leería una novela; no debe leerlo rápido y no debe saltarse nada. Piense en este como un *cuaderno de ejercicios*. Por eso pienso que las matemáticas siempre deberían ser leídas con lápiz y papel a la mano porque muy probablemente, tendrá que trabajar a su manera los ejemplos y hacer el análisis. Lea —más bien, trabaje— todos los ejemplos de una sección antes de intentar cualquiera de los ejercicios; los ejemplos se han construido para mostrar lo que considero son los aspectos más importantes de la sección y por tanto, muestran los procedimientos necesarios para trabajar la mayoría de los problemas de los conjuntos de ejercicios. Yo les digo a mis estudiantes que cuando lean un ejemplo, cubran su solución y que intenten trabajar primero en ella, comparar su respuesta con la solución dada y luego resolver cualquier diferencia. He tratado de incluir lo más importante de cada ejemplo, pero si algo no es claro usted podría siempre intentarlo —y aquí es donde el papel y el lápiz entran otra vez— complete los detalles o pasos que faltan. Puede no ser fácil, pero es parte del proceso de aprendizaje. La acumulación de hechos seguidos por la lenta asimilación del entendimiento simplemente no se puede alcanzar sin luchar.

En conclusión, le deseo buena suerte y éxito. Espero disfrute el libro y el curso que está por iniciar. Cuando era estudiante de la licenciatura en matemáticas, este curso fue uno de mis favoritos porque me gustan las matemáticas que están conectadas con el mundo físico. Si tiene algún comentario o si encuentra algún error cuando lo lea o trabaje con él o si me quiere hacer llegar una buena idea para mejorar el libro, por favor póngase en contacto conmigo o con mi editor en la Compañía editorial Brooks/Cole: charlie.vanwagner@cengage.com

AL PROFESOR

¿QUÉ ES LO NUEVO EN ESTA EDICIÓN?

Primero, déjeme decirle que *no* ha cambiado. El orden del capítulo por temas, el número y el orden de las secciones dentro de un capítulo, se conservan igual que en las ediciones anteriores.

En caso de que examine este texto por primera vez, *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera,* 7a. edición, se puede utilizar ya sea para un curso de un semestre de ecuaciones diferenciales ordinarias o para cubrir un curso de dos semestres de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. La versión corta del libro, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado,* 9a. edición, termina en el capítulo 9. Para un curso de un semestre, supongo que los estudiantes han concluido con éxito al menos un curso de dos semestres de cálculo. Puesto que está leyendo esto, sin duda ya ha examinado la tabla de contenidos para los temas que cubrirá. En este prefacio no encontrará "un programa sugerido". No pretenderé ser tan sabio como para decir lo que otros profesores enseñen en sus clases. Siento que hay mucho material aquí para escoger y formar un curso a su gusto. El texto tiene un equilibrio razonable entre los métodos analíticos, cualitativos y cuantitativos en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Por lo que mi "filosofía subyacente" es "Un libro para estudiantes de licenciatura debería estar escrito considerando siempre el entendimiento del estudiante, lo que significa que el material debería estar presentado en una forma directa, legible y útil, considerando el nivel teórico compatible con la idea 'de un primer curso' ".

A las personas familiarizadas con las ediciones anteriores me gustaría mencionarles algunas de las mejoras hechas en esta edición.

- ***Problemas aportados*** Los conjuntos de ejercicios seleccionados concluyen con uno o dos problemas aportados. Estos problemas se han probado en clase y los han enviado profesores de cursos de ecuaciones diferenciales y muestran cómo los profesores han complementado sus presentaciones de clase con proyectos adicionales.
- ***Ejercicios*** Un gran número de ejercicios se ha actualizado agregando nuevos problemas para evaluar mejor y presentarles retos a los estudiantes. De igual forma, se han mejorado algunos conjuntos de ejercicios quitando algunos problemas.
- ***Diseño*** Esta edición se ha mejorado con un diseño a cuatro colores, lo que le da profundidad de significado a todas las gráficas y énfasis a frases importantes, supervisé la creación de cada parte de arte para asegurarme de que esté matemáticamente correcta conforme al texto.
- ***Nueva numeración de figuras*** Me tomó muchas ediciones hacer esto, pero finalmente me convencí de que la vieja numeración de figuras, teoremas y definiciones tenía que cambiarse. En esta revisión he utilizado un sistema de numeración de doble-decimal. Por ejemplo, en la última edición la figura 7.52 sólo indica que es la 52a. del capítulo 7. En esta edición, la misma figura se numeró como la figura 7.6.5 donde

  Capítulo Sección

  7.6.5← Quinta figura en la sección

  Siento que este sistema proporciona una indicación clara de dónde están las cosas, sin necesidad de agregar el molesto número de página.
- ***Proyectos de ediciones anteriores*** Problemas y ensayos seleccionados de ediciones pasadas del libro se pueden encontrar en el sitio web de la compañía en academic.cengage.com/math/zill

RECURSOS PARA LOS ESTUDIANTES

- *Student Resource and Solutions Manual*, de Warren S. Wright, Dennis G. Zill, y Carol D. Wright (ISBN 0495385662) que acompaña a Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la Frontera 7a. edición, presenta repasos del material más importante de Álgebra y Cálculo, las soluciones de cada tercer problema de cada conjunto de ejercicios excepto la dis-

cusión de problemas y laboratorio de conjuntación) los comandos y su sintaxis más importantes de Mathematica y Maple, listas de conceptos importantes, así como útiles sugerencias de cómo empezar ciertos problemas.

- Las herramientas de ED (DE tools) son conjuntos de simulaciones que aportan una exploración visual interactiva de los conceptos presentados en este texto. Visite academic.cengage.com/math/zill para encontrar más recursos, o contacte a los representantes de ventas de su localidad y pregunte acerca de más opciones disponibles para el aprovechamiento DE tools con este libro.

MATERIAL DE APOYO PARA EL PROFESOR

Este libro cuenta con una serie de recursos para el profesor, los cuales están disponibles en inglés, y sólo se proporciona a los docentes que lo adopten como texto en sus cursos.

Para direcciones de correo electrónico:

Cengage Learning México y Centroamérica	clientes.mexicoca@cengage.com
Cengage Learning Caribe	clientes.caribe@cengage.com
Cengage Learning Cono Sur	clientes.conosur@cengage.com
Colombia	clientes.pactoandino@cengage.com

- El Text Bank, de Gilbert Lewis (ISBN0495386065) contiene múltiples opciones y respuestas cortas a las cuestiones de las pruebas que se plantean en el texto.

RECONOCIMIENTOS

Compilar un libro de texto de matemáticas como éste y asegurarse de que sus miles de símbolos y cientos de ecuaciones estén (en su mayoría) correctos es una enorme tarea, pero puesto que yo me llamo "el autor" este es mi trabajo y responsabilidad. Pero muchas personas además de mí, invirtieron enormes cantidades de tiempo y energía para lograr por fin su publicación. Entonces me gustaría aprovechar esta oportunidad para expresar mi más sincero aprecio a cada uno —la mayoría de ellos no me conoce— en la Compañía Editorial Brooks/Cole, en Cengage Learning y en Hearthside Publication Services, quienes estuvieron implicados en la publicación de esta nueva edición. Sin embargo, me gustaría seleccionar a unas personas para un reconocimiento especial: En Brooks/Cole/Cengage, a Cheryll Linthicum, jefa del proyecto de producción, por su buena voluntad para escuchar las ideas de autores y contestar pacientemente las muchas preguntas de los mismos; a Larry Didona por sus excelentes diseños de los forros; a Diane Beasley por el diseño interior; a Vernon Boes por su supervisión de todo el arte y el diseño; a Charlie van Wagner, editor anfitrión; a Stacy Green por la coordinación de todos los suplementos; a Leslie Lahr, editora de desarrollo, por sus sugerencias, apoyo y por conseguir y organizar los problemas aportados; y en Hearthside Publication Services, a Anne Seitz, editora de producción, quien puso de nuevo todas las piezas del rompecabezas juntas. Mi más especial agradecimiento va para John Samons por el trabajo excepcional que hizo al revisar el texto y conseguir el manuscrito correcto.

También extiendo mi más sincero aprecio a aquellas personas que invirtieron su tiempo a pesar sus ocupados horarios académicos para enviar un problema aportado.

Ben Fitzpatrick, *Loyola Marymount University*
Layachi Hadji, *University of Alabama*
Michael Prophet, *University of Northern Iowa*
Doug Shaw, *University of Northern Iowa*

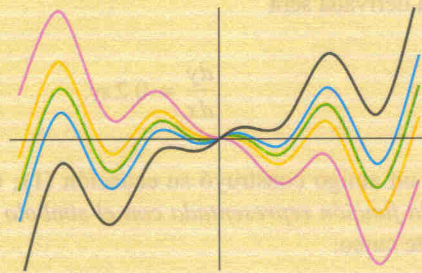
Warren S. Wright, *Loyola Marymount University*
David Zeigler, *California State University—Sacramento*

Finalmente, conforme han pasado los años, estos libros de texto se han mejorado por un número incontable de caminos por las sugerencias y las críticas de los revisores. Así que es justo concluir con un reconocimiento de mi deuda con las siguientes personas por compartir su maestría y experiencia.

REVISORES DE EDICIONES PASADAS

William Atherton, *Cleveland State University*
Philip Bacon, *University of Florida*
Bruce Bayly, *University of Arizona*
R. G. Bradshaw, *Clarkson College*
Decano R. Brown, *Youngstown State University*
David Buchthal, *University of Akron*
Nguyen P. Cac, *University of Iowa*
T. Chow, *California State University-Sacramento*
Dominic P. Clemence, *North Carolina Agricultural and Technical State University*
Pasquale Condo, *University of Massachusetts-Lowell*
Vincent Connolly, *Worcester Polytechnic Institute*
Philip S. Crooke, *Vanderbilt University*
Bruce E. Davis, *St. Louis Community College at Florissant Valley*
Paul W. Davis, *Worcester Polytechnic Institute*
Richard A. DiDio, *La Salle University*
James Draper, *University of Florida*
James M. Edmondson, *Santa Barbara City College*
John H. Ellison, *Grove City College*
Raymond Fabec, *Louisiana State University*
Donna Farrior, *University of Tulsa*
Robert E. Fennell, *Clemson University*
W.E. Fitzgibbon, *University of Houston*
Harvey J. Fletcher, *Brigham Young University*
Paul J. Gormley, *Villanova*
Terry Herdman, *Virginia Polytechnic Institute and State University*
Zdzislaw Jackiewicz, *Arizona State University*
S.K. Jain, *Ohio University*
Anthony J. John, *Southeastern Massachusetts University*
David C. Johnson, *University of Kentucky-Lexington*
Harry L. Johnson, *V.P.I & S.U.*
Kenneth R. Johnson, *North Dakota State University*
Joseph Kazimir, *East Los Angeles College*
J. Keener, *University of Arizona*
Steve B. Khlief, *Tennessee Technological University (retired)*
C.J. Knickerbocker, *St. Lawrence University*
Carlon A. Krantz, *Kean College of New Jersey*
Thomas G. Kudzma, *University of Lowell*
G.E. Latta, *University of Virginia*
Cecelia Laurie, *University of Alabama*
James R. McKinney, *California Polytechnic State University*
James L. Meek, *University of Arkansas*
Gary H. Meisters, *University of Nebraska-Lincoln*
Stephen J. Merrill, *Marquette University*
Vivien Miller, *Mississippi State University*
Gerald Mueller, *Columbus State Community College*

1 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES



Las palabras *ecuaciones* y *diferenciales* ciertamente sugieren alguna clase de ecuación que contiene derivadas $y', y'', \ldots$ Al igual que en un curso de álgebra y trigonometría, en los que se invierte bastante tiempo en la solución de ecuaciones tales como $x^2 + 5x + 4 = 0$ para la incógnita x, en este curso *una* de las tareas será resolver ecuaciones diferenciales del tipo $y'' + 2y' + y = 0$ para la función incógnita $y = \phi(x)$.

Nos dice algo el párrafo anterior, pero no la historia completa acerca del curso que está por iniciar. Conforme el curso se desarrolle verá que hay más en el estudio de las ecuaciones diferenciales, que solamente dominar los métodos que alguien ha inventado para resolverlas.

Pero las cosas en orden. Para leer, estudiar y platicar de un tema especializado, tiene que aprender la terminología de esta disciplina. Esa es la idea de las dos primeras secciones de este capítulo. En la última sección examinaremos brevemente el vínculo entre las ecuaciones diferenciales y el mundo real. Las preguntas prácticas como *¿qué tan rápido se propaga una enfermedad? ¿Qué tan rápido cambia una población*? implican razones de cambio o derivadas. Así, la descripción matemática —o modelo matemático— de experimentos, observaciones o teorías puede ser una ecuación diferencial.

1.1 DEFINICIONES Y TERMINOLOGÍA

REPASO DE MATERIAL

- Definición de derivada
- Reglas de derivación
- Derivada como una razón de cambio
- Primera derivada y crecimiento/decrecimiento
- Segunda derivada y concavidad

INTRODUCCIÓN La derivada dy/dx de una función $y = \phi(x)$ es otra función $\phi'(x)$ que se encuentra con una regla apropiada. La función $y = e^{0.1x^2}$ es derivable en el intervalo $(-\infty, \infty)$, y usando la regla de la cadena, su derivada es $dy/dx = 0.2xe^{0.1x^2}$. Si sustituimos $e^{0.1x^2}$ en el lado derecho de la ultima ecuación por y, la derivada será

$$\frac{dy}{dx} = 0.2xy. \tag{1}$$

Ahora imaginemos que un amigo construyó su ecuación (1); usted no tiene idea de cómo la hizo y se pregunta *¿cuál es la función representada con el símbolo y?* Se está enfrentando a uno de los problemas básicos de este curso:

¿Cómo resolver una ecuación para la función desconocida $y = \phi(x)$?

UNA DEFINICIÓN La ecuación (1) es llamada **ecuación diferencial**. Antes de proseguir, consideremos una definición más exacta de este concepto.

DEFINICIÓN 1.1.1 Ecuación diferencial

Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial (ED)**.

Para hablar acerca de ellas clasificaremos a las ecuaciones diferenciales por **tipo, orden** y **linealidad**.

CLASIFICACIÓN POR TIPO Si una ecuación contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**. Por ejemplo,

Una ED puede contener más de una variable dependiente,
↓ ↓

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0, \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y \tag{2}$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias. Una ecuación que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial (EDP).** Por ejemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3}$$

son ecuaciones diferenciales parciales.*

En todo el libro las derivadas ordinarias se escribirán usando la **notación de Leibniz** $dy/dx, d^2y/dx^2, d^3y/dx^3, \ldots$ o la **notación prima** $y', y'', y''', \ldots$. Usando esta última notación, las primeras dos ecuaciones diferenciales en (2) se pueden escribir en una forma un poco más compacta como $y' + 5y = e^x$ y $y'' - y' + 6y = 0$. Realmente, la notación prima se usa para denotar sólo las primeras tres derivadas: la cuarta derivada se denota $y^{(4)}$ en lugar de y''''. En general, la n-ésima derivada de y se escribe como d^ny/dx^n o $y^{(n)}$. Aunque es menos conveniente para escribir o componer tipográficamente, la notación de Leibniz tiene una ventaja sobre la notación prima en que muestra claramente ambas variables, las dependientes y las independientes. Por ejemplo, en la ecuación

función incógnita
o variable dependiente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$$

variable independiente

se ve inmediatamente que ahora el símbolo x representa una variable dependiente, mientras que la variable independiente es t. También se debe considerar que en ingeniería y en ciencias físicas, la **notación de punto** de Newton (nombrada despectivamente notación de "puntito") algunas veces se usa para denotar derivadas respecto al tiempo t. Así la ecuación diferencial $d^2s/dt^2 = -32$ será $\ddot{s} = -32$. Con frecuencia las derivadas parciales se denotan mediante una **notación de subíndice** que indica las variables independientes. Por ejemplo, con la notación de subíndices la segunda ecuación en (3) será $u_{xx} = u_{tt} - 2u_t$.

CLASIFICACIÓN POR ORDEN El **orden de una ecuación diferencial** (ya sea EDO o EDP) es el orden de la mayor derivada en la ecuación. Por ejemplo,

segundo orden — primer orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden algunas veces son escritas en la forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)\,dy = 0$. Por ejemplo, si suponemos que y denota la variable dependiente en $(y - x)\,dx + 4xdy = 0$, entonces $y' = dy/dx$, por lo que al dividir entre la diferencial dx, obtenemos la forma alterna $4xy' + y = x$. Véanse los *Comentarios* al final de esta sección.

Simbólicamente podemos expresar una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden con una variable dependiente por la forma general

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{4}$$

donde F es una función con valores reales de $n + 2$ variables: $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$. Por razones tanto prácticas como teóricas, de ahora en adelante supondremos que es posible resolver una ecuación diferencial ordinaria en la forma de la ecuación (4) únicamente para la mayor derivada $y^{(n)}$ en términos de las $n + 1$ variables restantes.

---

*Excepto esta sección de introducción, en *Un primer curso de ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, novena edición, sólo se consideran ecuaciones diferenciales ordinarias. En ese libro la palabra *ecuación* y la abreviatura ED se refiere sólo a las EDO. Las ecuaciones diferenciales parciales o EDP se consideran en el volumen ampliado *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera*. séptima edición.

La ecuación diferencial

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{5}$$

donde f es una función continua con valores reales, se conoce como la **forma normal** de la ecuación (4). Así que cuando sea adecuado para nuestros propósitos, usaremos las formas normales

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

para representar en general las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden. Por ejemplo, la forma normal de la ecuación de primer orden $4xy' + y = x$ es $y' = (x - y)/4x$; la forma normal de la ecuación de segundo orden $y'' - y' + 6y = 0$ es $y'' = y' - 6y$. Véanse los *Comentarios*.

CLASIFICACIÓN POR LINEALIDAD Una ecuación diferencial de n-ésimo orden (4) se dice que es **lineal** si F es lineal en $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Esto significa que una EDO de n-ésimo orden es lineal cuando la ecuación (4) es $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$ o

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{6}$$

Dos casos especiales importantes de la ecuación (6) son las ED lineales de primer orden ($n = 1$) y de segundo orden ($n = 2$):

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad \text{y} \quad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{7}$$

En la combinación de la suma del lado izquierdo de la ecuación (6) vemos que las dos propiedades características de una EDO son las siguientes:

- La variable dependiente y y todas sus derivadas $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ son de primer grado, es decir, la potencia de cada término que contiene y es igual a 1.
- Los coeficientes de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de $y, y', \ldots, y^{(n)}$ dependen a lo más de la variable independiente x.

Las ecuaciones

$$(y - x)dx + 4x\,dy = 0, \quad y'' - 2y' + y = 0, \quad \text{y} \quad \frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$$

son, respectivamente, ecuaciones diferenciales de primer, segundo y tercer orden. Acabamos sólo de mostrar que la primera ecuación es lineal en la variable y cuando se escribe en la forma alternativa $4xy' + y = x$. Una ecuación diferencial ordinaria **no lineal** es simplemente no lineal. Funciones no lineales de la variable dependiente o de sus derivadas, tales como sen y o $e^{y'}$, no se pueden presentar en una ecuación lineal. Por tanto

término no lineal: coeficiente depende de y ↓ — término no lineal: función no lineal de y ↓ — término no lineal: el exponente es diferente de 1 ↓

$$(1 - y)y' + 2y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} y = 0, \quad \text{y} \quad \frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$$

son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer, segundo y cuarto orden respectivamente.

SOLUCIONES Como ya se ha establecido, uno de los objetivos de este curso es resolver o encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales. En la siguiente definición consideramos el concepto de solución de una ecuación diferencial ordinaria.

DEFINICIÓN 1.1.2 Solución de una EDO

Cualquier función ϕ, definida en un intervalo I y que tiene al menos n derivadas continuas en I, las cuales cuando se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden reducen la ecuación a una identidad, se dice que es una **solución** de la ecuación en el intervalo.

En otras palabras, una solución de una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden (4) es una función ϕ que posee al menos n derivadas para las que

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{para toda } x \text{ en } I.$$

Decimos que ϕ *satisface* la ecuación diferencial en I. Para nuestros propósitos supondremos que una solución ϕ es una función con valores reales. En nuestro análisis de introducción vimos que $y = e^{0.1x^2}$ es una solución de $dy/dx = 0.2xy$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Ocasionalmente será conveniente denotar una solución con el símbolo alternativo $y(x)$.

INTERVALO DE DEFINICIÓN No podemos pensar en la *solución* de una ecuación diferencial ordinaria sin simultáneamente pensar en un *intervalo*. El intervalo I en la definición 1.1.2 también se conoce con otros nombres como son **intervalo de definición, intervalo de existencia, intervalo de validez**, o **dominio de la solución** y puede ser un intervalo abierto (a, b), un intervalo cerrado $[a, b]$, un intervalo infinito (a, ∞), etcétera.

EJEMPLO 1 Verificación de una solución

Verifique que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

a) $\dfrac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}; \quad y = \frac{1}{16}x^4$ **b)** $y'' - 2y' + y = 0; \quad y = xe^x$

SOLUCIÓN Una forma de verificar que la función dada es una solución, es ver, una vez que se ha sustituido, si cada lado de la ecuación es el mismo para toda x en el intervalo.

a) De

$$\textit{lado izquierdo:} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{16}(4 \cdot x^3) = \frac{1}{4}x^3,$$

$$\textit{lado derecho:} \quad xy^{1/2} = x \cdot \left(\frac{1}{16}x^4\right)^{1/2} = x \cdot \left(\frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{4}x^3,$$

vemos que cada lado de la ecuación es el mismo para todo número real x. Observe que $y^{1/2} = \frac{1}{4}x^2$ es, por definición, la raíz cuadrada no negativa de $\frac{1}{16}x^4$.

b) De las derivadas $y' = xe^x + e^x$ y $y'' = xe^x + 2e^x$ tenemos que para todo número real x,

$$\textit{lado izquierdo:} \quad y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0,$$

$$\textit{lado derecho:} \quad 0.$$

■

En el ejemplo 1, observe también, que cada ecuación diferencial tiene la solución constante $y = 0$, $-\infty < x < \infty$. Una solución de una ecuación diferencial que es igual a cero en un intervalo I se dice que es la **solución trivial.**

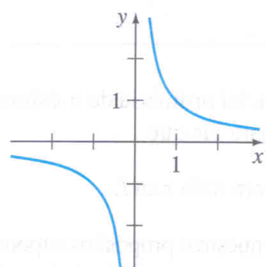
CURVA SOLUCIÓN La gráfica de una solución ϕ de una EDO se llama **curva solución.** Puesto que ϕ es una función derivable, es continua en su intervalo de de-

finición *I*. Puede haber diferencia entre la gráfica de la *función* ϕ y la gráfica de la *solución* ϕ. Es decir, el dominio de la función ϕ no necesita ser igual al intervalo de definición *I* (o dominio) de la solución ϕ. El ejemplo 2 muestra la diferencia.

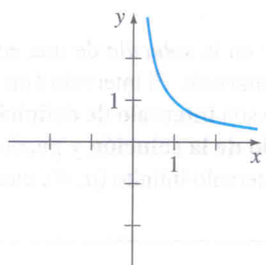
EJEMPLO 2 Función contra solución

El dominio de $y = 1/x$, considerado simplemente como una *función*, es el conjunto de todos los números reales *x* excepto el 0. Cuando trazamos la gráfica de $y = 1/x$, dibujamos los puntos en el plano *xy* correspondientes a un juicioso muestreo de números tomados del dominio. La función racional $y = 1/x$ es discontinua en $x = 0$, en la figura 1.1.1a se muestra su gráfica, en una vecindad del origen. La función $y = 1/x$ no es derivable en $x = 0$, ya que el eje *y* (cuya ecuación es $x = 0$) es una asíntota vertical de la gráfica.

Ahora $y = 1/x$ es también una solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden $xy' + y = 0$ (Compruebe). Pero cuando decimos que $y = 1/x$ es una *solución* de esta ED, significa que es una función definida en un intervalo *I* en el que es derivable y satisface la ecuación. En otras palabras, $y = 1/x$ es una solución de la ED en *cualquier* intervalo que no contenga 0, tal como $(-3, -1)$, $(\frac{1}{2}, 10)$, $(-\infty, 0)$, o $(0, \infty)$. Porque las curvas solución definidas por $y = 1/x$ para $-3 < x < -1$ y $\frac{1}{2} < x < 10$ son simplemente tramos, o partes, de las curvas solución definidas por $y = 1/x$ para $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$, respectivamente, esto hace que tenga sentido tomar el intervalo *I* tan grande como sea posible. Así tomamos *I* ya sea como $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$. La curva solución en $(0, \infty)$ es como se muestra en la figura 1.1.1b. ■



a) función $y = 1/x, x \neq 0$



b) solución $y = 1/x, (0, \infty)$

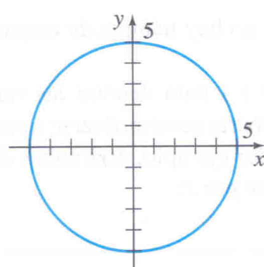
FIGURA 1.1.1 La función $y = 1/x$ no es la misma que la solución $y = 1/x$

SOLUCIONES EXPLÍCITAS E IMPLÍCITAS Usted debe estar familiarizado con los términos *funciones explícitas* y *funciones implícitas* de su curso de cálculo. Una solución en la cual la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente y las constantes se dice que es una **solución explícita**. Para nuestros propósitos, consideremos una solución explícita como una fórmula explícita $y = \phi(x)$ que podamos manejar, evaluar y derivar usando las reglas usuales. Acabamos de ver en los dos últimos ejemplos que $y = \frac{1}{16}x^4$, $y = xe^x$, y $y = 1/x$ son soluciones explícitas, respectivamente, de $dy/dx = xy^{1/2}$, $y'' - 2y' + y = 0$, y $xy' + y = 0$. Además, la solución trivial $y = 0$ es una solución explícita de cada una de estas tres ecuaciones. Cuando lleguemos al punto de realmente resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias veremos que los métodos de solución no siempre conducen directamente a una solución explícita $y = \phi(x)$. Esto es particularmente cierto cuando intentamos resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Con frecuencia tenemos que conformarnos con una relación o expresión $G(x, y) = 0$ que define una solución ϕ.

DEFINICIÓN 1.1.3 Solución implícita de una EDO

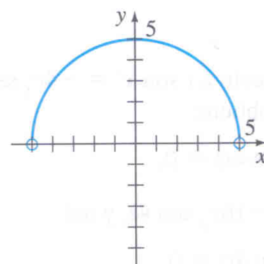
Se dice que una relación $G(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de una ecuación diferencial ordinaria (4) en un intervalo *I*, suponiendo que existe al menos una función ϕ que satisface la relación así como la ecuación diferencial en *I*.

Está fuera del alcance de este curso investigar la condición bajo la cual la relación $G(x, y) = 0$ define una función derivable ϕ. Por lo que supondremos que si implementar formalmente un método de solución nos conduce a una relación $G(x, y) = 0$, entonces existe al menos una función ϕ que satisface tanto la relación (que es $G(x, \phi(x)) = 0$) como la ecuación diferencial en el intervalo *I*. Si la solución implícita $G(x, y) = 0$ es bastante simple, podemos ser capaces de despejar a *y* en términos de *x* y obtener una o más soluciones explícitas. Véanse los *Comentarios*.



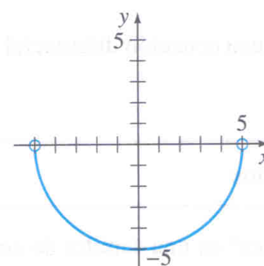
a) solución implícita

$x^2 + y^2 = 25$



b) solución explícita

$y_1 = \sqrt{25 - x^2}, -5 < x < 5$



c) solución explícita

$y_2 = -\sqrt{25 - x^2}, -5 < x < 5$

FIGURA 1.1.2 Una solución implícita de dos soluciones explícitas de $y' = -x/y$.

EJEMPLO 3 Comprobación de una solución implícita

La relación $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{8}$$

en el intervalo abierto $(-5, 5)$. Derivando implícitamente obtenemos

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}25 \quad \text{o} \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Resolviendo la última ecuación para dy/dx se obtiene (8). Además, resolviendo $x^2 + y^2 = 25$ para y en términos de x se obtiene $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Las dos funciones $y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ satisfacen la relación (que es, $x^2 + \phi_1^2 = 25$) y $x^2 + \phi_2^2 = 25$) y son las soluciones explícitas definidas en el intervalo $(-5, 5)$. Las curvas solución dadas en las figuras 1.1.2b y 1.1.2c son tramos de la gráfica de la solución implícita de la figura 1.1.2a. ■

Cualquier relación del tipo $x^2 + y^2 - c = 0$ *formalmente* satisface (8) para cualquier constante c. Sin embargo, se sobrentiende que la relación siempre tendrá sentido en el sistema de los números reales; así, por ejemplo, si $c = -25$, no podemos decir que $x^2 + y^2 + 25 = 0$ es una solución implícita de la ecuación. (¿Por qué no?)

Debido a que la diferencia entre una solución explícita y una solución implícita debería ser intuitivamente clara, no discutiremos el tema diciendo siempre: "Aquí está una solución explícita (implícita)".

FAMILIAS DE SOLUCIONES El estudio de ecuaciones diferenciales es similar al del cálculo integral. En algunos libros una solución ϕ es algunas veces llamada **integral** de la ecuación y su gráfica se llama **curva integral**. Cuando obtenemos una antiderivada o una integral indefinida en cálculo, usamos una sola constante c de integración. De modo similar, cuando resolvemos una ecuación diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$, *normalmente* obtenemos una solución que contiene una sola constante arbitraria o parámetro c. Una solución que contiene una constante arbitraria representa un conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluciones llamado **familia de soluciones uniparamétrica**. Cuando resolvemos una ecuación diferencial de orden n, $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, buscamos una **familia de soluciones n-paramétrica** $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$. Esto significa que *una sola ecuación diferencial puede tener un número infinito de soluciones* correspondiendo a un número ilimitado de elecciones de los parámetros. Una solución de una ecuación diferencial que está libre de la elección de parámetros se llama **solución particular**. Por ejemplo, la familia uniparamétrica $y = cx - x\cos x$ es una solución explícita de la ecuación lineal de primer orden $xy' - y = x^2 \operatorname{sen} x$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$ (Compruebe). La figura 1.1.3 que se obtuvo usando un paquete computacional de trazado de gráficas, muestra las gráficas de algunas de las soluciones en esta familia. La solución $y = -x\cos x$, la curva azul en la figura, es una solución particular correspondiente a $c = 0$. En forma similar, en el intervalo $(-\infty, \infty)$, $y = c_1e^x + c_2xe^x$ es una familia de soluciones de dos parámetros de la ecuación lineal de segundo orden $y'' - 2y' + y = 0$ del ejemplo 1 (Compruebe). Algunas soluciones particulares de la ecuación son la solución trivial $y = 0$ $(c_1 = c_2 = 0)$, $y = xe^x$ $(c_1 = 0, c_2 = 1)$, $y = 5e^x - 2xe^x$ $(c_1 = 5, c_2 = -2)$, etcétera.

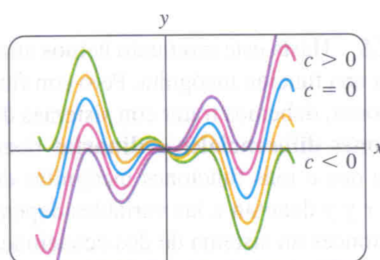


FIGURA 1.1.3 Algunas soluciones de $xy' - y = x^2 \operatorname{sen} x$.

Algunas veces una ecuación diferencial tiene una solución que no es miembro de una familia de soluciones de la ecuación, esto es, una solución que no se puede obtener usando un parámetro específico de la familia de soluciones. Esa solución extra se llama **solución singular**. Por ejemplo, vemos que $y = \frac{1}{16}x^4$ y $y = 0$ son soluciones de la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ en $(-\infty, \infty)$. En la sección 2.2 demostraremos, al resolverla realmente, que la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ tiene la familia de soluciones uniparamétrica $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$. Cuando $c = 0$, la solución particular resultante es $y = \frac{1}{16}x^4$. Pero observe que la solución trivial $y = 0$ es una solución singular, ya que

no es un miembro de la familia $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ ya que no hay manera de asignarle un valor a la constante c para obtener $y = 0$.

En todos los ejemplos anteriores, hemos usado x y y para denotar las variables independiente y dependiente, respectivamente. Pero debería acostumbrarse a ver y trabajar con otros símbolos que denotan estas variables. Por ejemplo, podríamos denotar la variable independiente por t y la variable dependiente por x:

EJEMPLO 4 Usando diferentes símbolos

Las funciones $x = c_1 \cos 4t$ y $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias o parámetros, son ambas soluciones de la ecuación diferencial lineal

$$x'' + 16x = 0.$$

Para $x = c_1 \cos 4t$ las dos primeras derivadas respecto a t son $x' = -4c_1 \operatorname{sen} 4t$ y $x'' = -16c_1 \cos 4t$. Sustituyendo entonces a x'' y x se obtiene

$$x'' + 16x = -16c_1 \cos 4t + 16(c_1 \cos 4t) = 0.$$

De manera parecida, para $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$ tenemos $x'' = -16c_2 \operatorname{sen} 4t$, y así

$$x'' + 16x = -16c_2 \operatorname{sen} 4t + 16(c_2 \operatorname{sen} 4t) = 0.$$

Finalmente, es sencillo comprobar directamente que la combinación lineal de soluciones, o la familia de dos parámetros $x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$, es también una solución de la ecuación diferencial. ■

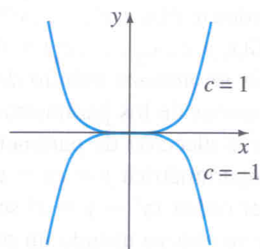
El siguiente ejemplo muestra que una solución de una ecuación diferencial puede ser una función definida por tramos.

EJEMPLO 5 Una solución definida por tramos

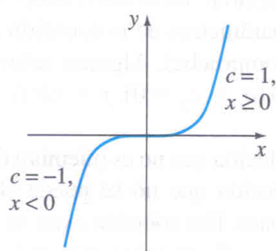
Debe comprobar que la familia uni-paramétrica $y = cx^4$ es una familia de soluciones uni-paramétrica de la ecuación diferencial $xy' - 4y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Véase la figura 1.1.4a. La función derivable definida por tramos

$$y = \begin{cases} -x^4, & x < 0 \\ x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

es una solución particular de la ecuación pero no se puede obtener de la familia $y = cx^4$ por una sola elección de c; la solución se construye a partir de la familia eligiendo $c = -1$ para $x < 0$ y $c = 1$ para $x \geq 0$. Véase la figura 1.1.4b. ■



a) dos soluciones explícitas



b) solución definida en tramos

FIGURA 1.1.4 Algunas soluciones de $xy' - 4y = 0$.

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Hasta este momento hemos analizado sólo ecuaciones diferenciales que contienen una función incógnita. Pero con frecuencia en la teoría, así como en muchas aplicaciones, debemos tratar con sistemas de ecuaciones diferenciales. Un **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias** tiene dos o más ecuaciones que implican derivadas de dos o más funciones incógnitas de una sola variable independiente. Por ejemplo, si x y y denotan a las variables dependientes y t denota a la variable independiente, entonces un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden está dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y). \end{aligned} \tag{9}$$

Una **solución** de un sistema tal como el de la ecuación (9) es un par de funciones derivables $x = \phi_1(t)$, $y = \phi_2(t)$, definidas en un intervalo común I, que satisface cada ecuación del sistema en este intervalo.

COMENTARIOS

i) Algunos comentarios finales respecto a las soluciones implícitas de las ecuaciones diferenciales. En el ejemplo 3 pudimos despejar fácilmente a y de la relación $x^2 + y^2 = 25$ en términos de x para obtener las dos soluciones explícitas, $\phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $\phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$, de la ecuación diferencial (8). Pero no debemos engañarnos con este único ejemplo. A menos que sea fácil o importante o que se le indique, en general no es necesario tratar de despejar y explícitamente en términos de x, de una solución implícita, $G(x, y) = 0$. Tampoco debemos malinterpretar el posterior segundo enunciado en la definición 1.1.3. Una solución implícita $G(x, y) = 0$ puede definir perfectamente bien a una función derivable ϕ que es una solución de una ecuación diferencial; aunque no se pueda despejar a y de $G(x, y) = 0$ con métodos analíticos como los algebraicos. La curva solución de ϕ puede ser un tramo o parte de la gráfica de $G(x, y) = 0$. Véanse los problemas 45 y 46 en los ejercicios 1.1. También lea el análisis siguiente al ejemplo 4 de la sección 2.2.

ii) Aunque se ha enfatizado el concepto de una solución en esta sección, también debería considerar que una ED no necesariamente tiene una solución. Véase el problema 39 del ejercicio 1.1. El tema de si existe una solución se tratará en la siguiente sección.

iii) Podría no ser evidente si una EDO de primer orden escrita en su forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es lineal o no lineal porque no hay nada en esta forma que nos muestre qué símbolos denotan a la variable dependiente. Véanse los problemas 9 y 10 del ejercicio 1.1.

iv) Podría parecer poco importante suponer que $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ puede resolver para $y^{(n)}$, pero hay que ser cuidadoso con esto. Existen excepciones y hay realmente algunos problemas conectados con esta suposición. Véanse los problemas 52 y 53 del ejercicio 1.1.

v) Puede encontrar el término *soluciones de forma cerrada* en libros de ED o en clases de ecuaciones diferenciales. La traducción de esta frase normalmente se refiere a las soluciones explícitas que son expresables en términos de *funciones elementales* (o conocidas): combinaciones finitas de potencias enteras de x, raíces, funciones exponenciales y logarítmicas y funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas.

vi) Si *toda* solución de una EDO de n-ésimo orden $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ en un intervalo I se puede obtener a partir de una familia n-parámetros $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ eligiendo apropiadamente los parámetros c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces diremos que la familia es la **solución general** de la ED. Al resolver EDO lineales imponemos algunas restricciones relativamente simples en los coeficientes de la ecuación; con estas restricciones podemos asegurar no sólo que existe una solución en un intervalo sino también que una familia de soluciones produce todas las posibles soluciones. Las EDO no lineales, con excepción de algunas ecuaciones de primer orden, son normalmente difíciles o imposibles de resolver en términos de funciones elementales. Además si obtenemos una familia de soluciones para una ecuación no lineal, no es obvio si la familia contiene todas las soluciones. Entonces a nivel práctico, la designación de "solución general" se aplica sólo a las EDO lineales. No se preocupe por el momento de este concepto, pero recuerde las palabras "solución general" pues retomaremos este concepto en la sección 2.3 y nuevamente en el capítulo 4.

EJERCICIOS 1.1

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-1.

En los problemas 1 a 8 establezca el orden de la ecuación diferencial ordinaria dada. Determine si la ecuación es lineal o no lineal, comparando con la ecuación (6).

1. $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

2. $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

3. $t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6y = 0$

4. $\dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{du}{dr} + u = \cos(r + u)$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

6. $\dfrac{d^2R}{dt^2} = -\dfrac{k}{R^2}$

7. $(\operatorname{sen}\theta)y''' - (\cos\theta)y' = 2$

8. $\ddot{x} - \left(1 - \dfrac{\dot{x}^2}{3}\right)\dot{x} + x = 0$

En los problemas 9 y 10 establezca si la ecuación diferencial de primer orden dada es lineal en la variable dependiente comparándola con la primera ecuación dada en (7).

9. $(y^2 - 1)\,dx + x\,dy = 0$; en y; en x

10. $u\,dv + (v + uv - ue^u)\,du = 0$; en v; en u

En los problemas ll a 14, compruebe que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada. Suponga un intervalo I de definición adecuado para cada solución.

11. $2y' + y = 0;\quad y = e^{-x/2}$

12. $\dfrac{dy}{dt} + 20y = 24;\quad y = \dfrac{6}{5} - \dfrac{6}{5}e^{-20t}$

13. $y'' - 6y' + 13y = 0;\quad y = e^{3x}\cos 2x$

14. $y'' + y = \tan x;\quad y = -(\cos x)\ln(\sec x + \tan x)$

En los problemas 15 a 18 compruebe que la función indicada $y = \phi(x)$ es una solución explícita de la ecuación diferencial de primer orden dada. Proceda como en el ejemplo 2, considerando a ϕ simplemente como una *función*, dando su dominio. Después considere a ϕ como una solución de la ecuación diferencial, dando al menos un intervalo I de definición.

15. $(y - x)y' = y - x + 8;\quad y = x + 4\sqrt{x + 2}$

16. $y' = 25 + y^2;\quad y = 5\tan 5x$

17. $y' = 2xy^2;\quad y = 1/(4 - x^2)$

18. $2y' = y^3\cos x;\quad y = (1 - \operatorname{sen} x)^{-1/2}$

En los problemas 19 y 20 compruebe que la expresión indicada es una solución implícita de la ecuación diferencial dada. Encuentre al menos una solución explícita $y = \phi(x)$ en cada caso. Use alguna aplicación para trazar gráficas para obtener la gráfica de una solución explícita. Dé un intervalo I de definición de cada solución ϕ.

19. $\dfrac{dX}{dt} = (X - 1)(1 - 2X);\quad \ln\left(\dfrac{2X - 1}{X - 1}\right) = t$

20. $2xy\,dx + (x^2 - y)\,dy = 0;\quad -2x^2y + y^2 = 1$

En los problemas 21 a 24 compruebe que la familia de funciones indicada es una solución de la ecuación diferencial dada. Suponga un intervalo I de definición adecuado para cada solución.

21. $\dfrac{dP}{dt} = P(1 - P);\quad P = \dfrac{c_1e^t}{1 + c_1e^t}$

22. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1;\quad y = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt + c_1e^{-x^2}$

23. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0;\quad y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$

24. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 12x^2;$

$y = c_1x^{-1} + c_2x + c_3x\ln x + 4x^2$

25. Compruebe que la función definida en tramos

$$y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

es una solución de la ecuación diferencial $xy' - 2y = 0$ en $(-\infty, \infty)$.

26. En el ejemplo 3 vimos que $y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ son soluciones de $dy/dx = -x/y$ en el intervalo $(-5, 5)$. Explique por qué la función definida en tramos

$$y = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2}, & -5 < x < 0 \\ -\sqrt{25 - x^2}, & 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

no es una solución de la ecuación diferencial en el intervalo $(-5, 5)$.

En los problemas 27 a 30 determine los valores de m tales que la función $y = e^{mx}$ sea una solución de la ecuación diferencial dada.

27. $y' + 2y = 0$ **28.** $5y' = 2y$

29. $y'' - 5y' + 6y = 0$ **30.** $2y'' + 7y' - 4y = 0$

En los problemas 31 y 32 determine los valores de m tales que la función $y = x^m$ sea una solución de la ecuación diferencial dada.

31. $xy'' + 2y' = 0$

32. $x^2y'' - 7xy' + 15y = 0$

En los problemas 33 a 36 use el concepto de que $y = c$, $-\infty < x < \infty$, es una función constante si y solo si $y' = 0$ para determinar si la ecuación diferencial tiene soluciones constantes.

33. $3xy' + 5y = 10$

34. $y' = y^2 + 2y - 3$

35. $(y - 1)y' = 1$

36. $y'' + 4y' + 6y = 10$

En los problemas 37 y 38 compruebe que el par de funciones indicado es una solución del sistema dado de ecuaciones diferenciales en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

37. $\dfrac{dx}{dt} = x + 3y$

$\dfrac{dy}{dt} = 5x + 3y;$

$x = e^{-2t} + 3e^{6t},$

$y = -e^{-2t} + 5e^{6t}$

38. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t;$

$x = \cos 2t + \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{5}e^t,$

$y = -\cos 2t - \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}e^t$

Problemas para analizar

39. Construya una ecuación diferencial que no tenga ninguna solución real.

40. Construya una ecuación diferencial que usted asegure tenga sólo la solución trivial $y = 0$. Explique su razonamiento.

41. ¿Qué función conoce de cálculo tal que su primera derivada sea ella misma? ¿Que su primera derivada sea un múltiplo constante k de ella misma? Escriba cada respuesta en la forma de una ecuación diferencial de primer orden con una solución.

42. ¿Qué función (o funciones) conoce de cálculo tal que su segunda derivada sea ella misma? ¿Que su segunda derivada sea el negativo de ella misma? Escriba cada respuesta en la forma de una ecuación diferencial de segundo orden con una solución.

43. Dado que $y = \operatorname{sen} x$ es una solución explícita de la ecuación diferencial de primer orden $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$, encuentre un intervalo de definición I. [*Sugerencia: I no* es el intervalo $(-\infty, \infty)$.]

44. Analice por qué intuitivamente se supone que la ecuación diferencial lineal $y'' + 2y' + 4y = 5 \operatorname{sen} t$ tiene una solución de la forma $y = A \operatorname{sen} t + B \cos t$, donde A y B son constantes. Después determine las constantes específicas A y B tales que $y = A \operatorname{sen} t + B \cos t$ es una solución particular de la ED.

En los problemas 45 y 46 la figura dada representa la gráfica de una solución implícita $G(x, y) = 0$ de una ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$. En cada caso la relación $G(x, y) = 0$ implícitamente define varias soluciones de la ED. Reproduzca cuidadosamente cada figura en una hoja. Use lápices de diferentes colores para señalar los tramos o partes, de cada gráfica que corresponda a las gráficas de las soluciones. Recuerde que una solución ϕ debe ser una función y derivable. Utilice la curva solución para estimar un intervalo de definición I de cada solución ϕ.

45.

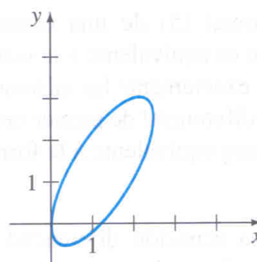


FIGURA 1.1.5 Gráfica del problema 45.

46.

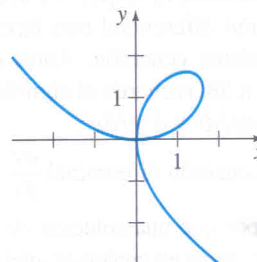


FIGURA 1.1.6 Gráfica del problema 46.

47. Las gráficas de los miembros de una familia uni-paramétrica $x^3 + y^3 = 3cxy$ se llaman ***folium de Descartes***. Compruebe que esta familia es una solución implícita de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y^3 - 2x^3)}{x(2y^3 - x^3)}.$$

48. La gráfica de la figura 1.1.6 es el miembro de la familia del *folium* del problema 47 correspondiente a $c = 1$. Analice: ¿cómo puede la ED del problema 47 ayudar a determinar los puntos de la gráfica de $x^3 + y^3 = 3xy$ donde la recta tangente es vertical? ¿Cómo saber dónde una recta tangente que es vertical ayuda a determinar un intervalo I de definición de una solución ϕ de la ED? Lleve a cabo sus ideas y compare con sus estimaciones de los intervalos en el problema 46.

49. En el ejemplo 3, el intervalo I más grande sobre el cual las soluciones explícitas $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$ se encuentran definidas en el intervalo abierto $(-5, 5)$. ¿Por qué I no puede ser el intervalo cerrado I definido por $[-5, 5]$?

50. En el problema 21 se da una familia uni-paramétrica de soluciones de la ED $P' = P(1-P)$. ¿Cualquier curva solución pasa por el punto (0, 3)? ¿Y por el punto (0, 1)?

51. Analice y muestre con ejemplos cómo resolver ecuaciones diferenciales de las formas $dy/dx = f(x)$ y $d^2y/dx^2 = f(x)$.

52. La ecuación diferencial $x(y')^2 - 4y' - 12x^3 = 0$ tiene la forma dada en la ecuación (4). Determine si la ecuación se puede poner en su forma normal $dy/dx = f(x, y)$.

53. La forma normal (5) de una ecuación diferencial de n-ésimo orden es equivalente a la ecuación (4) si las dos formas tienen exactamente las mismas soluciones. Forme una ecuación diferencial de primer orden para la que $F(x, y, y') = 0$ no sea equivalente a la forma normal $dy/dx = f(x, y)$.

54. Determine una ecuación diferencial de segundo orden $F(x, y, y', y'') = 0$ para la que $y = c_1x + c_2x^2$ sea una familia de soluciones de dos parámetros. Asegúrese de que su ecuación esté libre de los parámetros arbitrarios c_1 y c_2.

Información cualitativa respecto a una solución $y = \phi(x)$ de una ecuación diferencial con frecuencia puede obtenerse de la misma ecuación. Antes de trabajar con los problemas 55 a 58, recuerde el significado geométrico de las derivadas dy/dx y d^2y/dx^2.

55. Considere la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x^2}$.

a) Explique por qué una solución de la ED debe ser una función creciente en cualquier intervalo del eje de las x.

b) ¿A qué son iguales $\lim\limits_{x\to-\infty} dy/dx$ y $\lim\limits_{x\to\infty} dy/dx$. ¿Qué le sugiere esto respecto a una curva solución conforme $x \to \pm\infty$?

c) Determine un intervalo sobre el cual una curva solución sea cóncava hacia abajo y un intervalo sobre el que la curva sea cóncava hacia arriba.

d) Trace la gráfica de una solución $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial cuya forma se sugiere en los incisos a) a c).

56. Considere la ecuación diferencial $dy/dx = 5 - y$.

a) Ya sea por inspección o por el método sugerido en los problemas 33 a 36, encuentre una solución constante de la ED.

b) Utilizando sólo la ecuación diferencial, determine los intervalos en el eje y en los que una solución constante $y = \phi(x)$ sea creciente. Determine los intervalos en el eje y en los cuales $y = \phi(x)$ es decreciente.

57. Considere la ecuación diferencial $dy/dx = y(a - by)$, donde a y b son constantes positivas.

a) Ya sea por inspección o por los métodos sugeridos en los problemas 33 a 36, determine dos soluciones constantes de la ED.

b) Usando sólo la ecuación diferencial, determine los intervalos en el eje y en los que una solución no constante $y = \phi(x)$ es creciente. Determine los intervalos en los que $y = \phi(x)$ es decreciente.

c) Utilizando sólo la ecuación diferencial, explique por qué $y = a/2b$ es la coordenada y de un punto de inflexión de la gráfica de una solución no constante $y = \phi(x)$.

d) En los mismos ejes coordenados, trace las gráficas de las dos soluciones constantes en el inciso *a*). Estas soluciones constantes parten el plano xy en tres regiones. En cada región, trace la gráfica de una solución no constante $y = \phi(x)$ cuya forma se sugiere por los resultados de los incisos b) y c).

58. Considere la ecuación diferencial $y' = y^2 + 4$.

a) Explique por qué no existen soluciones constantes de la ecuación diferencial.

b) Describa la gráfica de una solución $y = \phi(x)$. Por ejemplo, ¿puede una curva solución tener un extremo relativo?

c) Explique por qué $y = 0$ es la coordenada y de un punto de inflexión de una curva solución.

d) Trace la gráfica de una solución $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial cuya forma se sugiere en los incisos a) a c).

Tarea para el laboratorio de computación

En los problemas 59 y 60 use un CAS (por sus siglas en inglés, Sistema Algebraico Computacional) para calcular todas las derivadas y realice las simplificaciones necesarias para comprobar que la función indicada es una solución particular de la ecuación diferencial.

59. $y^{(4)} - 20y''' - + 158y'' - 580y' + 841y = 0;$
$y = xe^{5x}\cos 2x$

60. $x^3y''' + 2x^2y'' + 20xy' - 78y = 0;$
$$y = 20\frac{\cos(5 \ln x)}{x} - 3\frac{\operatorname{sen}(5 \ln x)}{x}$$

1.2 PROBLEMAS CON VALORES INICIALES

REPASO DE MATERIAL

- Forma normal de una ED
- Solución de una ED
- Familia de soluciones

INTRODUCCIÓN Con frecuencia nos interesan problemas en los que buscamos una solución $y(x)$ de una ecuación diferencial tal que $y(x)$ satisface condiciones prescritas, es decir, condiciones impuestas sobre una $y(x)$ desconocida o sus derivadas. En algún intervalo I que contiene a x_0 el problema

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} && \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ &\textit{Sujeto a:} && y(x_0) = y_0,\, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes reales arbitrarias dadas se llama **problema con valores iniciales (PVI)**. Los valores de $y(x)$ y de sus primeras $n - 1$ derivadas en un solo punto x_0, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, se llaman **condiciones iniciales.**

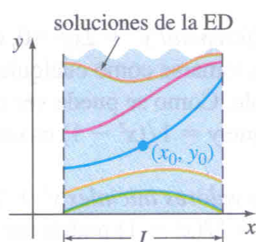


FIGURA 1.2.1 Solución del PVI de primer orden.

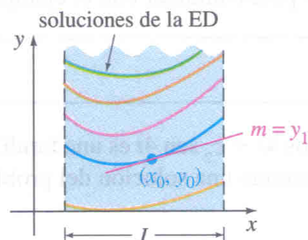


FIGURA 1.2.2 Solución del PVI de segundo orden.

PVI DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN El problema dado en (1) también se llama **problema con valores iniciales de n-ésimo orden**. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} && \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ &\textit{Sujeto a:} && y(x_0) = y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

y

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} && \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \\ &\textit{Sujeto a:} && y(x_0) = y_0,\, y'(x_0) = y_1 \end{aligned} \tag{3}$$

son problemas con valores iniciales de **primer** y **segundo orden**, respectivamente. Estos dos problemas son fáciles de interpretar en términos geométricos. Para la ecuación (2) estamos buscando una solución de la ecuación diferencial en un intervalo I que contenga a x_0, tal que su gráfica pase por el punto dado (x_0, y_0). En la figura 1.2.1 se muestra en azul una curva solución. Para la ecuación (3) queremos determinar una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial $y'' = f(x, y, y')$ en un intervalo I que contenga a x_0 de tal manera que su gráfica no sólo pase por el punto dado (x_0, y_0), sino que también la pendiente a la curva en ese punto sea el número y_1. En la figura 1.2.2 se muestra en azul una curva solución. Las palabras *condiciones iniciales* surgen de los sistemas físicos donde la variable independiente es el tiempo t y donde $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = y_1$ representan la posición y la velocidad respectivamente de un objeto al comienzo o al tiempo inicial t_0.

Con frecuencia, resolver un problema con valores iniciales de n-ésimo orden tal como (1) implica determinar primero una familia n-paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial dada y después usando las n condiciones iniciales en x_0 determinar los valores numéricos de las n constantes en la familia. La solución particular resultante está definida en algún intervalo I que contiene al punto inicial x_0.

EJEMPLO 1 Dos PVI de primer orden

En el problema 41 de los ejercicios 1.1 se le pidió que dedujera que $y = ce^x$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación de primer orden $y' = y$. Todas las soluciones en esta familia están definidas en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Si imponemos una condición inicial, digamos, $y(0)=3$, entonces al sustituir $x = 0$, $y = 3$ en la familia se

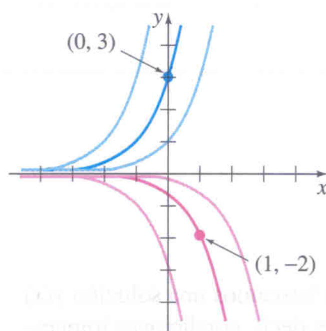


FIGURA 1.2.3 Soluciones de los dos PVI.

determina la constante $3 = ce^0 = c$ por lo que $y = 3e^x$ es una solución del PVI

$$y' = y, \quad y(0) = 3.$$

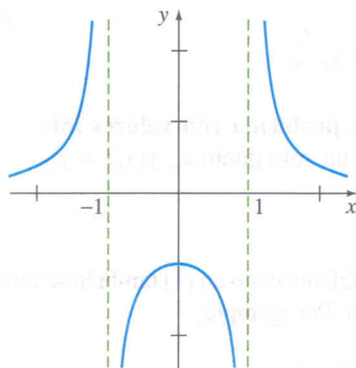
Ahora si hacemos que la curva solución pase por el punto $(1, -2)$ en lugar de $(0, 3)$, entonces $y(1) = -2$ se obtendrá $-2 = ce$ o $c = -2e^{-1}$. En este caso $y = -2e^{x-1}$ es una solución del PVI

$$y' = y, \quad y(1) = -2.$$

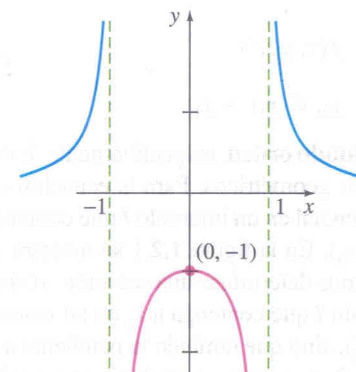
En la figura 1.2.3 se muestran en azul oscuro y en rojo oscuro las dos curvas solución. ■

El siguiente ejemplo muestra otro problema con valores iniciales de primer orden. En este ejemplo observe cómo el intervalo de definición I de la solución $y(x)$ depende de la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

EJEMPLO 2 Intervalo I de definición de una solución



a) función definida para toda x excepto en $x = \pm 1$



b) solución definida en el intervalo que contiene $x = 0$

FIGURA 1.2.4 Gráficas de la función y de la solución del PVI del ejemplo 2.

En el problema 6 de los ejercicios 2.2 se le pedirá mostrar que una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial de primer orden $y' + 2xy^2 = 0$ es $y = 1/(x^2 + c)$. Si establecemos la condición inicial $y(0) = -1$, entonces al sustituir $x = 0$ y $y = -1$ en la familia de soluciones, se obtiene $-1 = 1/c$ o $c = -1$. Así $y = 1/(x^2 - 1)$. Ahora enfatizamos las siguientes tres diferencias:

- Considerada como una *función*, el dominio de $y = 1/(x^2 - 1)$ es el conjunto de todos los números reales x para los cuales $y(x)$ está definida, excepto en $x = -1$ y en $x = 1$. Véase la figura 1.2.4a.
- Considerada como una *solución de la ecuación diferencial* $y' + 2xy^2 = 0$, el intervalo I de definición de $y = 1/(x^2 - 1)$ podría tomarse como cualquier intervalo en el cual $y(x)$ está definida y es derivable. Como se puede ver en la figura 1.2.4a, los intervalos más largos en los que $y = 1/(x^2 - 1)$ es una solución son $(-\infty, -1)$, $(-1,1)$ y $(1, \infty)$.
- Considerada como *una solución del problema con valores iniciales* $y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = -1$, el intervalo I de definición de $y = 1/(x^2 - 1)$ podría ser cualquier intervalo en el cual $y(x)$ está definida, es derivable y contiene al punto inicial $x = 0$; el intervalo más largo para el cual esto es válido es $(-1, 1)$. Véase la curva roja en la figura 1.2.4b. ■

Véanse los problemas 3 a 6 en los ejercicios 1.2 para continuar con el ejemplo 2.

EJEMPLO 3 PVI de segundo orden

En el ejemplo 4 de la sección 1.1 vimos que $x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$ es una familia de soluciones de dos parámetros de $x'' + 16x = 0$. Determine una solución del problema con valores iniciales

$$x'' + 16x = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \tag{4}$$

SOLUCIÓN Primero aplicamos $x(\pi/2) = -2$ en la familia de soluciones: $c_1 \cos 2\pi + c_2 \operatorname{sen} 2\pi = -2$. Puesto que $\cos 2\pi = 1$ y $\operatorname{sen} 2\pi = 0$, encontramos que $c_1 = -2$. Después aplicamos $x'(\pi/2) = 1$ en la familia uniparamétrica de soluciones $x(t) = -2 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$. Derivando y después haciendo $t = \pi/2$ y $x' = 1$ se obtiene $8 \operatorname{sen} 2\pi + 4c_2 \cos 2\pi = 1$, a partir del cual vemos que $c_2 = \frac{1}{4}$. Por tanto $x = -2 \cos 4t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4t$ es una solución de (4). ■

EXISTENCIA Y UNICIDAD Al considerar un problema con valores iniciales surgen dos importantes preguntas:

¿Existe la solución del problema?
Si existe la solución, ¿es única?

Para el problema con valores iniciales de la ecuación (2) pedimos:

Existencia $\begin{cases} \text{¿La ecuación diferencial } dy/dx = f(x, y) \text{ tiene soluciones?} \\ \text{¿Alguna de las curvas solución pasa por el punto } (x_0, y_0)\text{?} \end{cases}$

Unicidad $\begin{cases} \text{¿Cuándo podemos estar seguros de que hay precisamente una} \\ \text{curva solución que pasa a través del punto } (x_0, y_0)\text{?} \end{cases}$

Observe que en los ejemplos 1 y 3 se usa la frase "*una* solución" en lugar de "*la* solución" del problema. El artículo indefinido "una" se usa deliberadamente para sugerir la posibilidad de que pueden existir otras soluciones. Hasta el momento no se ha demostrado que existe una única solución de cada problema. El ejemplo siguiente muestra un problema con valores iniciales con dos soluciones.

EJEMPLO 4 Un PVI puede tener varias soluciones

Cada una de las funciones $y = 0$ y $y = \frac{1}{16}x^4$ satisface la ecuación diferencial $dy/x = xy^{1/2}$ y la condición inicial $y(0) = 0$, por lo que el problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0$$

tiene al menos dos soluciones. Como se muestra en la figura 1.2.5, las gráficas de las dos soluciones pasan por el mismo punto (0, 0). ■

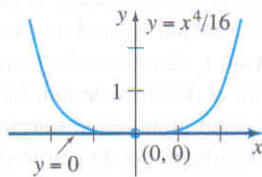


FIGURA 1.2.5 Dos soluciones del mismo PVI.

Dentro de los límites de seguridad de un curso formal de ecuaciones diferenciales uno puede confiar en que la mayoría de las ecuaciones diferenciales tendrán soluciones y que las soluciones de los problemas con valores iniciales *probablemente* serán únicas. Sin embargo, en la vida real, no es así. Por tanto es deseable conocer antes de tratar de resolver un problema con valores iniciales si existe una solución y cuando así sea, si ésta es la única solución del problema. Puesto que vamos a considerar ecuaciones diferenciales de primer orden en los dos capítulos siguientes, estableceremos aquí sin demostrarlo un teorema directo que da las condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad de una solución de un problema con valores iniciales de primer orden de la forma dada en la ecuación (2). Esperaremos hasta el capítulo 4 para retomar la pregunta de la existencia y unicidad de un problema con valores iniciales de segundo orden.

TEOREMA 1.2.1 Existencia de una solución única

Sea R una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en R, entonces existe algún intervalo I_0: $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en $[a, b]$, y una función única $y(x)$, definida en I_0, que es una solución del problema con valores iniciales (2).

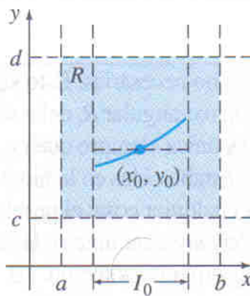


FIGURA 1.2.6 Región rectangular R.

El resultado anterior es uno de los más populares teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales de primer orden ya que el criterio de continuidad de $f(x, y)$ y de $\partial f/\partial y$ son relativamente fáciles de comprobar. En la figura 1.2.6 se muestra la geometría del teorema 1.2.1.

EJEMPLO 5 Revisión del ejemplo 4

Como vimos en el ejemplo 4 la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ tiene al menos dos soluciones cuyas gráficas pasan por el punto (0, 0). Analizando las funciones

$$f(x, y) = xy^{1/2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$$

vemos que son continuas en la mitad superior del plano definido por $y > 0$. Por tanto el teorema 1.2.1 nos permite concluir que a través de cualquier punto (x_0, y_0), $y_0 > 0$ en la mitad superior del plano existe algún intervalo centrado en x_0 en el cual la ecuación diferencial dada tiene una solución única. Así, por ejemplo, aún sin resolverla, sabemos que existe algún intervalo centrado en 2 en el cual el problema con valores iniciales $dy/dx = xy^{1/2}$, $y(2) = 1$ tiene una solución única. ■

En el ejemplo 1, el teorema 1.2.1 garantiza que no hay otras soluciones de los problemas con valores iniciales $y' = y$, $y(0) = 3$ y $y' = y$, $y(1) = -2$ distintas a $y = 3e^x$ y $y = -2e^{x-1}$, respectivamente. Esto es consecuencia del hecho de que $f(x, y) = y$ y $\partial f/\partial y = 1$ son continuas en todo el plano xy. Además podemos mostrar que el intervalo I en el cual cada solución está definida es $(-\infty, \infty)$.

INTERVALO DE EXISTENCIA Y UNICIDAD Suponga que $y(x)$ representa una solución del problema con valores iniciales (2). Los siguientes tres conjuntos de números reales en el eje x pueden no ser iguales: el dominio de la función $y(x)$, el intervalo I en el cual la solución $y(x)$ está definida o existe, y el intervalo I_0 de existencia y unicidad. El ejemplo 2 de la sección 1.1 muestra la diferencia entre el dominio de una función y el intervalo I de definición. Ahora suponga que (x_0, y_0) es un punto en el interior de la región rectangular R en el teorema 1.2.1. Esto da como resultado que la continuidad de la función $f(x, y)$ en R por sí misma es suficiente para garantizar la existencia de al menos una solución de $dy/dx = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, definida en algún intervalo I. El intervalo I de definición para este problema con valores iniciales normalmente se toma como el intervalo más grande que contiene x_0 en el cual la solución $y(x)$ está definida y es derivable. El intervalo I depende tanto de $f(x, y)$ como de la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Véanse los problemas 31 a 34 en los ejercicios 1.2. La condición extra de continuidad de la primera derivada parcial $\partial f/\partial y$ en R nos permite decir que no sólo existe una solución en algún intervalo I_0 que contiene x_0, sino que esta es la *única* solución que satisface $y(x_0) = y_0$. Sin embargo, el teorema 1.2.1 no da ninguna indicación de los tamaños de los intervalos I e I_0; *el intervalo de definición I no necesita ser tan amplio como la región R y el intervalo de existencia y unicidad I_0 puede no ser tan amplio como I.* El número $h > 0$ que define el intervalo I_0: $(x_0 - h, x_0 + h)$ podría ser muy pequeño, por lo que es mejor considerar que la solución $y(x)$ es *única en un sentido local*, esto es, una solución definida cerca del punto (x_0, y_0). Véase el problema 44 en los ejercicios 1.2.

COMENTARIOS

(*i*) Las condiciones del teorema 1.2.1 son suficientes pero no necesarias. Esto significa que cuando $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en una región rectangular R, debe siempre seguir que existe una solución de la ecuación (2) y es única siempre que (x_0, y_0) sea un punto interior a R. Sin embargo si las condiciones establecidas en la hipótesis del teorema 1.2.1 no son válidas, entonces puede ocurrir cualquier cosa: el problema de la ecuación (2) *puede* tener una solución y esta solución *puede* ser única o la ecuación (2) puede tener varias soluciones o puede no tener ninguna solución. Al leer nuevamente el ejemplo 5 vemos que la hipótesis del teorema 1.2.1 no es válida en la recta $y = 0$ para la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$, pero esto no es sorprendente, ya que como vimos en el ejemplo 4 de esta sección, hay dos soluciones definidas en un intervalo común $-h < x < h$ que satisface $y(0) = 0$. Por otra parte, la hipótesis del teorema 1.2.1 no es válida en la recta $y = 1$ para la ecuación diferencial $dy/dx = |y - 1|$. Sin embargo se puede probar que la solución del problema con valores iniciales $dy/dx = |y - 1|$, $y(0) = 1$ es única ¿Puede intuir la solución?

(*ii*) Es recomendable leer, pensar, trabajar y después recordar el problema 43 en los ejercicios 1.2.

EJERCICIOS 1.2

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-1

En los problemas 1 y 2, $y = 1/(1 + c_1e^{-x})$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ED de primer orden $y' = y - y^2$. Encuentre una solución del PVI de primer orden que consiste en esta ecuación diferencial y la condición inicial dada.

1. $y(0) = -\frac{1}{3}$

2. $y(-1) = 2$

En los problemas 3 a 6, $y = 1/(x^2 + c)$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ED de primer orden $y' + 2xy^2 = 0$. Determine una solución del PVI de primer orden que consiste en esta ecuación diferencial y la condición inicial dada. Dé el intervalo I más largo en el cual está definida la solución.

3. $y(2) = \frac{1}{3}$

4. $y(-2) = \frac{1}{2}$

5. $y(0) = 1$

6. $y(\frac{1}{2}) = -4$

En los problemas 7 a 10, $x = c_1\cos t + c_2$ sen t es una familia de soluciones de dos parámetros de la ED de segundo orden $x'' + x = 0$. Determine una solución del PVI de segundo orden que consiste en esta ecuación diferencial y las condiciones iniciales dadas.

7. $x(0) = -1, \quad x'(0) = 8$

8. $x(\pi/2) = 0, \quad x'(\pi/2) = 1$

9. $x(\pi/6) = \frac{1}{2}, \quad x'(\pi/6) = 0$

10. $x(\pi/4) = \sqrt{2}, \quad x'(\pi/4) = 2\sqrt{2}$

En los problemas 11 a 14, $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ es una familia de soluciones de dos parámetros de la ED de segundo orden $y'' - y = 0$. Determine una solución del PVI de segundo orden que consiste en esta ecuación diferencial y las condiciones iniciales dadas.

11. $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

12. $y(1) = 0, \quad y'(1) = e$

13. $y(-1) = 5, \quad y'(-1) = -5$

14. $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

En los problemas 15 y 16 determine por inspección al menos dos soluciones del PVI de primer orden dado.

15. $y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0$

16. $xy' = 2y, \quad y(0) = 0$

En los problemas 17 a 24 determine una región del plano xy para el que la ecuación diferencial dada tendría una solución única cuyas gráficas pasen por un punto (x_0, y_0) en la región.

17. $\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$

18. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

19. $x\frac{dy}{dx} = y$

20. $\frac{dy}{dx} - y = x$

21. $(4 - y^2)y' = x^2$

22. $(1 + y^3)y' = x^2$

23. $(x^2 + y^2)y' = y^2$

24. $(y - x)y' = y + x$

En los problemas 25 a 28 determine si el teorema 1.2.1 garantiza que la ecuación diferencial $y' = \sqrt{y^2 - 9}$ tiene una solución única que pasa por el punto dado.

25. $(1, 4)$

26. $(5, 3)$

27. $(2, -3)$

28. $(-1, 1)$

29. **a)** Por inspección determine una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $xy' = y$. Compruebe que cada miembro de la familia es una solución del problema con valores iniciales $xy' = y$, $y(0) = 0$.

b) Explique el inciso a) determinando una región R en el plano xy para el que la ecuación diferencial $xy' = y$ tendría una solución única que pase por el punto (x_0, y_0) en R.

c) Compruebe que la función definida por tramos

$$y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

satisface la condición $y(0)=0$. Determine si esta función es también una solución del problema con valores iniciales del inciso a).

30. **a)** Compruebe que $y = \tan(x + c)$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $y' = 1 + y^2$.

b) Puesto que $f(x, y) = 1 + y^2$ y $\partial f/\partial y = 2y$ son continuas en donde quiera, la región R en el teorema 1.2.1 se puede considerar como todo el plano xy. Utilice la familia de soluciones del inciso a) para determinar una solución explícita del problema con valores iniciales de primer orden $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. Aun cuando $x_0 = 0$ esté en el intervalo $(-2, 2)$, explique por qué la solución no está definida en este intervalo.

c) Determine el intervalo I de definición más largo para la solución del problema con valores iniciales del inciso b).

31. **a)** Verifique que $y = -1/(x + c)$ es una familia de soluciones uniparamétrica de la ecuación diferencial $y' = y^2$.

b) Puesto que $f(x, y) = y^2$ y $\partial f/\partial y = 2y$ son continuas donde sea, la región R del teorema 1.2.1 se puede tomar como todo el plano xy. Determine una solución de la familia del inciso a) que satisfaga que $y(0) = 1$. Después determine una solución de la familia del inciso a) que satisfaga que $y(0) = -1$. Determine el intervalo I de definición más largo para la solución de cada problema con valores iniciales.

c) Determine el intervalo de definición I más largo para la solución del problema con valores iniciales $y' = y^2$, $y(0) = 0$. [*Sugerencia*: La solución no es un miembro de la familia de soluciones del inciso a)].

32. a) Demuestre que una solución de la familia del inciso a) del problema 31 que satisface $y' = y^2$, $y(1) = 1$, es $y = 1/(2 - x)$.

b) Después demuestre que una solución de la familia del inciso a) del problema 31 que satisface $y' = y^2$, $y(3) = -1$, es $y = 1/(2 - x)$.

c) ¿Son iguales las soluciones de los incisos a) y b)?

33. a) Verifique que $3x^2 - y^2 = c$ es una familia de soluciones uniparamétricas de la ecuación diferencial $y\,dy/dx = 3x$.

b) Bosqueje, a mano, la gráfica de la solución implícita $3x^2 - y^2 = 3$. Determine todas las soluciones explícitas $y = \phi(x)$ de la ED del inciso a) definidas por esta relación. Dé un intervalo I de definición de cada una de las soluciones explícitas.

c) El punto $(-2, 3)$ está en la gráfica de $3x^2 - y^2 = 3$ pero ¿cuál de las soluciones explícitas del inciso b) satisface que $y(-2) = 3$?

34. a) Utilice la familia de soluciones del inciso a) del problema 33 para determinar una solución implícita del problema con valores iniciales $y\,dy/dx = 3x$, $y(2) = -4$. Después bosqueje, a mano, la gráfica de la solución explícita de este problema y dé su intervalo I de definición.

b) ¿Existen algunas soluciones explícitas de $y\,dy/dx = 3x$ que pasen por el origen?

En los problemas 35 a 38 se presenta la gráfica de un miembro de la familia de soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden $d^2y/dx^2 = f(x, y, y')$. Relacione la curva solución con al menos un par de las siguientes condiciones iniciales.

a) $y(1) = 1, \quad y'(1) = -2$

b) $y(-1) = 0, \quad y'(-1) = -4$

c) $y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$

d) $y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$

e) $y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$

f) $y(0) = -4, \quad y'(0) = -2$

35.

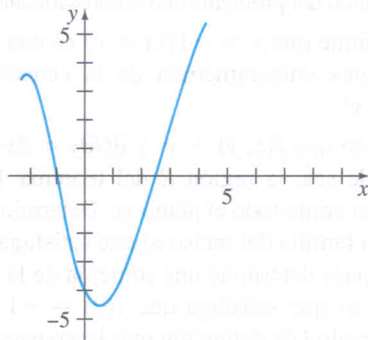


FIGURA 1.2.7 Gráfica del problema 35.

36.

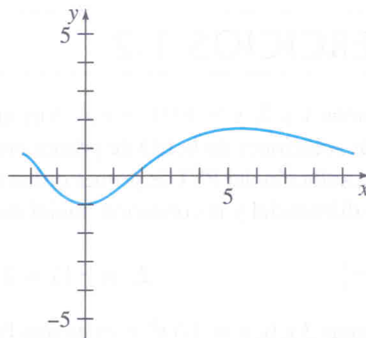


FIGURA 1.2.8 Gráfica del problema 36.

37.

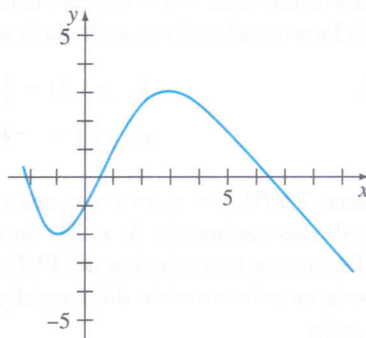


FIGURA 1.2.9 Gráfica del problema 37.

38.

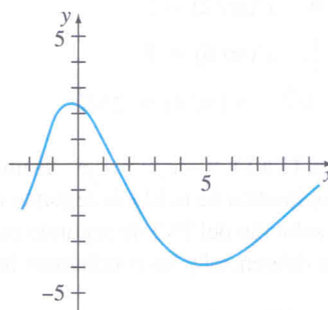


FIGURA 1.2.10 Gráfica del problema 38.

Problemas de análisis

En los problemas 39 y 40 utilice el problema 51 de los ejercicios 1.1 y (2) y (3) de esta sección.

39. Encuentre una función $y = f(x)$ cuya gráfica en cada punto (x, y) tiene una pendiente dada por $8e^{2x} + 6x$ y la intersección con el eje y en (0,9).

40. Determine una función $y = f(x)$ cuya segunda derivada es $y'' = 12x - 2$ en cada punto (x, y) de su gráfica y $y = -x + 5$ es tangente a la gráfica en el punto correspondiente a $x = 1$.

41. Considere el problema con valores iniciales $y' = x - 2y$, $y(0) = \frac{1}{2}$. Determine cuál de las dos curvas que se muestran en la figura 1.2.11 es la única curva solución posible. Explique su razonamiento.

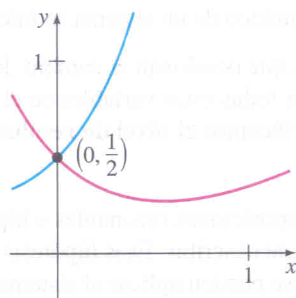


FIGURA 1.2.11 Gráficas del problema 41.

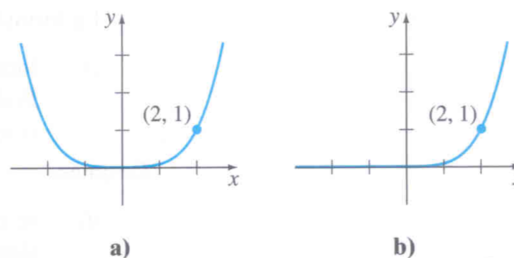


FIGURA 1.2.12 Dos soluciones del PVI del problema 44.

42. Determine un valor posible para x_0 para el que la gráfica de la solución del problema con valores iniciales $y' + 2y = 3x - 6$, $y(x_0) = 0$ es tangente al eje x en $(x_0, 0)$. Explique su razonamiento.

43. Suponga que la ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ tiene una familia uniparamétrica de soluciones y que $f(x, y)$ satisface la hipótesis del teorema 1.2.1 en alguna región rectangular R del plano xy. Explique por qué dos curvas solución diferentes no se pueden interceptar o ser tangentes entre sí en un punto (x_0, y_0) en R.

44. Las funciones $y(x) = \frac{1}{16}x^4$, $\quad -\infty < x < \infty$ y

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{16}x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

tienen el mismo dominio pero son obviamente diferentes. Véanse las figuras 1.2.12a y 1.2.12b, respectivamente. Demuestre que ambas funciones son soluciones del problema con valores iniciales $dy/dx = xy^{1/2}$, $y(2) = 1$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Resuelva la aparente contradicción entre este hecho y el último enunciado del ejemplo 5.

Modelo matemático

45. Crecimiento de la población Al inicio de la siguiente sección veremos que las ecuaciones diferenciales se pueden usar para describir o *modelar* diversos sistemas físicos. En este problema suponemos que un modelo de crecimiento de la población de una pequeña comunidad está dado por el problema con valores iniciales

$$\frac{dP}{dt} = 0.15P(t) + 20, \quad P(0) = 100,$$

donde P es el número de personas en la comunidad y el tiempo t se mide en años. ¿Qué tan rápido, es decir, con qué *razón* está aumentando la población en $t = 0$? ¿Qué tan rápido está creciendo la población cuando la población es de 500?

1.3 ECUACIONES DIFERENCIALES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

REPASO DE MATERIAL

- Unidades de medida para el peso, masa y densidad
- Segunda ley de Newton
- Ley de Hooke
- Leyes de Kirchhoff
- Principio de Arquímedes

INTRODUCCIÓN En esta sección introduciremos la idea de una ecuación diferencial como un modelo matemático y analizaremos algunos modelos específicos en biología, química y física. Ya que hayamos estudiado algunos de los métodos de solución de las ED en los capítulos 2 y 4, retomaremos y resolveremos algunos de estos modelos en los capítulos 3 y 5.

MODELOS MATEMÁTICOS Con frecuencia es deseable describir en términos matemáticos el comportamiento de algunos sistemas o fenómenos de la vida real, sean físicos, sociológicos o hasta económicos. La descripción matemática de un sistema de fenómenos se llama **modelo matemático** y se construye con ciertos objetivos. Por ejemplo, podemos desear entender los mecanismos de cierto ecosistema al estudiar el crecimiento de la población animal en ese sistema, o podemos desear datar fósiles y analizar el decaimiento de una sustancia radiactiva ya sea en el fósil o en el estrato en que éste fue descubierto.

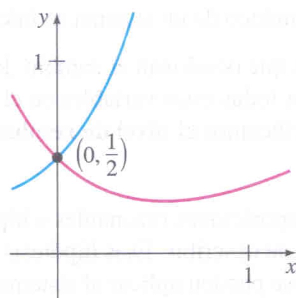


FIGURA 1.2.11 Gráficas del problema 41.

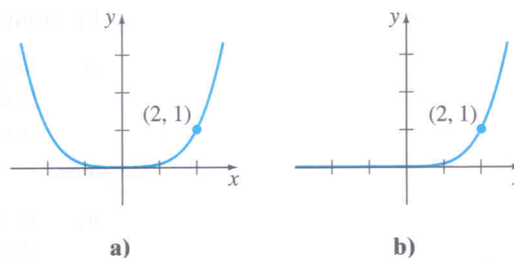


FIGURA 1.2.12 Dos soluciones del PVI del problema 44.

42. Determine un valor posible para x_0 para el que la gráfica de la solución del problema con valores iniciales $y' + 2y = 3x - 6$, $y(x_0) = 0$ es tangente al eje x en $(x_0, 0)$. Explique su razonamiento.

43. Suponga que la ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ tiene una familia uniparamétrica de soluciones y que $f(x, y)$ satisface la hipótesis del teorema 1.2.1 en alguna región rectangular R del plano xy. Explique por qué dos curvas solución diferentes no se pueden interceptar o ser tangentes entre sí en un punto (x_0, y_0) en R.

44. Las funciones $y(x) = \frac{1}{16}x^4$, $\quad -\infty < x < \infty$ y

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{16}x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

tienen el mismo dominio pero son obviamente diferentes. Véanse las figuras 1.2.12a y 1.2.12b, respectivamente. Demuestre que ambas funciones son soluciones del problema con valores iniciales $dy/dx = xy^{1/2}$, $y(2) = 1$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Resuelva la aparente contradicción entre este hecho y el último enunciado del ejemplo 5.

Modelo matemático

45. Crecimiento de la población Al inicio de la siguiente sección veremos que las ecuaciones diferenciales se pueden usar para describir o *modelar* diversos sistemas físicos. En este problema suponemos que un modelo de crecimiento de la población de una pequeña comunidad está dado por el problema con valores iniciales

$$\frac{dP}{dt} = 0.15P(t) + 20, \quad P(0) = 100,$$

donde P es el número de personas en la comunidad y el tiempo t se mide en años. ¿Qué tan rápido, es decir, con qué *razón* está aumentando la población en $t = 0$? ¿Qué tan rápido está creciendo la población cuando la población es de 500?

1.3 ECUACIONES DIFERENCIALES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

REPASO DE MATERIAL

- Unidades de medida para el peso, masa y densidad
- Segunda ley de Newton
- Ley de Hooke
- Leyes de Kirchhoff
- Principio de Arquímedes

INTRODUCCIÓN En esta sección introduciremos la idea de una ecuación diferencial como un modelo matemático y analizaremos algunos modelos específicos en biología, química y física. Ya que hayamos estudiado algunos de los métodos de solución de las ED en los capítulos 2 y 4, retomaremos y resolveremos algunos de estos modelos en los capítulos 3 y 5.

MODELOS MATEMÁTICOS Con frecuencia es deseable describir en términos matemáticos el comportamiento de algunos sistemas o fenómenos de la vida real, sean físicos, sociológicos o hasta económicos. La descripción matemática de un sistema de fenómenos se llama **modelo matemático** y se construye con ciertos objetivos. Por ejemplo, podemos desear entender los mecanismos de cierto ecosistema al estudiar el crecimiento de la población animal en ese sistema, o podemos desear datar fósiles y analizar el decaimiento de una sustancia radiactiva ya sea en el fósil o en el estrato en que éste fue descubierto.

La formulación de un modelo matemático de un sistema se inicia con

i) identificación de las variables que ocasionan el cambio del sistema. Podremos elegir no incorporar todas estas variables en el modelo desde el comienzo. En este paso especificamos el **nivel de resolución** del modelo.

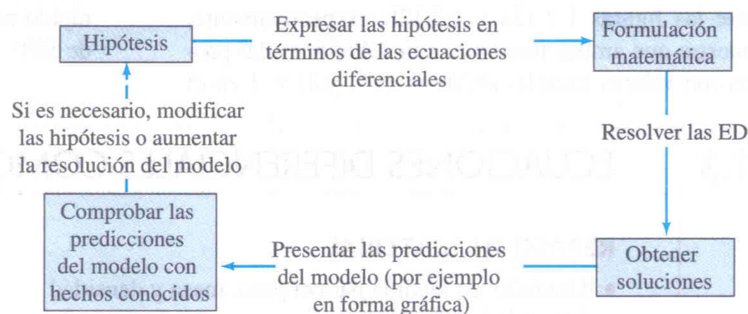
Después,

ii) se establece un conjunto de suposiciones razonables o hipótesis, acerca del sistema que estamos tratando de describir. Esas hipótesis también incluyen todas las leyes empíricas que se pueden aplicar al sistema.

Para algunos objetivos quizá baste con conformarse con modelos de baja resolución. Por ejemplo, usted ya es consciente de que en los cursos básicos de física algunas veces se desprecia la fuerza retardadora de la fricción del aire al modelar el movimiento de un cuerpo que cae cerca de la superficie de la Tierra. Pero si usted es un científico cuyo trabajo es predecir con exactitud la trayectoria de vuelo de un proyectil de largo alcance, deberá considerar la resistencia del aire y otros factores, tales como la curvatura de la Tierra.

Puesto que con frecuencia las hipótesis acerca de un sistema implican una *razón de cambio* de una o más de las variables, el enunciado matemático de todas esas hipótesis puede ser una o más ecuaciones que contengan *derivadas*. En otras palabras, el modelo matemático puede ser una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales.

Una vez que se ha formulado un modelo matemático, ya sea una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, nos enfrentamos al problema no fácil de tratar de resolverlo. *Si* podemos resolverlo, entonces consideramos que el modelo es razonable si su solución es consistente con los datos experimentales o con los hechos conocidos acerca del comportamiento del sistema. Si las predicciones que se obtienen son deficientes, podemos aumentar el nivel de resolución del modelo o hacer hipótesis alternativas acerca de los mecanismos de cambio del sistema. Entonces se repiten los pasos del proceso de modelado, como se muestra en el diagrama siguiente:



Por supuesto, al aumentar la resolución, aumentamos la complejidad del modelo matemático y la probabilidad de que no podamos obtener una solución explícita.

Con frecuencia, el modelo matemático de un sistema físico inducirá la variable tiempo t. Una solución del modelo expresa el **estado del sistema;** en otras palabras, los valores de la variable dependiente (o variables) para los valores adecuados de t que describen el sistema en el pasado, presente y futuro.

DINÁMICA POBLACIONAL Uno de los primeros intentos para modelar el **crecimiento de la población** humana por medio de las matemáticas fue realizado en 1798 por el economista inglés Thomas Malthus. Básicamente la idea detrás del modelo de Malthus es la suposición de que la razón con la que la población de un país en un cierto tiempo es proporcional* a la población total del país en ese tiempo. En otras palabras, entre más personas estén presentes al tiempo t, habrá más en el fu-

*Si dos cantidades u y v son proporcionales, se escribe $u \propto v$. Esto significa que una cantidad es un múltiplo constante de otra: $u = kv$.

turo. En términos matemáticos, si $P(t)$ denota la población al tiempo t, entonces esta suposición se puede expresar como

$$\frac{dP}{dt} \propto P \quad \text{o} \quad \frac{dP}{dt} = kP, \tag{1}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Este modelo simple, falla si se consideran muchos otros factores que pueden influir en el crecimiento o decrecimiento (por ejemplo, inmigración y emigración), resultó, sin embargo, bastante exacto en predecir la población de los Estados Unidos, durante 1790-1860. Las poblaciones que crecen con una razón descrita por la ecuación (1) son raras; sin embargo, (1) aún se usa para modelar el *crecimiento de pequeñas poblaciones en intervalos de tiempo cortos* (por ejemplo, crecimiento de bacterias en una caja de Petri).

DECAIMIENTO RADIACTIVO El núcleo de un átomo está formado por combinaciones de protones y neutrones. Muchas de esas combinaciones son inestables, esto es, los átomos se desintegran o se convierten en átomos de otras sustancias. Se dice que estos núcleos son radiactivos. Por ejemplo, con el tiempo, el radio Ra 226, intensamente radiactivo, se transforma en el radiactivo gas radón, Rn-222. Para modelar el fenómeno del **decaimiento radiactivo**, se supone que la razón dA/dt con la que los núcleos de una sustancia se desintegran es proporcional a la cantidad (más precisamente, el número de núcleos), $A(t)$ de la sustancia que queda al tiempo t:

$$\frac{dA}{dt} \propto A \quad \text{o} \quad \frac{dA}{dt} = kA. \tag{2}$$

Por supuesto que las ecuaciones (1) y (2) son exactamente iguales; la diferencia radica sólo en la interpretación de los símbolos y de las constantes de proporcionalidad. En el caso del crecimiento, como esperamos en la ecuación (1), $k > 0$, y para la desintegración como en la ecuación (2), $k < 0$.

El modelo de la ecuación (1) para crecimiento también se puede ver como la ecuación $dS/dt = rS$, que describe el crecimiento del capital S cuando está a una tasa anual de interés r compuesto continuamente. El modelo de desintegración de la ecuación (2) también se aplica a sistemas biológicos tales como la determinación de la "vida media" de un medicamento, es decir, el tiempo que le toma a 50% del medicamento ser eliminado del cuerpo por excreción o metabolización. En química el modelo del decaimiento, ecuación (2), se presenta en la descripción matemática de una reacción química de primer orden. Lo importante aquí es:

Una sola ecuación diferencial puede servir como modelo matemático de muchos fenómenos distintos.

Con frecuencia, los modelos matemáticos se acompañan de condiciones que los definen. Por ejemplo, en las ecuaciones (l) y (2) esperaríamos conocer una población inicial P_0 y por otra parte la cantidad inicial de sustancia radioactiva A_0. Si el tiempo inicial se toma en $t = 0$, sabemos que $P(0) = P_0$ y que $A(0) = A_0$. En otras palabras, un modelo matemático puede consistir en un problema con valores iniciales o, como veremos más adelante en la sección 5.2, en un problema con valores en la frontera.

LEY DE ENFRIAMIENTO/CALENTAMIENTO DE NEWTON De acuerdo con la ley empírica de Newton de enfriamiento/calentamiento, la rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea, que se llama temperatura ambiente. Si $T(t)$ representa la temperatura del cuerpo al tiempo t, T_m es la temperatura del medio que lo rodea y dT/dt es la rapidez con que cambia la temperatura del cuerpo, entonces la ley de Newton de enfriamiento/calentamiento traducida en una expresión matemática es

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m \quad \text{o} \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \tag{3}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. En ambos casos, enfriamiento o calentamiento, si T_m es una constante, se establece que $k < 0$.

PROPAGACIÓN DE UNA ENFERMEDAD Una enfermedad contagiosa, por ejemplo un virus de gripe, se propaga a través de una comunidad por personas que han estado en contacto con otras personas enfermas. Sea que $x(t)$ denote el número de personas que han contraído la enfermedad y sea que $y(t)$ denote el número de personas que aún no han sido expuestas al contagio. Es lógico suponer que la razón dx/dt con la que se propaga la enfermedad es proporcional al número de encuentros, o *interacciones*, entre estos dos grupos de personas. Si suponemos que el número de interacciones es conjuntamente proporcional a $x(t)$ y $y(t)$, esto es, proporcional al producto xy, entonces

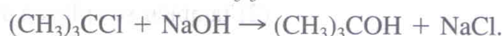
$$\frac{dx}{dt} = kxy, \tag{4}$$

donde k es la constante usual de proporcionalidad. Suponga que una pequeña comunidad tiene una población fija de n personas. Si se introduce una persona infectada dentro de esta comunidad, entonces se podría argumentar que $x(t)$ y $y(t)$ están relacionadas por $x + y = n + 1$. Utilizando esta última ecuación para eliminar y en la ecuación (4) se obtiene el modelo

$$\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x). \tag{5}$$

Una condición inicial obvia que acompaña a la ecuación (5) es $x(0) = 1$.

REACCIONES QUÍMICAS La desintegración de una sustancia radiactiva, caracterizada por la ecuación diferencial (l), se dice que es una **reacción de primer orden.** En química hay algunas reacciones que siguen esta misma ley empírica: si las moléculas de la sustancia A se descomponen y forman moléculas más pequeñas, es natural suponer que la rapidez con que se lleva a cabo esa descomposición es proporcional a la cantidad de la primera sustancia que no ha experimentado la conversión; esto es, si $X(t)$ es la cantidad de la sustancia A que permanece en cualquier momento, entonces $dX/dt = kX$, donde k es una constante negativa ya que X es decreciente. Un ejemplo de una reacción química de primer orden es la conversión del cloruro de terbutilo, $(CH_3)_3CCl$ en alcohol t-butílico $(CH_3)_3COH$:



$$(CH_3)_3CCl + NaOH \rightarrow (CH_3)_3COH + NaCl.$$

Sólo la concentración del cloruro de terbutilo controla la rapidez de la reacción. Pero en la reacción



$$CH_3Cl + NaOH \rightarrow CH_3OH + NaCl$$

se consume una molécula de hidróxido de sodio, NaOH, por cada molécula de cloruro de metilo, CH_3Cl, por lo que se forma una molécula de alcohol metílico, CH_3OH y una molécula de cloruro de sodio, NaCl. En este caso, la razón con que avanza la reacción es proporcional al producto de las concentraciones de CH_3Cl y NaOH que quedan. Para describir en general esta segunda reacción, supongamos *una* molécula de una sustancia A que se combina con *una* molécula de una sustancia B para formar *una* molécula de una sustancia C. Si X denota la cantidad de un químico C formado al tiempo t y si α y β son, respectivamente, las cantidades de los dos químicos A y B en $t = 0$ (cantidades iniciales), entonces las cantidades instantáneas no convertidas de A y B al químico C son $\alpha - X$ y $\beta - X$, respectivamente. Por lo que la razón de formación de C está dada por

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X), \tag{6}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Una reacción cuyo modelo es la ecuación (6) se dice que es una **reacción de segundo orden**.

MEZCLAS Al mezclar dos soluciones salinas de distintas concentraciones surge una ecuación diferencial de primer orden, que define la cantidad de sal contenida en la mezcla. Supongamos que un tanque mezclador grande inicialmente contiene 300 galones de salmuera (es decir, agua en la que se ha disuelto una cantidad de sal). Otra solución de salmuera entra al tanque con una razón de 3 galones por minuto; la con-

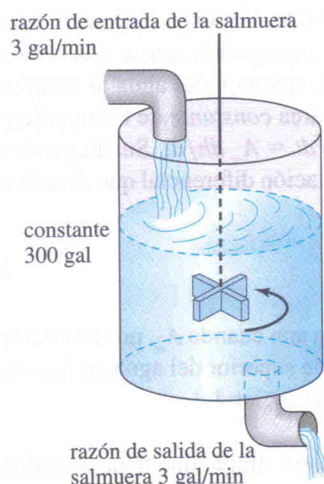


FIGURA 1.3.1 Tanque de mezclado.

centración de sal que entra es 2 libras/galón. Cuando la solución en el tanque está bien mezclada, sale con la misma rapidez con que entra. Véase la figura 1.3.1. Si $A(t)$ denota la cantidad de sal (medida en libras) en el tanque al tiempo t, entonces la razón con la que $A(t)$ cambia es una razón neta:

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} \textit{razón de} \\ \textit{entrada} \\ \textit{de la sal} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \textit{razón de} \\ \textit{salida} \\ \textit{de la sal} \end{pmatrix} = R_{entra} - R_{sale}. \tag{7}$$

La razón de entrada R_{entra} con la que entra la sal en el tanque es el producto de la concentración de entrada de sal por la razón de entrada del fluido. Observe que R_{entra} está medida en libras por minuto:

$$\underbrace{}_{}\quad R_{entra} = \underset{\substack{\text{concentración}\\\text{de sal en}\\\text{el fluido,}}}{(2\ \text{lb/gal})} \cdot \underset{\substack{\text{razón de entrada}\\\text{de la salmuera,}}}{(3\ \text{gal/min})} = \underset{\substack{\text{razón de}\\\text{entrada de la sal}}}{(6\ \text{lb/min})}.$$

Ahora, puesto que la solución sale del tanque con la misma razón con la que entra, el número de galones de la salmuera en el tanque al tiempo t es una constante de 300 galones. Por lo que la concentración de la sal en el tanque así como en el flujo de salida es $c(t) = A(t)/300$ lb/gal, por lo que la razón de salida R_{sale} de sal es

$$R_{sale} = \underset{\substack{\text{concentración de}\\\text{sal en el flujo}\\\text{de salida}}}{\left(\frac{A(t)}{300}\ \text{lb/gal}\right)} \cdot \underset{\substack{\text{razón de salida}\\\text{de la salmuera}}}{(3\ \text{gal/min})} = \underset{\substack{\text{razón de}\\\text{salida}\\\text{de la sal}}}{\frac{A(t)}{100}\ \text{lb/min}}.$$

La razón neta, ecuación (7) entonces será

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100} \quad \text{o} \quad \frac{dA}{dt} + \frac{1}{100}A = 6. \tag{8}$$

Si r_{entra} y r_{sale} denotan las razones generales de entrada y salida de las soluciones de salmuera,* entonces existen tres posibilidades $r_{entra} = r_{sale}$, $r_{entra} > r_{sale}$ y $r_{entra} < r_{sale}$. En el análisis que conduce a la ecuación (8) suponemos que $r_{entra} = r_{sale}$. En los dos últimos casos el número de galones de salmuera está ya sea aumentando ($r_{entra} > r_{sale}$) o disminuyendo ($r_{entra} < r_{sale}$) a la razón neta $r_{entra} - r_{sale}$. Véanse los problemas 10 a 12 en los ejercicios 1.3.

DRENADO DE UN TANQUE En hidrodinámica, la **ley de Torricelli** establece que la rapidez v de salida del agua a través de un agujero de bordes afilados en el fondo de un tanque lleno con agua hasta una profundidad h es igual a la velocidad de un cuerpo (en este caso una gota de agua), que está cayendo libremente desde una altura h — esto es, $v = \sqrt{2gh}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Esta última expresión surge al igualar la energía cinética, $\frac{1}{2}mv^2$ con la energía potencial, mgh, y despejar v. Suponga que un tanque lleno de agua se vacía a través de un agujero, bajo la influencia de la gravedad. Queremos encontrar la profundidad, h, del agua que queda en el tanque al tiempo t. Considere el tanque que se muestra en la figura 1.3.2. Si el área del agujero es A_h, (en pies^2) y la rapidez del agua que sale del tanque es $v = \sqrt{2gh}$ (en pies/s), entonces el volumen de agua que sale del tanque, por segundo, es $A_h\sqrt{2gh}$ (en pies^3/s). Así, si $V(t)$ denota al volumen de agua en el tanque al tiempo t, entonces

$$\frac{dV}{dt} = -A_h\sqrt{2gh}, \tag{9}$$

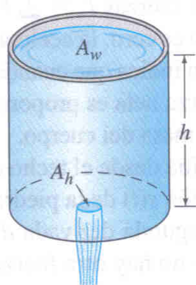
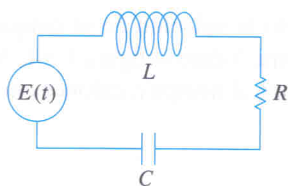


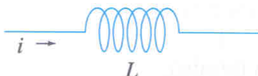
FIGURA 1.3.2 Drenado de un tanque.

*No confunda estos símbolos con R_{entra} y R_{sale}, que son las razones de entrada y salida de *sal*.



a) Circuito en serie- *LRC*

Inductor
inductancia *L*: henrys (h)
caída de voltaje: $L\dfrac{di}{dt}$



Resistor
resistencia *R*: ohms (Ω)
caída de voltaje: *iR*



Capacitor
capacitancia *C*: farads (f)
caída de voltaje: $\dfrac{1}{C}q$



b)

FIGURA 1.3.3 Símbolos, unidades y voltajes. Corriente $i(t)$ y carga $q(t)$ están medidas en amperes (A) y en coulombs (C), respectivamente.

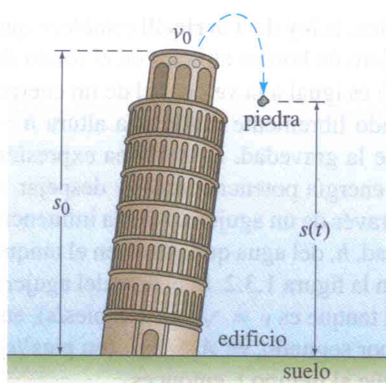


FIGURA 1.3.4 Posición de la piedra medida desde el nivel del suelo.

donde el signo menos indica que V está disminuyendo. Observe que aquí estamos despreciando la posibilidad de fricción en el agujero, que podría causar una reducción de la razón de flujo. Si ahora el tanque es tal que el volumen del agua al tiempo t se expresa como $V(t) = A_w h$, donde A_w (en pies²) es el área *constante* de la superficie superior del agua (véase la figura 1.3.2), entonces $dV/dt = A_w\, dh/dt$. Sustituyendo esta última expresión en la ecuación (9) obtenemos la ecuación diferencial que deseábamos para expresar la altura del agua al tiempo t:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh}. \tag{10}$$

Es interesante observar que la ecuación (10) es válida aun cuando A_w, no sea constante. En este caso, debemos expresar el área de la superficie superior del agua en función de h, esto es, $A_w = A(h)$. Véase el problema 14 de los ejercicios 1.3.

CIRCUITOS EN SERIE Considere el circuito en serie simple que tiene un inductor, un resistor y un capacitor que se muestra en la figura 1.3.3a. En un circuito con el interruptor cerrado, la corriente se denota por $i(t)$ y la carga en el capacitor al tiempo t se denota por $q(t)$. Las letras L, R y C son conocidas como inductancia, resistencia y capacitancia, respectivamente y en general son constantes. Ahora de acuerdo con la segunda ley de Kirchhoff, el voltaje aplicado $E(t)$ a un circuito cerrado debe ser igual a la suma de las caídas de voltaje en el circuito. La figura 1.3.3b muestra los símbolos y fórmulas de las caídas respectivas de voltaje a través de un inductor, un capacitor y un resistor. Como la corriente $i(t)$ está relacionada con la carga $q(t)$ en el capacitor mediante $i = dq/dt$, sumamos los tres voltajes

$$\overset{\text{inductor}}{L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}}, \qquad \overset{\text{resistor}}{iR = R\frac{dq}{dt}}, \qquad \text{y} \qquad \overset{\text{capacitor}}{\frac{1}{C}q}$$

e igualando la suma de los voltajes con el voltaje aplicado se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{11}$$

En la sección 5.1 examinaremos con detalle una ecuación diferencial análoga a (11).

CUERPOS EN CAÍDA Para establecer un modelo matemático del movimiento de un cuerpo que se mueve en un campo de fuerzas, con frecuencia se comienza con la segunda ley de Newton. Recordemos de la física elemental, la **primera ley del movimiento** de Newton establece que un cuerpo permanecerá en reposo o continuará moviéndose con una velocidad constante, a menos que sea sometido a una fuerza externa. En los dos casos, esto equivale a decir que cuando la suma de las fuerzas $F = \sum F_k$, esto es, la fuerza *neta* o fuerza resultante, que actúa sobre el cuerpo es cero, la aceleración a del cuerpo es cero. La **segunda ley del movimiento** de Newton indica que cuando la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo no es cero, entonces la fuerza neta es proporcional a su aceleración a o, más exactamente, $F = ma$, donde m es la masa del cuerpo.

Supongamos ahora que se arroja una piedra hacia arriba desde el techo de un edificio como se muestra en la figura 1.3.4. ¿Cuál es la posición $s(t)$ de la piedra respecto al suelo al tiempo t? La aceleración de la piedra es la segunda derivada d^2s/dt^2. Si suponemos que la dirección hacia arriba es positiva y que no hay otra fuerza, además de la fuerza de la gravedad, que actúe sobre la piedra, entonces utilizando la segunda ley de Newton se tiene que

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -g. \tag{12}$$

En otras palabras, la fuerza neta es simplemente el peso $F = F_1 = -W$ de la piedra cerca de la superficie de la Tierra. Recuerde que la magnitud del peso es $W = mg$, donde m es la

masa del cuerpo y g es la aceleración debida a la gravedad. El signo menos en la ecuación (12) se usa porque el peso de la piedra es una fuerza dirigida hacia abajo, que es opuesta a la dirección positiva. Si la altura del edificio es s_0 y la velocidad inicial de la roca es v_0, entonces s se determina a partir del problema con valores iniciales de segundo orden

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g, \quad s(0) = s_0, \quad s'(0) = v_0. \tag{13}$$

Aunque no hemos indicado soluciones de las ecuaciones que se han formulado, observe que la ecuación 13 se puede resolver integrando dos veces respecto a t la constante $-g$. Las condiciones iniciales determinan las dos constantes de integración. De la física elemental podría reconocer la solución de la ecuación (13) como la fórmula $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$.



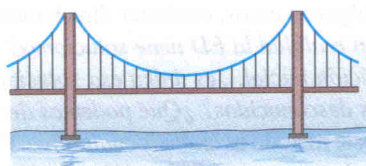
FIGURA 1.3.5 Cuerpo de masa m cayendo.

CUERPOS EN CAÍDA Y RESISTENCIA DEL AIRE Antes del famoso experimento de la torre inclinada de Pisa de Galileo generalmente se creía que los objetos más pesados en caída libre, como una bala de cañón, caían con una aceleración mayor que los objetos ligeros como una pluma. Obviamente, una bala de cañón y una pluma cuando se dejan caer simultáneamente desde la misma altura realmente *caen* en tiempos diferentes, pero esto no es porque una bala de cañón sea más pesada. La diferencia en los tiempos es debida a la resistencia del aire. En el modelo que se presentó en la ecuación (13) se despreció la fuerza de la resistencia del aire. Bajo ciertas circunstancias, un cuerpo que cae de masa m, tal como una pluma con densidad pequeña y forma irregular, encuentra una resistencia del aire que es proporcional a su velocidad instantánea v. Si en este caso, tomamos la dirección positiva dirigida hacia abajo, entonces la fuerza neta que está actuando sobre la masa está dada por $F = F_1 + F_2 = mg - kv$, donde el peso $F_1 = mg$ del cuerpo es una fuerza que actúa en la dirección positiva y la resistencia del aire $F_2 = -kv$ es una fuerza, que se llama de **amortiguamiento viscoso,** que actúa en la dirección contraria o hacia arriba. Véase la figura 1.3.5. Ahora puesto que v está relacionada con la aceleración a mediante $a = dv/dt$, la segunda ley de Newton será $F = ma = m\, dv/dt$. Al igualar la fuerza neta con esta forma de la segunda ley, obtenemos una ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ del cuerpo al tiempo t,

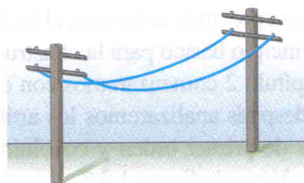
$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv. \tag{14}$$

Aquí k es una constante positiva de proporcionalidad. Si $s(t)$ es la distancia que el cuerpo ha caído al tiempo t desde su punto inicial o de liberación, entonces $v = ds/dt$ y $a = dv/dt = d^2s/dt^2$. En términos de s, la ecuación (14) es una ecuación diferencial de segundo orden.

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\frac{ds}{dt} \quad \text{o} \quad m\frac{d^2s}{dt^2} + k\frac{ds}{dt} = mg. \tag{15}$$



a) cable de suspensión de un puente



b) alambres de teléfonos

FIGURA 1.3.6 Cables suspendidos entre soportes verticales.

CABLES SUSPENDIDOS Suponga un cable flexible, alambre o cuerda pesada que está suspendida entre dos soportes verticales. Ejemplos físicos de esto podría ser uno de los dos cables que soportan el firme de un puente de suspensión como el que se muestra en la figura 1.3.6a o un cable telefónico largo entre dos postes como el que se muestra en la figura 1.3.6b. Nuestro objetivo es construir un modelo matemático que describa la forma que tiene el cable.

Comenzaremos por acordar en examinar sólo una parte o elemento del cable entre su punto más bajo P_1 y cualquier punto arbitrario P_2. Señalado en color azul en la figura 1.3.7, este elemento de cable es la curva en un sistema de coordenada rectangular eligiendo al eje y para que pase a través del punto más bajo P_1 de la curva y eligiendo al eje x para que pase a a unidades debajo de P_1. Sobre el cable actúan tres fuerzas: las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en el cable que son tangentes al cable en P_1 y P_2, respectivamente, y la parte $\mathbf{W}$ de la carga total vertical entre los puntos P_1 y P_2. Sea que $T_1 = |\mathbf{T}_1|$, $T_2 = |\mathbf{T}_2|$, y $W = |\mathbf{W}|$ denoten las magnitudes de estos vectores. Ahora la tensión $\mathbf{T}_2$ se

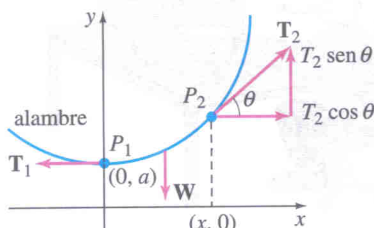


FIGURA 1.3.7 Elemento del cable.

descompone en sus componentes horizontal y vertical (cantidades escalares) $T_2 \cos \theta$ y T_2 sen θ. Debido al equilibrio estático podemos escribir

$$T_1 = T_2 \cos \theta \quad \text{y} \quad W = T_2 \operatorname{sen} \theta.$$

Al dividir la ultima ecuación entre la primera, eliminamos T_2 y obtenemos tan $\theta = W/T_1$. Pero puesto que $dy/dx = \tan \theta$, llegamos a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{T_1}. \tag{16}$$

Esta sencilla ecuación diferencial de primer orden sirve como modelo tanto para modelar la forma de un alambre flexible como el cable telefónico colgado bajo su propio peso, como para modelar la forma de los cables que soportan el firme de un puente suspendido. Regresaremos a la ecuación (16) en los ejercicios 2.2 y la sección 5.3.

CUÁLES SON LOS MÉTODOS En este libro veremos tres diferentes tipos de métodos para el análisis de las ecuaciones diferenciales. Por siglos las ecuaciones diferenciales han ocupado los esfuerzos de científicos o ingenieros para describir algún fenómeno físico o para traducir una ley empírica o experimental en términos matemáticos. En consecuencia el científico, ingeniero o matemático con frecuencia pasaría muchos años de su vida tratando de encontrar las soluciones de una ED. Con una solución en la mano, se prosigue con el estudio de sus propiedades. A esta búsqueda de soluciones se le llama *método analítico* para las ecuaciones diferenciales. Una vez que comprendieron que las soluciones explícitas eran muy difíciles de obtener y en el peor de los casos imposibles de obtener, los matemáticos aprendieron que las ecuaciones diferenciales en sí mismas podrían ser una fuente de información valiosa. Es posible, en algunos casos, contestar directamente de las ecuaciones diferenciales preguntas como *¿en realidad la ED tiene soluciones? Si una solución de la ED existe y satisface una condición inicial, ¿es única esa solución? ¿Cuáles son algunas propiedades de las soluciones desconocidas? ¿Qué podemos decir acerca de la geometría de las curvas de solución?* Este método es *análisis cualitativo*. Por último, si una ecuación diferencial no se puede resolver por métodos analíticos, aún así podemos demostrar que una solución existe; la siguiente pregunta lógica es *¿de qué modo podemos aproximarnos a los valores de una solución desconocida?* Aquí entra al reino del *análisis numérico*. Una respuesta afirmativa a la última pregunta se basa en el hecho de que una ecuación diferencial se puede usar como un principio básico para la construcción de algoritmos de aproximación muy exactos. En el capítulo 2 comenzaremos con consideraciones cualitativas de las EDO de primer orden, después analizaremos los artificios analíticos para resolver algunas ecuaciones especiales de primer orden y concluiremos con una introducción a un método numérico elemental. Véase la figura 1.3.8.

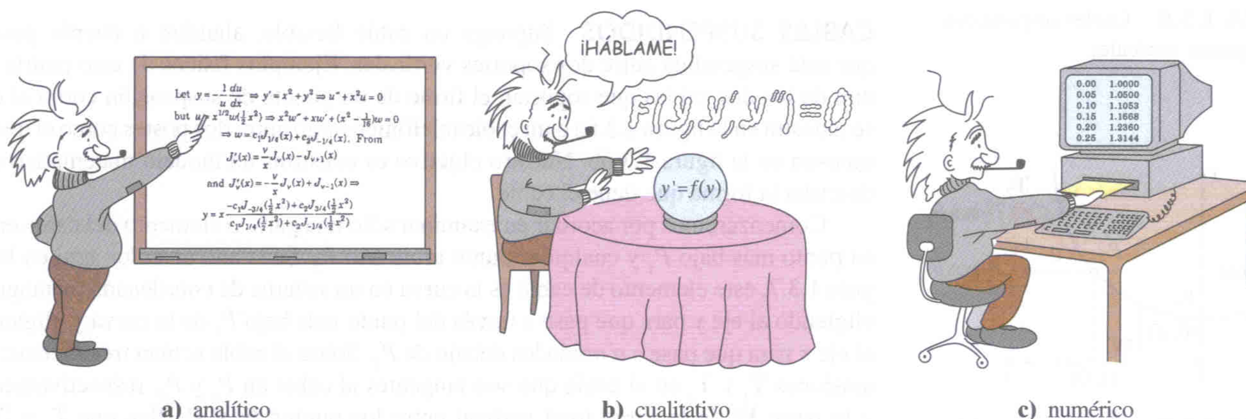


FIGURA 1.3.8 Métodos diferentes para el estudio de ecuaciones diferenciales.

COMENTARIOS

Cada ejemplo de esta sección ha descrito un sistema dinámico, un sistema que cambia o evoluciona con el paso del tiempo t. Puesto que el estudio de los sistemas dinámicos es una rama de las matemáticas de moda en la actualidad, a veces utilizaremos la terminología de esa rama en nuestros análisis.

En términos más precisos, un **sistema dinámico** consiste en un conjunto de variables dependientes del tiempo, que se llaman **variables de estado,** junto con una regla que permita determinar (sin ambigüedades) el estado del sistema (que puede ser pasado, presente o futuro) en términos de un estado prescrito al tiempo t_0. Los sistemas dinámicos se clasifican ya sea como sistemas discretos o continuos en el tiempo, o de tiempos discretos o continuos. En este curso sólo nos ocuparemos de los sistemas dinámicos continuos en el tiempo, sistemas en los que *todas* las variables están definidas dentro de un intervalo continuo de tiempo. La regla o modelo matemático en un sistema dinámico continuo en el tiempo es una ecuación diferencial o sistema de ecuaciones diferenciales. El **estado del sistema** al tiempo t es el valor de las variables de estado en ese instante; el estado especificado del sistema al tiempo t_0 son simplemente las condiciones iniciales que acompañan al modelo matemático. La solución de un problema con valores iniciales se llama **respuesta del sistema**. Por ejemplo, en el caso del decaimiento radiactivo, la regla es $dA/dt = kA$. Ahora, si se conoce la cantidad de sustancia radiactiva al tiempo t_0, digamos $A(t_0) = A_0$, entonces, al resolver la regla se encuentra que la respuesta del sistema para $t \geq t_0$ es $A(t) = A_0 e^{(t-t_0)}$ (véase la sección 3.1). La respuesta $A(t)$ es la única variable de estado para este sistema. En el caso de la piedra arrojada desde el techo de un edificio, la respuesta del sistema, es decir, la solución a la ecuación diferencial $d^2s/dt^2 = -g$, sujeta al estado inicial $s(0) = s_0$, $s'(0) = v_0$, es la función $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$; $0 \leq t \leq T$, donde T representa el valor del tiempo en que la piedra golpea en el suelo. Las variables de estado son $s(t)$ y $s'(t)$, la posición y la velocidad verticales de la piedra, respectivamente. La aceleración, $s''(t)$, *no* es una variable de estado ya que sólo se conocen la posición y la velocidad iniciales al tiempo t_0 para determinar, en forma única, la posición $s(t)$ y la velocidad $s'(t) = v(t)$ de la piedra en cualquier momento del intervalo $t_0 \leq t \leq T$. La aceleración, $s''(t) = a(t)$ está, por supuesto, dada por la ecuación diferencial $s''(t) = -g$, $0 < t < T$.

Un último punto: No todos los sistemas que se estudian en este libro son sistemas dinámicos. Examinaremos algunos sistemas estáticos en que el modelo es una ecuación diferencial.

EJERCICIOS 1.3

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-1.

Dinámica poblacional

1. Con base en las mismas hipótesis detrás del modelo de la ecuación (1), determine una ecuación diferencial para la población $P(t)$ de un país cuando se les permite a las personas inmigrar a un país con una razón constante $r > 0$. ¿Cuál es la ecuación diferencial para la población $P(t)$ del país cuando se les permite a las personas emigrar del país con una razón constante $r > 0$?

2. El modelo de población dado en la ecuación (1) falla al no considerar la tasa de mortalidad; la razón de crecimiento es igual a la tasa de natalidad. En otro modelo del cambio de población de una comunidad se supone que la razón de cambio de la población es una razón *neta,* esto es, la diferencia entre la tasa de natalidad y la de mortalidad en la comunidad. Determine un modelo para la población $P(t)$ si tanto la tasa de natalidad y la mortalidad son proporcionales a la población presente al tiempo t.

3. Utilice el concepto de razón neta introducido en el problema 2 para determinar un modelo para una población $P(t)$ si la tasa de natalidad es proporcional a la población presente al tiempo t, pero la tasa de mortalidad es proporcional al cuadrado de la población presente al tiempo t.

4. Modifique el problema 3 para la razón neta con la que la población $P(t)$ de una cierta clase de pez cambia al suponer que el pez está siendo pescado con una razón constante $h > 0$.

Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton

5. Una taza de café se enfría de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, ecuación (3). Utilice los datos de la gráfica de la temperatura $T(t)$ en la figura 1.3.9 para estimar las constantes T_m, T_0 y k en un modelo de la forma de un problema con valores iniciales de primer orden: $dT/dt = k(T - T_m)$, $T(0) = T_0$.

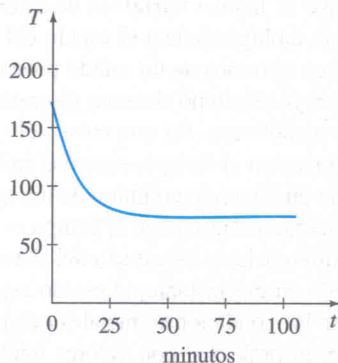


FIGURA 1.3.9 Curva de enfriamiento del problema 5.

6. La temperatura ambiente T_m en la ecuación (3) podría ser una función del tiempo t. Suponga que en un medio ambiente controlado, $T_m(t)$ es periódica con un periodo de 24 horas, como se muestra en la figura 1.3.10. Diseñe un modelo matemático para la temperatura $T(t)$ de un cuerpo dentro de este medio ambiente.

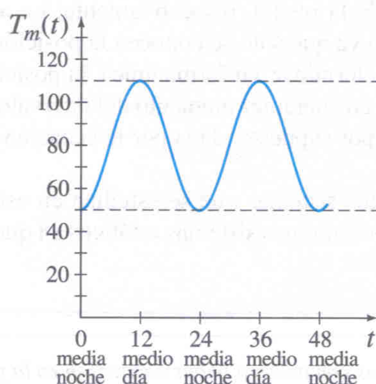


FIGURA 1.3.10 Temperatura ambiente del problema 6.

Propagación de una enfermedad/tecnología

7. Suponga que un alumno es portador del virus de la gripe y regresa al apartado campus de su universidad de 1000 estudiantes. Determine una ecuación diferencial para el número de personas $x(t)$ que contraerán la gripe si la razón con la que la enfermedad se propaga es proporcional al número de interacciones entre el número de estudiantes que tiene gripe y el número de estudiantes que aún no se han expuesto a ella.

8. Al tiempo denotado por $t = 0$, se introduce una innovación tecnológica en una comunidad que tiene una cantidad fija de n personas. Determine una ecuación diferencial para el número de personas $x(t)$ que hayan adoptado la innovación al tiempo t si se supone que la razón con la que se propaga la innovación es conjuntamente proporcional al número de personas que ya la han adoptado y al número de personas que no la han adoptado.

Mezclas

9. Suponga que un tanque grande de mezclado contiene inicialmente 300 galones de agua en los que se disolvieron 50 libras de sal. Entra agua pura a una razón de 3 gal/min y cuando la solución está bien revuelta, sale a la misma razón. Determine una ecuación diferencial que exprese la cantidad $A(t)$ de sal que hay en el tanque al tiempo t. ¿Cuánto vale $A(0)$?

10. Suponga que un tanque grande de mezclado contiene inicialmente 300 galones de agua, en los que se han disuelto 50 libras de sal. Otra salmuera introducida al tanque a una razón de 3 gal/min y cuando la solución está bien mezclada sale a una razón *lenta* de 2 gal/min. Si la concentración de la solución que entra es 2 lb/gal, determine una ecuación diferencial que exprese la cantidad de sal $A(t)$ que hay en el tanque al tiempo t.

11. ¿Cuál es la ecuación diferencial del problema 10, si la solución bien mezclada sale a una razón *más rápida* de 3.5 gal/min?

12. Generalice el modelo dado en la ecuación (8) de la página 23, suponiendo que el gran tanque contiene inicialmente N_0 número de galones de salmuera, r_{entra} y r_{sale} son las razones de entrada y salida de la salmuera, respectivamente (medidas en galones por minuto), c_{entra} es la concentración de sal en el flujo que entra, $c(t)$ es la concentración de sal en el tanque así como en el flujo que sale al tiempo t (medida en libras de sal por galón), y $A(t)$ es la cantidad de sal en el tanque al tiempo t.

Drenado de un tanque

13. Suponga que está saliendo agua de un tanque a través de un agujero circular de área A_h que está en el fondo. Cuando el agua sale a través del agujero, la fricción y la contracción de la corriente cerca del agujero reducen el volumen de agua que sale del tanque por segundo a $cA_h\sqrt{2gh}$, donde c $(0 < c < 1)$ es una constante empírica. Determine una ecuación diferencial para la altura h del agua al tiempo t para el tanque cúbico que se muestra en la figura 1.3.11. El radio del agujero es de 2 pulg, y $g = 32$ pies/s^2.

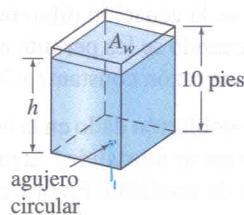


FIGURA 1.3.11 Tanque cúbico del problema 13.

14. Del tanque cónico rectangular recto que se muestra en la figura 1.3.12 sale agua por un agujero circular que está en el fondo. Determine una ecuación diferencial para la altura h del agua al tiempo t. El radio del agujero es 2 pulg, $g = 32$ pies/s², y el factor de fricción/contracción es $c = 0.6$.

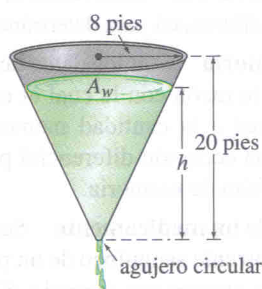


FIGURA 1.3.12 Tanque cónico del problema 14.

Circuitos en serie

15. Un circuito en serie tiene un resistor y un inductor como se muestra en la figura 1.3.13. Determine una ecuación diferencial para la corriente $i(t)$ si la resistencia es R, la inductancia es L y el voltaje aplicado es $E(t)$.

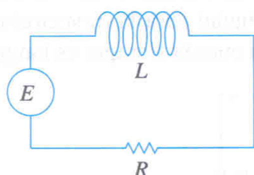


FIGURA 1.3.13 Circuito en serie LR del problema 15.

16. Un circuito en serie contiene un resistor y un capacitor como se muestra en la figura 1.3.14. Determine una ecuación diferencial que exprese la carga $q(t)$ en el capacitor, si la resistencia es R, la capacitancia es C y el voltaje aplicado es $E(t)$.

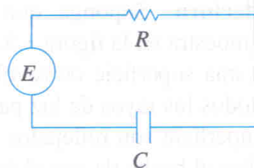


FIGURA 1.3.14 Circuito RC en serie del problema 16.

Caida libre y resistencia del aire

17. Para movimientos de gran rapidez en el aire, como el del paracaidista que se muestra en la figura 1.3.15, que está cayendo antes de que se abra el paracaídas la resistencia del aire es cercana a una potencia de la velocidad instantánea $v(t)$. Determine una ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ de un cuerpo de masa m que cae, si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea.

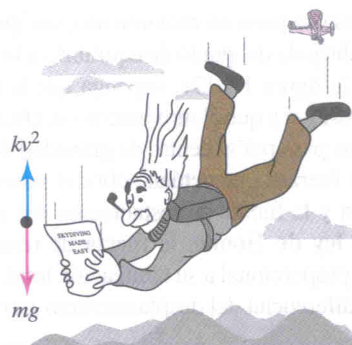


FIGURA 1.3.15 Resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad del problema 17.

Segunda ley de Newton y Principio de Arquímedes

18. Un barril cilíndrico de s pies de diámetro y w lb de peso, está flotando en agua como se muestra en la figura 1.3.16a. Después de un hundimiento inicial el barril presenta un movimiento oscilatorio, hacia arriba y hacia abajo, a lo largo de la vertical. Utilizando la figura 1.3.16b, defina una ecuación diferencial para establecer el desplazamiento vertical $y(t)$, si se supone que el origen está en el eje vertical y en la superficie del agua cuando el barril está en reposo. Use el **Principio de Arquímedes**: la fuerza de flotación o hacia arriba que ejerce el agua sobre el barril es igual al peso del agua desplazada. Suponga que la dirección hacia abajo es positiva, que la densidad de masa del agua es 62.4 lb/pies³ y que no hay resistencia entre el barril y el agua.

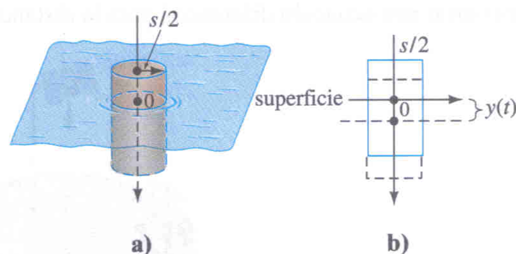


FIGURA 1.3.16 Movimiento oscilatorio del barril flotando del problema 18.

Segunda ley de Newton y ley de Hooke

19. Después de que se fija una masa m a un resorte, éste se estira s unidades y cuelga en reposo en la posición de equilibrio como se muestra en la figura 1.3.17b. Después el sistema

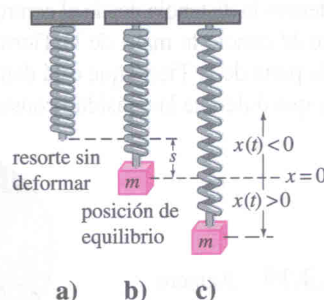


FIGURA 1.3.17 Sistema resorte/masa del problema 19.

resorte/masa se pone en movimiento, sea que $x(t)$ denote la distancia dirigida del punto de equilibrio a la masa. Como se indica en la figura 1.3.17c, suponga que la dirección hacia abajo es positiva y que el movimiento se efectúa en una recta vertical que pasa por el centro de gravedad de la masa y que las únicas fuerzas que actúan sobre el sistema son el peso de la masa y la fuerza de restauración del resorte estirado. Utilice la **ley de Hooke**: la fuerza de restauración de un resorte es proporcional a su elongación total. Determine una ecuación diferencial del desplazamiento $x(t)$ al tiempo t.

20. En el problema 19, ¿cuál es la ecuación diferencial para el desplazamiento $x(t)$ si el movimiento tiene lugar en un medio que ejerce una fuerza de amortiguamiento sobre el sistema resorte/masa que es proporcional a la velocidad instantánea de la masa y actúa en dirección contraria al movimiento?

Segunda ley de Newton y la ley de la gravitación universal

21. De acuerdo con la ley de la gravitación universal de Newton, la aceleración de caída libre a de un cuerpo, tal como el satélite que se muestra en la figura 1.3.18, que está cayendo desde una gran distancia hacia la superficie no es la constante g. Más bien, la aceleración a es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro de la Tierra $a = k/r^2$ donde k es la constante de proporcionalidad. Utilice el hecho de que en la superficie de la Tierra, $r = R$ y $a = g$, para determinar k. Si la dirección positiva se considera hacia arriba, utilice la segunda ley de Newton y la ley de la gravitación universal para encontrar una ecuación diferencial para la distancia r.

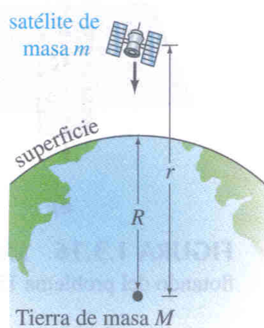


FIGURA 1.3.18 Satélite del problema 21.

22. Suponga que se hace un agujero que pasa por el centro de la Tierra y que por él se deja caer una bola de masa m como se muestra en la figura 1.3.19. Construya un modelo matemático que describa el posible movimiento de la bola. Al tiempo t sea que r denote la distancia desde el centro de la Tierra a la masa m, que M denote la masa de la Tierra, que M_r denote la masa de la parte de la Tierra que está dentro de una esfera de radio r, y que δ denote la densidad constante de la Tierra.

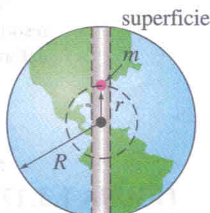


FIGURA 1.3.19 Agujero que pasa a través de la Tierra del problema 22.

Modelos matemáticos adicionales

23. Teoría del aprendizaje En la teoría del aprendizaje, se supone que la rapidez con que se memoriza algo es proporcional a la cantidad que queda por memorizar. Suponga que M denota la cantidad total de un tema que se debe memorizar y que $A(t)$ es la cantidad memorizada al tiempo t. Determine una ecuación diferencial para determinar la cantidad $A(t)$.

24. Falta de memoria Con los datos del problema anterior suponga que la razón con la cual el material es *olvidado* es proporcional a la cantidad memorizada al tiempo t. Determine una ecuación diferencial para $A(t)$, cuando se considera la falta de memoria.

25. Suministro de un medicamento Se inyecta un medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente a una razón constante de r gramos por segundo. Simultáneamente, se elimina el medicamento a una razón proporcional a la cantidad $x(t)$ presente al tiempo t. Determine una ecuación diferencial que describa la cantidad $x(t)$.

26. Tractriz Una persona P que parte del origen se mueve en la dirección positiva del eje x, jalando un peso a lo largo de la curva C, llamada **tractriz**, como se muestra en la figura 1.3.20. Inicialmente el peso se encontraba en el eje y, en $(0, s)$ y es jalado con una cuerda de longitud constante s, que se mantiene tensa durante el movimiento. Determine una ecuación diferencial para la trayectoria C de movimiento. Suponga que la cuerda siempre es tangente a C.

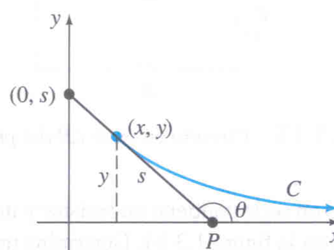


FIGURA 1.3.20 Curva tractriz del problema 26.

27. Superficie reflectora Suponga que cuando la curva plana C que se muestra en la figura 1.3.21 se gira respecto al eje x genera una superficie de revolución, con la propiedad de que todos los rayos de luz paralelos al eje x que inciden en la superficie son reflejados a un solo punto O (el origen). Utilice el hecho de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión para determinar una ecua-

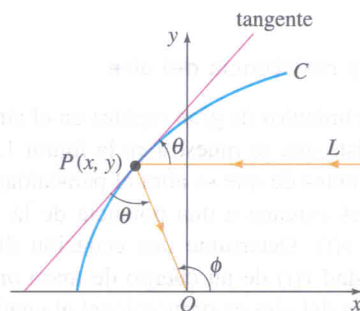


FIGURA 1.3.21 Superficie reflectora del problema 27.

ción diferencial que describa la forma de la curva C. Esta curva C es importante en aplicaciones como construcción de telescopios o antenas de satélites, faros delanteros de automóviles y colectores solares. [*Sugerencia*: La inspección de la figura muestra que podemos escribir $\phi = 2\theta$. ¿Por qué? Ahora utilice una identidad trigonométrica adecuada.]

Problemas de análisis

28. Repita el problema 41 de los ejercicios 1.1 y después proporcione una solución explicíta $P(t)$ para la ecuación (1). Determine una familia uniparamétrica de soluciones de (1).

29. Lea nuevamente la oración que se encuentra a continuación de la ecuación (3) y suponga que T_m es una constante positiva. Analice por qué se podría esperar que $k < 0$ en ambos casos de enfriamiento y de calentamiento. Podría empezar por interpretar, digamos, $T(t) > T_m$ en una forma gráfica.

30. Lea nuevamente el análisis que condujo a la ecuación (8). Si suponemos que inicialmente el tanque conserva, digamos 50 libras de sal, es porque se le está agregando sal continuamente al tanque para $t > 0$, $A(t)$ será una función creciente. Analice cómo podría determinar a partir de la ED, sin realmente resolverla, el número de libras de sal en el tanque después de un periodo largo.

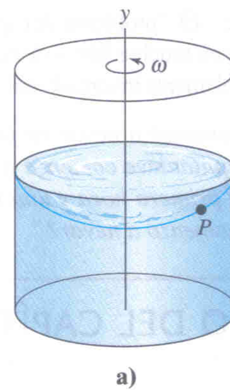
31. Modelo de población La ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = (k \cos t)P$, donde k es una constante positiva, modela la población humana, $P(t)$, de cierta comunidad. Analice e interprete la solución de esta ecuación. En otras palabras, ¿qué tipo de población piensa que describe esta ecuación diferencial?

32. Fluido girando Como se muestra en la figura 1.3.22 un cilindro circular recto parcialmente lleno con un fluido está girando con una velocidad angular constante ω respecto al eje vertical que pasa por su centro. El fluido girando forma una superficie de revolución S. Para identificar S, primero establecemos un sistema coordenado que consiste en un plano vertical determinado por el eje y y el eje x dibujado en forma perpendicular al eje y de tal forma que el punto de intersección de los ejes (el origen) está localizado en el punto inferior de la superficie S. Entonces buscamos una función $y = f(x)$ que represente la curva C de intersección de la superficie S y del plano coordenado vertical. Sea que el punto $P(x, y)$ denote la posición de una partícula del fluido girando, de masa m, en el plano coordenado. Véase la figura 1.3.22b.

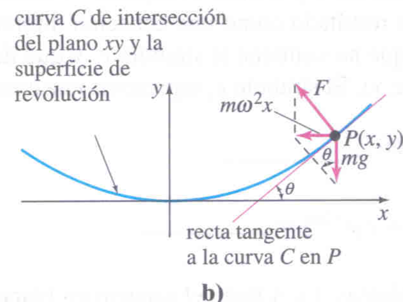
a) En P hay una fuerza de reacción de magnitud F debida a las otras partículas del fluido que es perpendicular a la superficie S. Usando la segunda ley de Newton la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre la partícula es $m\omega^2 x$. ¿Cuál es esta fuerza? Utilice la figura 1.3.22b para analizar la naturaleza y el origen de las ecuaciones

$$F \cos \theta = mg, \qquad F \operatorname{sen} \theta = m\omega^2 x$$

b) Use el inciso a) para encontrar una ecuación diferencial que defina la función $y = f(x)$.



a)



b)

FIGURA 1.3.22 Fluido girando del problema 32.

33. Cuerpo en caída En el problema 21 suponga que $r = R + s$ donde s es la distancia desde la superficie de la Tierra al cuerpo que cae. ¿Cómo es la ecuación diferencial que se obtuvo en el problema 21 cuando s es muy pequeña en comparación con R? [*Sugerencia*: Considere la serie binomial para

$$(R + s)^{-2} = R^{-2}(1 + s/R)^{-2}.]$$

34. Gotas de lluvia cayendo En meteorología el término *virga* se refiere a las gotas de lluvia que caen o a partículas de hielo que se evaporan antes de llegar al suelo. Suponga que en algún tiempo, que se puede denotar por $t = 0$, las gotas de lluvia de radio r_0 caen desde el reposo de una nube y se comienzan a evaporar.

a) Si se supone que una gota se evapora de tal manera que su forma permanece esférica, entonces también tiene sentido suponer que la razón a la cual se evapora la gota de lluvia, esto es, la razón con la cual ésta pierde masa, es proporcional a su área superficial. Muestre que esta última suposición implica que la razón con la que el radio r de la gota de lluvia disminuye es una constante. Encuentre $r(t)$. [*Sugerencia*: Véase el problema 51 en los ejercicios 1.1.]

b) Si la dirección positiva es hacia abajo, construya un modelo matemático para la velocidad v de la gota de lluvia que cae al tiempo t. Desprecie la resistencia del aire. [*Sugerencia*: Cuando la masa m de un cuerpo está cambiando con el tiempo, la segunda ley de Newton es $F = \frac{d}{dt}(mv)$, donde F es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo y mv es su cantidad de movimiento.]

35. Deja que nieve El "problema del quitanieves" es un clásico que aparece en muchos libros de ecuaciones diferenciales y que fue probablemente inventado por Ralph Palmer Agnew.

"Un día comenzó a nevar en forma intensa y constante. Un quitanieve comenzó a medio día, y avanzó 2 millas la primera hora y una milla la segunda. ¿A qué hora comenzó a nevar?"

Se encuentra en el libro *Differential Equations*, de Ralph Palmer Agnew, McGraw-Hill Book Co., búsquelo y después analice la construcción y solución del modelo matemático.

36. Lea nuevamente esta sección y clasifique cada modelo matemático como lineal o no lineal.

REPASO DEL CAPÍTULO 1

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-1.

En los problemas 1 y 2 llene el espacio en blanco y después escriba este resultado como una ecuación diferencial de primer orden que no contiene al símbolo c_1 y que tiene la forma $dy/dx = f(x, y)$. El símbolo c_1 representa una constante.

1. $\dfrac{d}{dx} c_1 e^{10x} =$ ________

2. $\dfrac{d}{dx}(5 + c_1 e^{-2x}) =$ ________

En los problemas 3 y 4 llene el espacio en blanco y después escriba este resultado como una ecuación diferencial lineal de segundo orden que no contiene a las constantes c_1 y c_2 y que tiene la forma $F(y, y'') = 0$. Los símbolos c_1, c_2 y k representan las constantes.

3. $\dfrac{d^2}{dx^2}(c_1 \cos kx + c_2 \operatorname{sen} kx) =$ ________

4. $\dfrac{d^2}{dx^2}(c_1 \cosh kx + c_2 \operatorname{senh} kx) =$ ________

En los problemas 5 y 6 calcule y' y y'' y después combine estas derivadas con y como una ecuación diferencial lineal de segundo orden que no contiene los símbolos c_1 y c_2 y que tiene la forma $F(y, y', y'') = 0$. Estos símbolos c_1 y c_2 representan constantes.

5. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$ **6.** $y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \operatorname{sen} x$

En los problemas 7 a 12 relacione cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales con una o más de estas soluciones.

a) $y = 0$, **b)** $y = 2$, **c)** $y = 2x$, **d)** $y = 2x^2$.

7. $xy' = 2y$ **8.** $y' = 2$

9. $y' = 2y - 4$ **10.** $xy' = y$

11. $y'' + 9y = 18$ **12.** $xy'' - y' = 0$

En los problemas 13 y 14 determine por inspección al menos una solución de la ecuación diferencial dada.

13. $y'' = y'$ **14.** $y' = y(y - 3)$

En los problemas 15 y 16 interprete cada enunciado como una ecuación diferencial.

15. En la gráfica de $y = \phi(x)$ la pendiente de la recta tangente en el punto $P(x, y)$ es el cuadrado de la distancia de $P(x, y)$ al origen.

16. En la gráfica de $y = \phi(x)$ la razón con la que la pendiente cambia respecto a x en un punto $P(x, y)$ es el negativo de la pendiente de la recta tangente en $P(x, y)$.

17. a) Dé el dominio de la función $y = x^{2/3}$.

b) Dé el intervalo I de definición más largo en el cual $y = x^{2/3}$ es solución de la ecuación diferencial $3xy' - 2y = 0$.

18. a) Compruebe que la familia uniparamétrica $y^2 - 2y = x^2 - x + c$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $(2y - 2)y' = 2x - 1$.

b) Encuentre un miembro de la familia uniparamétrica en el inciso a) que satisfaga la condición inicial $y(0) = 1$.

c) Utilice su resultado del inciso b) para determinar una *función* explícita $y = \phi(x)$ que satisfaga $y(0) = 1$. Dé el dominio de la función ϕ. ¿Es $y = \phi(x)$ una *solución* del problema con valores iniciales? Si es así, dé su intervalo I de definición; si no, explique por qué.

19. Dado que $y = x - 2/x$ es una solución de la ED $xy' + y = 2x$. Determine x_0 y el intervalo I más largo para el cual $y(x)$ es una solución del PVI de primer orden $xy' + y = 2x$, $y(x_0) = 1$.

20. Suponga que $y(x)$ denota una solución del PVI de primer orden $y' = x^2 + y^2$, $y(1) = -1$ y que $y(x)$ tiene al menos una segunda derivada en $x = 1$. En alguna vecindad de $x = 1$ utilice la ED para determinar si $y(x)$ está creciendo o decreciendo y si la gráfica $y(x)$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

21. Una ecuación diferencial puede tener más de una familia de soluciones.

a) Dibuje diferentes miembros de las familias $y = \phi_1(x) = x^2 + c_1$ y $y = \phi_2(x) = -x^2 + c_2$.

b) Compruebe que $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación diferencial no lineal de primer orden $(y')^2 = 4x^2$.

c) Construya una función definida en tramos que sea una solución de la ED no lineal del inciso b) pero que no es miembro de la familia de soluciones del inciso a).

22. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una solución de $y' = 6\sqrt{y} + 5x^3$ que pasa por $(-1, 4)$?

En los problemas 23 a 26 verifique que la función indicada es una solución particular de la ecuación diferencial dada. Dé un intervalo I de definición para cada solución.

23. $y'' + y = 2\cos x - 2\operatorname{sen} x$; $\quad y = x\operatorname{sen} x + x\cos x$

24. $y'' + y = \sec x$; $\quad y = x\operatorname{sen} x + (\cos x)\ln(\cos x)$

25. $x^2y'' + xy' + y = 0$; $\quad y = \operatorname{sen}(\ln x)$

26. $x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x)$;
$y = \cos(\ln x)\ln(\cos(\ln x)) + (\ln x)\operatorname{sen}(\ln x)$

En los problemas 27 a 30, $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - 2x$ es una familia de soluciones de dos parámetros de la ED de segundo orden $y'' - 2y' - 3y = 6x + 4$. Determine una solución del PVI de segundo orden que consiste en esta ecuación diferencial y en las condiciones iniciales dadas.

27. $y(0) = 0, y'(0) = 0$ **28.** $y(0) = 1, y'(0) = -3$

29. $y(1) = 4, y'(1) = -2$ **30.** $y(-1) = 0, y'(-1) = 1$

31. En la figura 1.R.1, se presenta la gráfica de una solución de un problema con valores iniciales de segundo orden $d^2y/dx^2 = f(x, y, y')$, $y(2) = y_0$; $y'(2) = y_1$. Utilice la gráfica para estimar los valores de y_0 y y_1.

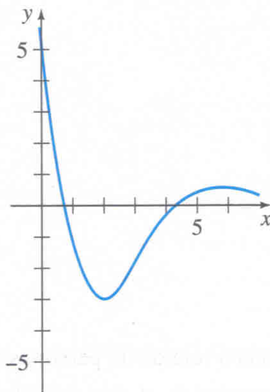


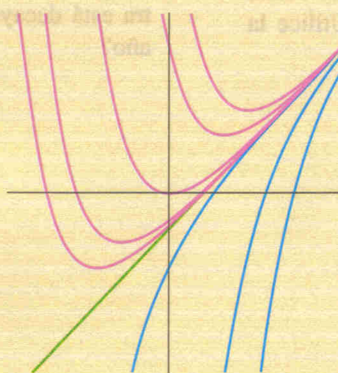
FIGURA 1.R.1 Gráfica para el problema 31.

32. Un tanque que tiene la forma de cilindro circular recto, de 2 pies de radio y 10 pies de altura, está parado sobre su base. Inicialmente, el tanque está lleno de agua y ésta sale por un agujero circular de $\frac{1}{2}$ pulg de radio en el fondo. Determine una ecuación diferencial para la altura h del agua al tiempo t. Desprecie la fricción y contracción del agua en el agujero.

33. El número de ratones de campo en una pastura está dado por la función $200 - 10t$, donde el tiempo t se mide en años. Determine una ecuación diferencial que gobierne una población de búhos que se alimentan de ratones si la razón a la que la población de búhos crece es proporcional a la diferencia entre el número de búhos al tiempo t y el número de ratones al mismo tiempo t.

34. Suponga que $dA/dt = -0.0004332\ A(t)$ representa un modelo matemático para el decaimiento radiactivo del radio-226, donde $A(t)$ es la cantidad de radio (medida en gramos) que queda al tiempo t (medido en años). ¿Cuánto de la muestra de radio queda al tiempo t cuando la muestra está decayendo con una razón de 0.002 gramos por año?

2 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN



La historia de las matemáticas tiene muchos relatos de personas que han dedicado gran parte de su vida a la solución de ecuaciones, al principio de ecuaciones algebraicas y después de ecuaciones diferenciales. En las secciones 2.2 a 2.5 estudiaremos algunos de los métodos analíticos más importantes para resolver ED de primer orden. Sin embargo, antes de que empecemos a resolverlas, debemos considerar dos hechos: es posible que una ecuación diferencial no tenga soluciones y que una ecuación diferencial tenga una solución que con los métodos existentes actuales no se puede determinar. En las secciones 2.1 y 2.6 no resolveremos ninguna ED pero mostraremos cómo obtener información directamente de la misma ecuación. En la sección 2.1 podemos ver cómo, a partir de la ED, obtenemos información cualitativa de la misma respecto a sus gráficas, lo que nos permite interpretar los dibujos de las curvas solución. En la sección 2.6 usamos ecuaciones diferenciales para construir un procedimiento numérico para soluciones aproximadas.

2.1 CURVAS SOLUCIÓN SIN UNA SOLUCIÓN

REPASO DE MATERIAL

- La primera derivada como pendiente de una recta tangente.
- El signo algebraico de la primera derivada indica crecimiento o decrecimiento.

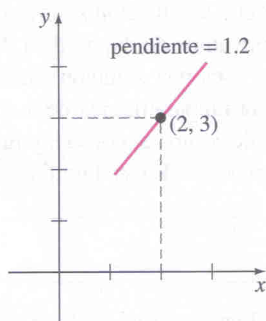
INTRODUCCIÓN Imaginemos por un momento que nos enfrentamos con una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x, y)$, y que además no podemos encontrar ni inventar un método para resolverla analíticamente. Esto no es tan malo como se podría pensar, ya que la ecuación diferencial en sí misma a veces puede "decirnos" concretamente cómo se "comportan" sus soluciones.

Iniciaremos nuestro estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden con dos formas cualitativas de analizar una ED. Estas dos formas nos permiten determinar, de una manera aproximada, cómo es una curva solución sin resolver realmente la ecuación.

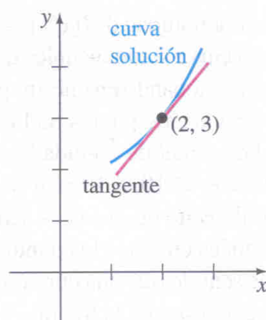
2.1.1 CAMPOS DIRECCIONALES

ALGUNAS PREGUNTAS FUNDAMENTALES En la sección 1.2 vimos que si $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ satisfacen algunas condiciones de continuidad, se pueden responder preguntas cualitativas acerca de la existencia y unicidad de las soluciones. En esta sección veremos otras preguntas cualitativas acerca de las propiedades de las soluciones. ¿Cómo se comporta una solución cerca de un punto dado? ¿Cómo se comporta una solución cuando $x \to \infty$? Con frecuencia, estas preguntas se pueden responder cuando la función f depende sólo de la variable y. Sin embargo, comenzaremos con un simple concepto de cálculo:

Una derivada dy/dx de una función derivable $y = y(x)$ da las pendientes de las rectas tangentes en puntos de su gráfica.



a) elemento lineal en un punto.



b) el elemento lineal es tangente a la curva solución que pasa por el punto.

FIGURA 2.1.1 El elemento lineal es tangente a la curva solución en (2, 3).

PENDIENTE Debido a que una solución $y = y(x)$ de una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

es necesariamente una función derivable en su intervalo I de definición, debe también ser continua en I. Por tanto la curva solución correspondiente en I no tiene cortes y debe tener una recta tangente en cada punto $(x, y(x))$. La función f en la forma normal (1) se llama **función pendiente** o **función razón**. La pendiente de la recta tangente en $(x, y(x))$ en una curva solución es el valor de la primera derivada dy/dx en este punto y sabemos de la ecuación (1) que es el valor de la función pendiente $f(x, y(x))$. Ahora supongamos que (x, y) representa cualquier punto de una región del plano xy en la que está definida la función f. El valor $f(x, y)$ que la función f le asigna al punto representa la pendiente de una recta o que la visualizaremos como un segmento de recta llamado **elemento lineal**. Por ejemplo, considere la ecuación $dy/dx = 0.2xy$, donde $f(x, y) = 0.2xy$. En el punto (2, 3) la pendiente de un elemento lineal es $f(2, 3) = 0.2(2)(3) = 1.2$. La figura 2.1.1a muestra un segmento de recta con pendiente 1.2 que pasa por (2, 3). Como se muestra en la figura 2.1.1b, *si* una curva solución también pasa por el punto (2, 3), lo hace de tal forma que el segmento de recta es tangente a la curva; en otras palabras, el elemento lineal es una recta tangente miniatura en ese punto.

CAMPO DIRECCIONAL Si evaluamos sistemáticamente a f en una malla rectangular de puntos en el plano xy y se dibuja un elemento lineal en cada punto (x, y) de la malla con pendiente $f(x, y)$, entonces al conjunto de todos estos elementos lineales se le llama **campo direccional** o **campo de pendientes** de la ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$. Visualmente, la dirección del campo indica el aspecto o forma de una familia de curvas solución de la ecuación diferencial dada y, en consecuencia, se pueden ver a simple vista aspectos cualitativos de la solución, por ejemplo, regiones en el plano

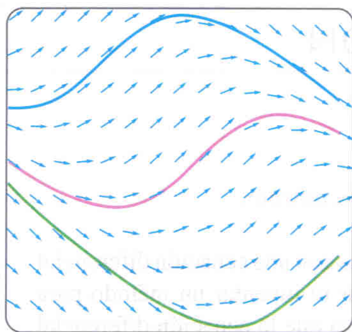
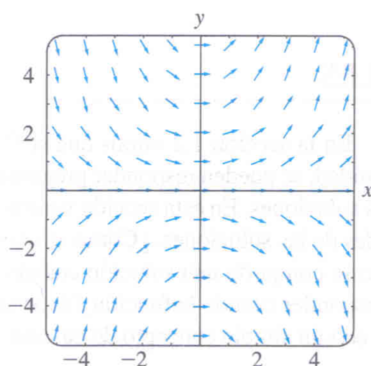


FIGURA 2.1.2 Las curvas solución siguen el flujo de un campo direccional.

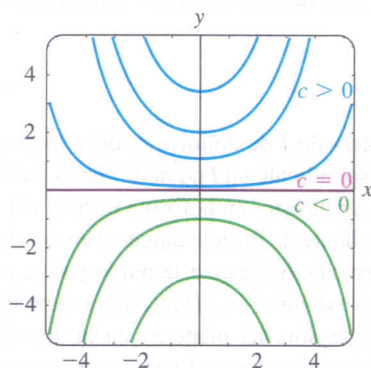
en las que una solución presenta un comportamiento poco común. Una sola curva solución que pasa por un campo direccional debe seguir el patrón de flujo del campo: el elemento lineal es tangente a la curva cuando intercepta un punto de la malla. La figura 2.1.2 muestra un campo direccional generado por computadora de la ecuación diferencial $dy/dx = \text{sen}(x + y)$ en una región del plano xy. Observe cómo las tres curvas solución que se muestran a colores siguen el flujo del campo.

EJEMPLO 1 Campo direccional

El campo direccional para la ecuación diferencial $dy/dx = 0.2xy$ que se muestra en la figura 2.1.3a se obtuvo usando un paquete computacional en el que se definió una malla 5×5 (mh, nh) con m y n enteros, haciendo $-5 \leq m \leq 5$, $-5 \leq n \leq 5$, y $h = 1$. Observe en la figura 2.1.3a que en cualquier punto del eje de las x $(y = 0)$ y del eje y $(x = 0)$, las pendientes son $f(x, 0) = 0$ y $f(0, y) = 0$, respectivamente, por lo que los elementos lineales son horizontales. Además observe que en el primer cuadrante para un valor fijo de x los valores de $f(x, y) = 0.2xy$ aumentan conforme crece y; análogamente, para una y los valores de $f(x, y) = 0.2xy$ aumentan conforme x aumenta. Esto significa que conforme x y y crecen, los elementos lineales serán casi verticales y tendrán pendiente positiva ($f(x, y) = 0.2xy > 0$ para $x > 0$, $y > 0$). En el segundo cuadrante, $|f(x, y)|$ aumenta conforme crecen $|x|$ y y crecen, por lo que nuevamente los elementos lineales serán casi verticales pero esta vez tendrán pendiente negativa ($f(x, y) = 0.2xy < 0$ para $x < 0$, $y > 0$). Leyendo de izquierda a derecha, imaginemos una curva solución que inicia en un punto del segundo cuadrante, se mueve abruptamente hacia abajo, se hace plana conforme pasa por el eje y y después, conforme entra al primer cuadrante, se mueve abruptamente hacia arriba; en otras palabras, su forma sería cóncava hacia arriba y similar a una herradura. A partir de esto se podría inferir que $y \to \infty$ conforme $x \to \pm\infty$. Ahora en el tercer y el cuarto cuadrantes, puesto que $f(x, y) = 0.2xy > 0$ y $f(x, y) = 0.2xy < 0$, respectivamente, la situación se invierte: una curva solución crece y después decrece conforme nos movamos de izquierda a derecha. Vimos en la ecuación (1) de la sección 1.1 que $y = e^{0.1x^2}$ es una solución explícita de $dy/dx = 0.2xy$; usted debería comprobar que una familia uniparamétrica de soluciones de la misma ecuación está dada por: $y = ce^{0.1x^2}$. Con objeto de comparar con la figura 2.1.3a, en la figura 2.1.3b se muestran algunos miembros representativos de esta familia. ■



a) Campo direccional para $dy/dx = 0.2xy$.



b) Algunas curvas solución en la familia $y = ce^{0.1x^2}$.

FIGURA 2.1.3 Campo direccional y curvas solución.

EJEMPLO 2 Campo direccional

Utilice un campo direccional para dibujar una curva solución aproximada para el problema con valores iniciales $dy/dx = \text{sen}\, y$, $y(0) = -\frac{3}{2}$.

SOLUCIÓN Antes de proceder, recuerde que a partir de la continuidad de $f(x, y) = \text{sen}\, y$ y $\partial f/\partial y = \cos y$ el teorema 1.2.1 garantiza la existencia de una curva solución única que pase por un punto dado (x_0, y_0) en el plano. Ahora nuevamente seleccionando en nuestro paquete computacional la opción para una región rectangular 5×5 y dando puntos (debidos a la condición inicial) en la región con separación vertical y horizontal de $\frac{1}{2}$ unidad, es decir, en puntos (mh, nh), $h = \frac{1}{2}$, m y n enteros tales como $-10 \leq m \leq 10$, $-10 \leq n \leq 10$. En la figura 2.1.4 se presenta el resultado. Puesto que el lado derecho de $dy/dx = \text{sen}\, y$ es 0 en $y = 0$, y en $y = -\pi$, los elementos lineales son horizontales en todos los puntos cuyas segundas coordenadas son $y = 0$ o $y = -\pi$. Entonces tiene sentido que una curva solución que pasa por el punto inicial $(0, -\frac{3}{2})$, tenga la forma que se muestra en la figura. ■

CRECIMIENTO/DECRECIMIENTO La interpretación de la derivada dy/dx como una función que da la pendiente juega el papel principal en la construcción de un campo direccional. A continuación se usará otra contundente propiedad de la primera derivada, es decir, si $dy/dx > 0$ (o $dy/dx < 0$) para toda x en un intervalo I, entonces una función derivable $y = y(x)$ es creciente (o decreciente) en I.

2.1 CURVAS SOLUCIÓN SIN UNA SOLUCIÓN

REPASO DE MATERIAL

- La primera derivada como pendiente de una recta tangente.
- El signo algebraico de la primera derivada indica crecimiento o decrecimiento.

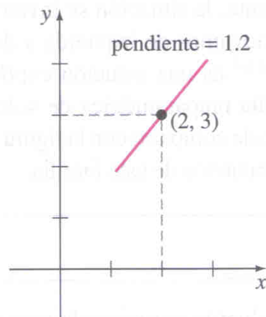
INTRODUCCIÓN Imaginemos por un momento que nos enfrentamos con una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x, y)$, y que además no podemos encontrar ni inventar un método para resolverla analíticamente. Esto no es tan malo como se podría pensar, ya que la ecuación diferencial en sí misma a veces puede "decirnos" concretamente cómo se "comportan" sus soluciones.

Iniciaremos nuestro estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden con dos formas cualitativas de analizar una ED. Estas dos formas nos permiten determinar, de una manera aproximada, cómo es una curva solución sin resolver realmente la ecuación.

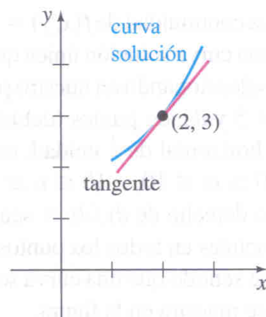
2.1.1 CAMPOS DIRECCIONALES

ALGUNAS PREGUNTAS FUNDAMENTALES En la sección 1.2 vimos que si $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ satisfacen algunas condiciones de continuidad, se pueden responder preguntas cualitativas acerca de la existencia y unicidad de las soluciones. En esta sección veremos otras preguntas cualitativas acerca de las propiedades de las soluciones. ¿Cómo se comporta una solución cerca de un punto dado? ¿Cómo se comporta una solución cuando $x \to \infty$? Con frecuencia, estas preguntas se pueden responder cuando la función f depende sólo de la variable y. Sin embargo, comenzaremos con un simple concepto de cálculo:

Una derivada dy/dx de una función derivable $y = y(x)$ da las pendientes de las rectas tangentes en puntos de su gráfica.



a) elemento lineal en un punto.



b) el elemento lineal es tangente a la curva solución que pasa por el punto.

FIGURA 2.1.1 El elemento lineal es tangente a la curva solución en (2, 3).

PENDIENTE Debido a que una solución $y = y(x)$ de una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

es necesariamente una función derivable en su intervalo I de definición, debe también ser continua en I. Por tanto la curva solución correspondiente en I no tiene cortes y debe tener una recta tangente en cada punto $(x, y(x))$. La función f en la forma normal (1) se llama **función pendiente** o **función razón**. La pendiente de la recta tangente en $(x, y(x))$ en una curva solución es el valor de la primera derivada dy/dx en este punto y sabemos de la ecuación (1) que es el valor de la función pendiente $f(x, y(x))$. Ahora supongamos que (x, y) representa cualquier punto de una región del plano xy en la que está definida la función f. El valor $f(x, y)$ que la función f le asigna al punto representa la pendiente de una recta o que la visualizaremos como un segmento de recta llamado **elemento lineal**. Por ejemplo, considere la ecuación $dy/dx = 0.2xy$, donde $f(x, y) = 0.2xy$. En el punto (2, 3) la pendiente de un elemento lineal es $f(2, 3) = 0.2(2)(3) = 1.2$. La figura 2.1.1a muestra un segmento de recta con pendiente 1.2 que pasa por (2, 3). Como se muestra en la figura 2.1.1b, *si* una curva solución también pasa por el punto (2, 3), lo hace de tal forma que el segmento de recta es tangente a la curva; en otras palabras, el elemento lineal es una recta tangente miniatura en ese punto.

CAMPO DIRECCIONAL Si evaluamos sistemáticamente a f en una malla rectangular de puntos en el plano xy y se dibuja un elemento lineal en cada punto (x, y) de la malla con pendiente $f(x, y)$, entonces al conjunto de todos estos elementos lineales se le llama **campo direccional** o **campo de pendientes** de la ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$. Visualmente, la dirección del campo indica el aspecto o forma de una familia de curvas solución de la ecuación diferencial dada y, en consecuencia, se pueden ver a simple vista aspectos cualitativos de la solución, por ejemplo, regiones en el plano

Como ya lo hemos mencionado, podemos decir cuándo una solución no constante $y = y(x)$ de la ecuación (2) está creciendo o decreciendo determinando el signo algebraico de la derivada dy/dx; en el caso de la ecuación (2) hacemos esto identificando los intervalos del eje y en los que la función $f(y)$ es positiva o negativa.

EJEMPLO 3 Una ED autónoma

La ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP),$$

donde a y b son constantes positivas, tiene la forma normal $dP/dt = f(P)$, la de la ecuación (2) con t y P jugando los papeles de x y y respectivamente y por tanto es autónoma. De $f(P) = P(a - bP) = 0$ vemos que 0 y a/b son puntos críticos de la ecuación, así que las soluciones de equilibrio son $P(t) = 0$ y $P(t) = a/b$. Poniendo los puntos críticos en una recta vertical, dividimos esta recta en tres intervalos definidos por $-\infty < P < 0$, $0 < P < a/b$, $a/b < P < \infty$. Las flechas en la recta que se presenta en la figura 2.1.5 indican el signo algebraico de $f(P) = P(a - bP)$ en estos intervalos y si una solución constante $P(t)$ está creciendo o decreciendo en un intervalo. La tabla siguiente explica la figura:

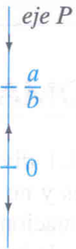


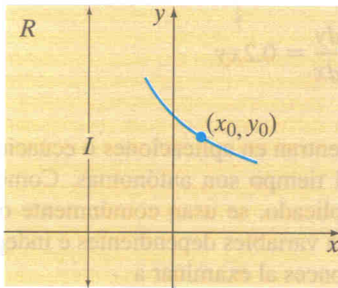
FIGURA 2.1.5 Esquema de fase de $dP/dt = P(a - bP)$.

Intervalo	Signo de $f(P)$	$P(t)$	Flecha
$(-\infty, 0)$	menos	decreciente	apunta hacia abajo
$(0, a/b)$	más	creciente	apunta hacia arriba
$(a/b, \infty)$	menos	decreciente	apunta hacia abajo

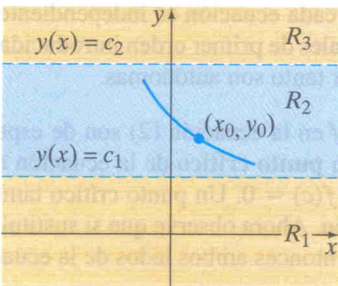
■

La figura 2.1.5 se llama un **esquema de fase unidimensional**, o simplemente **esquema de fase**, de la ecuación diferencial $dP/dt = P(a - bP)$. La recta vertical se llama **recta de fase**.

CURVAS SOLUCIÓN Sin resolver una ecuación diferencial autónoma, normalmente podemos decir gran cantidad de detalles respecto a su curva solución. Puesto que la función f en la ecuación (2) es independiente de la variable x, podemos suponer que f está definida para $-\infty < x < \infty$ o para $0 \leq x < \infty$. También, puesto que f y su derivada f' son funciones continuas de y en algún intervalo I del eje y, los resultados principales del teorema 1.2.1 valen en alguna franja o región R en el plano xy correspondiente a I, y así pasa por algún punto (x_0, y_0) en R por el que pasa una curva solución de la ecuación (2). Véase la figura 2.1.6a. Para realizar nuestro análisis, supongamos que la ecuación (2) tiene exactamente dos puntos críticos c_1 y c_2 y que $c_1 < c_2$. Las gráficas de las soluciones $y(x) = c_1$ y $y(x) = c_2$ son rectas horizontales y estas rectas dividen la región R en tres subregiones R_1, R_2 y R_3, como se muestra en la figura 2.1.6b. Aquí se presentan sin prueba alguna de nuestras conclusiones respecto a una solución no constante $y(x)$ de la ecuación (2):



a) región R.



b) subregiones R_1, R_2, y R_3 de R.

FIGURA 2.1.6 Las rectas $y(x) = c_1$ y $y(x) = c_2$ dividen a R en tres subregiones horizontales.

- Si (x_0, y_0) es una subregión R_i, $i = 1, 2, 3$, y $y(x)$ es una solución cuya gráfica pasa a través de este punto, entonces $y(x)$ permanece en la subregión R_i para toda x. Como se muestra en la figura 2.1.6b, la solución $y(x)$ en R_2 está acotada por debajo con c_1 y por arriba con c_2, es decir, $c_1 < y(x) < c_2$ para toda x. La curva solución está dentro de R_2 para toda x porque la gráfica de una solución no constante de la ecuación (2) no puede cruzar la gráfica de cualquier solución de equilibrio $y(x) = c_1$ o $y(x) = c_2$. Véase el problema 33 de los ejercicios 2.1.
- Por continuidad de f debe ser $f(y) > 0$ o $f(y) < 0$ para toda x en una subregión R_i, $i = 1, 2, 3$. En otras palabras, $f(y)$ no puede cambiar de signo en una subregión. Véase el problema 33 de los ejercicios 2.1.

- Puesto que $dy/dx = f(y(x))$ es ya sea positiva o negativa en una subregión R_i, $i = 1, 2, 3$, una solución $y(x)$ es estrictamente monótona, es decir, $y(x)$ está creciendo o decreciendo en la subregión R_i. Por tanto $y(x)$ no puede oscilar, ni puede tener un extremo relativo (máximo o mínimo). Véase el problema 33 de los ejercicios 2.1.
- Si $y(x)$ está *acotada por arriba* con un punto crítico c_1 (como en la subregión R_1 donde $y(x) < c_1$ para toda x), entonces la gráfica de $y(x)$ debe tender a la gráfica de la solución de equilibrio $y(x) = c_1$ conforme $x \to \infty$ o $x \to -\infty$. Si $y(x)$ está *acotada*, es decir, acotada por arriba y por debajo por dos puntos críticos consecutivos (como en la subregión R_2 donde $c_1 < y(x) < c_2$ para toda x), entonces la gráfica de $y(x)$ debe tender a las gráficas de las soluciones de equilibrio $y(x) = c_1$ y $y(x) = c_2$, conforme $x \to \infty$ en una y $x \to -\infty$ en la otra. Si $y(x)$ está *acotada por debajo* por un punto crítico (como en la subregión R_3 donde $c_2 < y(x)$ para toda x), entonces la gráfica de $y(x)$ debe tender a la gráfica de la solución de equilibrio $y(x) = c_2$ conforme ya sea $x \to \infty$ o $x \to -\infty$. Véase el problema 34 de los ejercicios 2.1.

Considerando estos hechos, analicemos la ecuación diferencial del ejemplo 3.

EJEMPLO 4 Volver a tratar el ejemplo

Los tres intervalos determinados en el eje P o recta de fase con los puntos críticos $P = 0$ y $P = a/b$ ahora corresponden en el plano tP a tres subregiones definidas por:

$$R_1: -\infty < P < 0, \qquad R_2: 0 < P < a/b, \qquad \text{y} \qquad R_3: a/b < P < \infty,$$

donde $-\infty < t < \infty$. El esquema de fase de la figura 2.1.7 nos dice que $P(t)$ está decreciendo en R_1, creciendo en R_2 y decreciendo en R_3. Si $P(0) = P_0$ es un valor inicial, entonces en R_1, R_2 y R_3 tenemos, respectivamente, que:

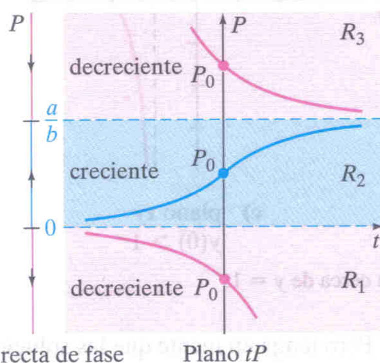


FIGURA 2.1.7 Esquema de fase y curvas solución en cada una de las tres subregiones.

i) Para $P_0 < 0$, $P(t)$ está acotada por arriba. Puesto que $P(t)$ está decreciendo sin límite conforme aumenta t, y así $P(t) \to 0$ conforme $t \to -\infty$. Lo que significa que en el eje t negativo, la gráfica de la solución de equilibrio $P(t) = 0$, es una asíntota horizontal para una curva solución.

ii) Para $0 < P_0 < a/b$, $P(t)$ está acotada. Puesto que $P(t)$ está creciendo, $P(t) \to a/b$ conforme $t \to \infty$ y $P(t) \to 0$ conforme $t \to -\infty$. Las gráficas de las dos soluciones de equilibrio, $P(t) = 0$ y $P(t) = a/b$, son rectas horizontales que son asíntotas horizontales para cualquier curva solución que comienza en esta subregión.

iii) Para $P_0 > a/b$, $P(t)$ está acotada por debajo. Puesto que $P(t)$ está decreciendo, $P(t) \to a/b$ conforme $t \to \infty$. La gráfica de la solución de equilibrio $P(t) = a/b$ es una asíntota horizontal para una curva solución.

En la figura 2.1.7 la recta de fase es el eje P en el plano tP. Por claridad la recta de fase original de la figura 2.1.5 se ha reproducido a la izquierda del plano en el cual se han sombreado las regiones R_1, R_2 y R_3. En la figura se muestran las gráficas de las soluciones de equilibrio $P(t) = a/b$ y $P(t) = 0$ (el eje t) como las rectas punteadas azules; las gráficas sólidas representan las gráficas típicas de $P(t)$ mostrando los tres casos que acabamos de analizar. ■

En una subregión tal como R_1 en el ejemplo 4, donde $P(t)$ está decreciendo y no está acotada por debajo, no se debe tener necesariamente que $P(t) \to -\infty$. *No* interprete que este último enunciado significa que $P(t) \to -\infty$ conforme $t \to \infty$; podríamos tener que $P(t) \to -\infty$ conforme $t \to T$, donde $T > 0$ es un número finito que depende de la condición inicial $P(t_0) = P_0$. Considerando términos dinámicos, $P(t)$ "explota" en un tiempo finito; considerando la gráfica, $P(t)$ podría tener una asíntota vertical en $t = T > 0$. Para la subregión R_3 vale una observación similar.

La ecuación diferencial $dy/dx = \operatorname{sen} y$ en el ejemplo 2 es autónoma y tiene un número infinito de puntos críticos, ya que $\operatorname{sen} y = 0$ en $y = n\pi$, con n entero. Además, sabe-

mos que debido a que la solución $y(x)$ pasa por $(0, -\frac{3}{2})$ está acotada por arriba y por debajo por dos puntos críticos consecutivos $(-\pi < y(x) < 0)$ y decrece (sen $y < 0$ para $-\pi < y < 0$), la gráfica de $y(x)$ debe tender a las gráficas de las soluciones de equilibrio como asíntotas horizontales: $y(x) \to -\pi$ conforme $x \to \infty$ y $y(x) \to 0$ conforme $x \to -\infty$.

EJEMPLO 5 Curvas solución de una ED autónoma

La ecuación autónoma $dy/dx = (y - 1)^2$ tiene un solo punto crítico 1. Del esquema de fase de la figura 2.1.8a concluimos que una solución $y(x)$ es una función creciente en las subregiones definidas por $-\infty < y < 1$ y $1 < y < \infty$, donde $-\infty < x < \infty$. Para una condición inicial $y(0) = y_0 < 1$, una solución $y(x)$ está creciendo y está acotada por arriba por 1 y así $y(x) \to 1$ conforme $x \to \infty$; para $y(0) = y_0 > 1$, una solución $y(x)$ está creciendo y está acotada.

Ahora $y(x) = 1 - 1/(x + c)$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial (vea el problema 4 de los ejercicios 2.2). Una condición inicial dada determina un valor para c. Para las condiciones iníciales, $y(0) = -1 < 1$ y $y(0) = 2 > 1$, encontramos, respectivamente, que $y(x) = 1 - 1/(x + \frac{1}{2})$, $y(x) = 1 - 1/(x - 1)$. Como se muestra en las figuras 2.1.8b y 2.1.8c, la gráfica de cada una de estas

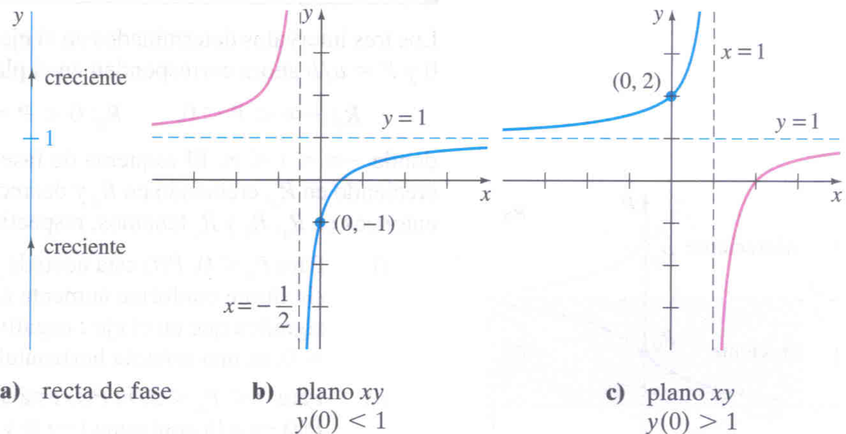


FIGURA 2.1.8 Comportamiento de las soluciones cerca de $y = 1$.

funciones racionales tienen una asíntota vertical. Pero tenga en mente que las soluciones de los problemas con valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = (y - 1)^2, \quad y(0) = -1 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = (y - 1)^2, \quad y(0) = 2.$$

están definidas en intervalos especiales. Éstos son, respectivamente,

$$y(x) = 1 - \frac{1}{x + \frac{1}{2}}, \quad -\tfrac{1}{2} < x < \infty \qquad \text{y} \qquad y(x) = 1 - \frac{1}{x - 1}, \; -\infty < x < 1.$$

Las curvas solución son las partes de las gráficas de las figuras 2.1.8b y 2.1.8c que se muestran en azul. Como lo indica el esquema de fase, para la curva solución de la figura 2.1.8b, $y(x) \to 1$ conforme $x \to \infty$ para la curva solución de la figura 2.1.8c, $y(x) \to \infty$ conforme $x \to 1$ por la izquierda. ■

ATRACTORES Y REPULSORES Suponga que $y(x)$ es una solución no constante de la ecuación diferencial autónoma dada en (1) y que c es un punto crítico de la ED. Básicamente hay tres tipos de comportamiento que $y(x)$ puede presentar cerca de c. En la figura 2.1.9 hemos puesto a c en las cuatro rectas verticales. Cuando ambas puntas de flecha en cualquier lado del punto c *apuntan hacia* c, como se muestra en la figura 2.1.9a, todas las soluciones $y(x)$ de la ecuación (1) que comienzan en el punto inicial (x_0, y_0) suficientemente cerca de c presentan comportamiento asintótico $\lim_{x\to\infty} y(x) = c$.

FIGURA 2.1.9 El punto crítico c es un atractor en a) y un repulsor en b) y semiestable en c) y d).

Por esta razón se dice que el punto crítico c es **asintóticamente estable**. Utilizando una analogía física, una solución que comienza en c se parece a una partícula cargada que, con el tiempo, se transforma en una partícula de carga contraria y así c también se conoce como un **atractor**. Cuando ambas puntas de flecha a los lados de la flecha del punto c apuntan *alejándose* de c, como se muestra en la figura 2.1.9b, todas las soluciones $y(x)$ de la ecuación (1) que comienzan en un punto inicial (x_0, y_0) se alejan de c conforme crece x. En este caso se dice que el punto crítico c es **inestable**. Un punto crítico inestable se conoce como un **repulsor**, por razones obvias. En las figuras 2.1.9c y 2.1.9d se muestra el punto crítico c que no es ni un atractor ni un repulsor. Pero puesto que c presenta características tanto de atractor como de repulsor, es decir, una solución que comienza desde un punto inicial (x_0, y_0) que está suficientemente cerca de c es atraída hacia c por un lado y repelida por el otro, este punto crítico se conoce como **semiestable**. En el ejemplo 3 el punto crítico a/b es asintóticamente estable (un atractor) y el punto crítico 0 es inestable (un repulsor). El punto crítico 1 del ejemplo 5 es semiestable.

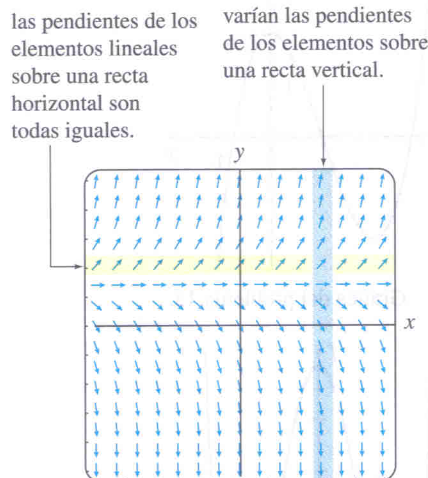


FIGURA 2.1.10 Campo direccional para una ED autónoma.

ED AUTÓNOMAS Y CAMPOS DIRECCIONALES Si una ecuación diferencial de primer orden es autónoma, entonces vemos del miembro derecho de su forma normal $dy/dx = f(y)$ que las pendientes de los elementos lineales que pasan por los puntos en la malla rectangular que se usa para construir un campo direccional para la ED que sólo depende de la coordenada y de los puntos. Expresado de otra manera, los elementos lineales que pasan por puntos de cualquier recta *horizontal* deben tener todos la misma pendiente; por supuesto, pendientes de elementos lineales a lo largo de cualquier recta *vertical*, variarán. Estos hechos se muestran examinando la banda horizontal amarilla y la banda vertical azul de la figura 2.1.10. La figura presenta un campo direccional para la ecuación autónoma $dy/dx = 2y - 2$. Recordando estos hechos, examine nuevamente la figura 2.1.4.

EJERCICIOS 2.1

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-1.

2.1.1 CAMPOS DIRECCIONALES

En los problemas 1 a 4 reproduzca el campo direccional dado generado por computadora. Después dibuje a mano, una curva solución aproximada que pase por cada uno de los puntos indicados. Utilice lápices de colores diferentes para cada curva solución.

1. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y^2$

a) $y(-2) = 1$ **b)** $y(3) = 0$

c) $y(0) = 2$ **d)** $y(0) = 0$

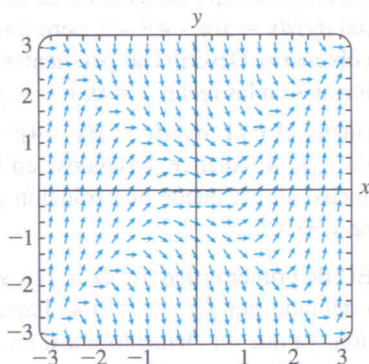


FIGURA 2.1.11 Campo direccional del problema 1.

2. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-0.01xy^2}$

a) $y(-6) = 0$ **b)** $y(0) = 1$

c) $y(0) = -4$ **d)** $y(8) = -4$

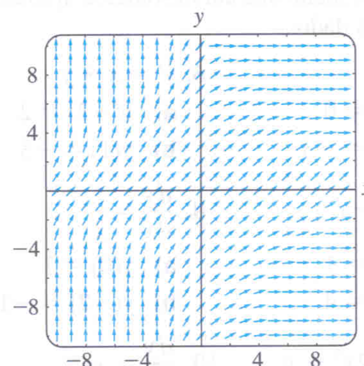


FIGURA 2.1.12 Campo direccional del problema 2.

3. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - xy$

a) $y(0) = 0$ **b)** $y(-1) = 0$

c) $y(2) = 2$ **d)** $y(0) = -4$

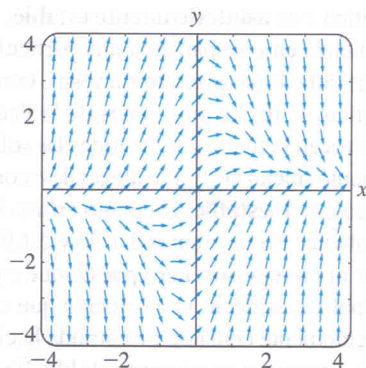


FIGURA 2.1.13 Campo direccional del problema 3.

4. $\frac{dy}{dx} = (\text{sen } x) \cos y$

a) $y(0) = 1$ b) $y(1) = 0$

c) $y(3) = 3$ d) $y(0) = -\frac{5}{2}$

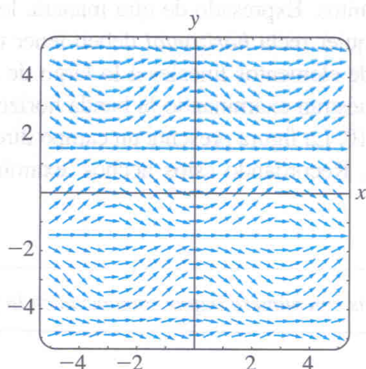


FIGURA 2.1.14 Campo direccional del problema 4.

En los problemas 5 a 12 use un paquete computacional para obtener un campo direccional para la ecuación diferencial dada. Dibuje a mano una curva solución aproximada que pase por los puntos dados.

5. $y' = x$

a) $y(0) = 0$

b) $y(0) = -3$

6. $y' = x + y$

a) $y(-2) = 2$

b) $y(1) = -3$

7. $y\frac{dy}{dx} = -x$

a) $y(1) = 1$

b) $y(0) = 4$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$

a) $y(0) = 1$

b) $y(-2) = -1$

9. $\frac{dy}{dx} = 0.2x^2 + y$

a) $y(0) = \frac{1}{2}$

b) $y(2) = -1$

10. $\frac{dy}{dx} = xe^y$

a) $y(0) = -2$

b) $y(1) = 2.5$

11. $y' = y - \cos\frac{\pi}{2}x$

a) $y(2) = 2$

b) $y(-1) = 0$

12. $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}$

a) $y\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$

b) $y\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

En los problemas 13 y 14 la figura dada representa la gráfica de $f(y)$ y de $f(x)$, respectivamente. Dibuje a mano un campo direccional sobre una malla adecuada para $dy/dx = f(y)$ (problema 13) y después para $dy/dx = f(x)$ (problema 14).

13.

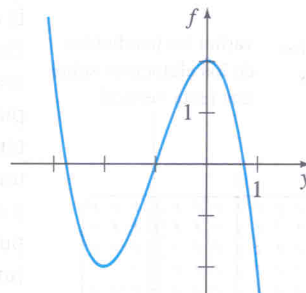


FIGURA 2.1.15 Gráfica del problema 13.

14.

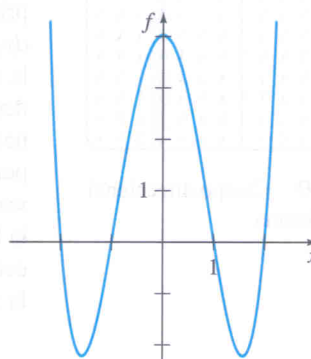


FIGURA 2.1.16 Gráfica del problema 14.

15. En los incisos a) y b) dibuje **isoclinas** $f(x, y) = c$ (vea los *Comentarios* de la página 37) para la ecuación diferencial dada usando los valores de c indicados. Construya un campo direccional sobre una malla dibujando con cuidado elementos lineales con la pendiente adecuada en los puntos elegidos de cada isoclina. En cada caso, utilice esta dirección para dibujar una curva solución aproximada para el PVI que consiste en la ED y en la condición inicial $y(0) = 1$.

a) $dy/dx = x + y$; c un entero que satisface $-5 \le c \le 5$

b) $dy/dx = x^2 + y^2$; $c = \frac{1}{4}$, $c = 1$, $c = \frac{9}{4}$, $c = 4$

Problemas para analizar

16. a) Considere el campo direccional de la ecuación diferencial $dy/dx = x(y - 4)^2 - 2$, pero no use tecnología para obtenerlo. Describa las pendientes de los elementos lineales en las rectas $x = 0$, $y = 3$, $y = 4$ y $y = 5$.

b) Considere el PVI $dy/dx = x(y - 4)^2 - 2$, $y(0) = y_0$, donde $y_0 < 4$. Analice, basándose en la información del inciso a), ¿sí puede una solución $y(x) \to \infty$ conforme $x \to \infty$?

17. Para la ED de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ una curva en el plano definido por $f(x, y) = 0$ se llama **ceroclina** de la ecuación, ya que un elemento lineal en un punto de la curva tiene pendiente cero. Use un paquete computacional para obtener un campo direccional en una malla rectangu-

lar de puntos $dy/dx = x^2 - 2y$ y después superponga la gráfica de la ceroclina $y = \frac{1}{2}x^2$ sobre el campo direccional. Analice el campo direccional. Analice el comportamiento de las curvas solución en regiones del plano definidas por $y < \frac{1}{2}x^2$ y por $y > \frac{1}{2}x^2$. Dibuje algunas curvas solución aproximadas. Trate de generalizar sus observaciones.

18. **a)** Identifique las ceroclinas (vea el problema 17) en los problemas 1, 3 y 4. Con un lápiz de color, circule todos los elementos lineales de las figuras 2.1.11, 2.1.13 y 2.1.14, que usted crea que pueden ser un elemento lineal en un punto de la ceroclina.

b) ¿Qué son las ceroclinas de una ED autónoma de primer orden?

2.1.2 ED DE PRIMER ORDEN AUTÓNOMAS

19. Considere la ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = y - y^3$ y la condición inicial $y(0) = y_0$. A mano, dibuje la gráfica de una solución típica $y(x)$ cuando y_0 tiene los valores dados.

a) $y_0 > 1$ **b)** $0 < y_0 < 1$

c) $-1 < y_0 < 0$ **d)** $y_0 < -1$

20. Considere la ecuación diferencial autónoma de primer orden $dy/dx = y^2 - y^4$ y la condición inicial $y(0) = y_0$. A mano, dibuje la gráfica de una solución típica $y(x)$ cuando y_0 tiene los valores dados.

a) $y_0 > 1$ **b)** $0 < y_0 < 1$

c) $-1 < y_0 < 0$ **d)** $y_0 < -1$

En los problemas 21 a 28 determine los puntos críticos y el esquema de fase de la ecuación diferencial autónoma de primer orden dada. Clasifique cada punto crítico como asintóticamente estable, inestable o semiestable. Dibuje a mano curvas solución típicas en las regiones del plano xy determinadas por las gráficas de las soluciones de equilibrio.

21. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 3y$ **22.** $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y^3$

23. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 2)^4$ **24.** $\dfrac{dy}{dx} = 10 + 3y - y^2$

25. $\dfrac{dy}{dx} = y^2(4 - y^2)$ **26.** $\dfrac{dy}{dx} = y(2 - y)(4 - y)$

27. $\dfrac{dy}{dx} = y \ln(y + 2)$ **28.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ye^y - 9y}{e^y}$

En los problemas 29 y 30 considere la ecuación diferencial autónoma $dy/dx = f(y)$, donde se presenta la gráfica de f. Utilice la gráfica para ubicar los puntos críticos de cada una de las ecuaciones diferenciales. Dibuje un esquema de fase de cada ecuación diferencial. Dibuje a mano curvas solución típicas en las subregiones del plano xy determinadas por las gráficas de las soluciones de equilibrio.

29.

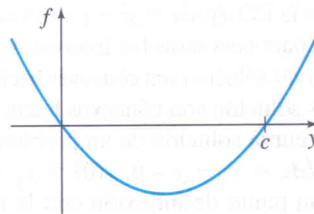


FIGURA 2.1.17 Gráfica del problema 29.

30.

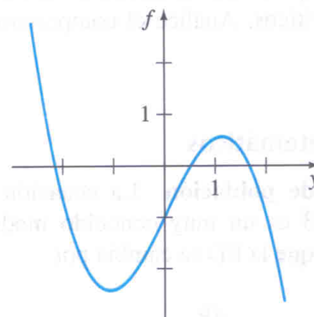


FIGURA 2.1.18 Gráfica del problema 30.

Problemas para analizar

31. Considere la ED autónoma $dy/dx = (2/\pi)y - \operatorname{sen} y$. Determine los puntos críticos de la ecuación. Proponga un procedimiento para obtener un esquema de fase de la ecuación. Clasifique los puntos críticos como asintóticamente estable, inestable o semiestable.

32. Un punto crítico c de una ED de primer orden autónoma se dice que está **aislada** si existe algún intervalo abierto que contenga a c pero no otro punto crítico. ¿Puede existir una ED autónoma de la forma dada en la ecuación (1) para la cual *todo* punto crítico no esté aislado? Analice: no considere ideas complicadas.

33. Suponga que $y(x)$ es una solución no constante de la ecuación diferencial autónoma $dy/dx = f(y)$ y que c es un punto crítico de la ED. Analice. ¿Por qué no puede la gráfica de $y(x)$ cruzar la gráfica de la solución de equilibrio $y = c$? ¿Por qué no puede $f(y)$ cambiar de signo en una de las regiones analizadas de la página 38? ¿Por qué no puede $y(x)$ oscilar o tener un extremo relativo (máximo o mínimo)?

34. Suponga que $y(x)$ es una solución de la ecuación autónoma $dy/dx = f(y)$ y está acotada por arriba y por debajo por dos puntos críticos consecutivos $c_1 < c_2$, como una subregión R_2 de la figura 2.1.6b. Si $f(y) > 0$ en la región, entonces $\lim_{x\to\infty} y(x) = c_2$. Analice por qué no puede existir un número $L < c_2$ tal que $\lim_{x\to\infty} y(x) = L$. Como parte de su análisis, considere qué pasa con $y'(x)$ conforme $x \to \infty$.

35. Utilizando la ecuación autónoma (1), analice cómo se puede obtener información respecto a la ubicación de puntos de inflexión de una curva solución.

36. Considere la ED $dy/dx = y^2 - y - 6$. Use sus ideas del problema 35 para encontrar los intervalos en el eje y para los que las curvas solución son cóncavas hacia arriba y en los que las curvas solución son cóncavas hacia abajo. Analice por qué *cada* curva solución de un problema con valores iniciales $dy/dx = y^2 - y - 6$, $y(0) = y_0$, donde $-2 < y_0 < 3$, tiene un punto de inflexión con la misma coordenada y. ¿Cuál es la coordenada y? Con cuidado dibuje la curva solución para la que $y(0) = -1$. Repita para $y(2) = 2$.

37. Suponga que la ED autónoma en la ecuación (1) no tiene puntos críticos. Analice el comportamiento de las soluciones.

Modelos matemáticos

38. **Modelo de población** La ecuación diferencial en el ejemplo 3 es un muy conocido modelo de población. Suponga que la ED se cambia por

$$\frac{dP}{dt} = P(aP - b),$$

donde a y b son constantes positivas. Analice qué le pasa a la población P conforme pasa el tiempo.

39. **Modelo de población** Otro modelo de población está dado por

$$\frac{dP}{dt} = kP - h,$$

donde h y k son constantes positivas. ¿Para qué valor inicial $P(0) = P_0$ este modelo predice que la población desaparecerá?

40. **Velocidad terminal** En la sección 1.3 vimos que la ecuación diferencial autónoma

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

donde k es una constante positiva y g es la aceleración de la gravedad, es un modelo para la velocidad v de un cuerpo de masa m que está cayendo bajo la influencia de la gravedad. Debido a que el término $-kv$ representa la resistencia del aire, la velocidad de un cuerpo que cae de una gran altura no aumenta sin límite conforme pasa el tiempo t. Utilice un esquema de fase de la ecuación diferencial para encontrar la velocidad límite o terminal del cuerpo. Explique su razonamiento.

41. Suponga que el modelo del problema 40 se modifica de tal manera que la resistencia del aire es proporcional a v^2, es decir

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$

Vea el problema 17 de los ejercicios 1.3. Utilice un esquema de fase para determinar la velocidad terminal del cuerpo. Explique su razonamiento.

42. **Reacciones químicas** Cuando se combinan ciertas clases de reacciones químicas, la razón con la que se forman los nuevos componentes se modela por la ecuación diferencial autónoma

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X),$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad y $\beta > \alpha > 0$. Aquí $X(t)$ denota el número de gramos del nuevo componente al tiempo t.

a) Utilice un esquema de fase de la ecuación diferencial para predecir el comportamiento de $X(t)$ conforme $t \to \infty$.

b) Considere el caso en que $\alpha = \beta$. Utilice un esquema de fase de la ecuación diferencial para predecir el comportamiento de $X(t)$ conforme $t \to \infty$ cuando $X(0) < \alpha$. Cuando $X(0) > \alpha$.

c) Compruebe que una solución explícita de la ED en el caso en que $k = 1$ y $\alpha = \beta$ es $X(t) = \alpha - 1/(t + c)$. Determine una solución que satisfaga que $X(0) = \alpha/2$. Después determine una solución que satisfaga que $X(0) = 2\alpha$. Trace la gráfica de estas dos soluciones. ¿El comportamiento de las soluciones conforme $t \to \infty$ concuerdan con sus respuestas del inciso b)?

2.2 VARIABLES SEPARABLES

REPASO DE MATERIAL

- Fórmulas básicas de integración (véase al final del libro).
- Técnicas de integración: integración por partes y por descomposición en fracciones parciales.

INTRODUCCIÓN Comenzaremos nuestro estudio de cómo resolver las ecuaciones diferenciales con las más simple de todas las ecuaciones diferenciales: ecuaciones diferenciales de primer orden con variables separables. Debido a que el método que se presenta en esta sección y que muchas de las técnicas para la solución de ecuaciones diferenciales implican integración, consulte su libro de cálculo para recordar las fórmulas importantes (como $\int du/u$) y las técnicas (como la integración por partes).

SOLUCIÓN POR INTEGRACIÓN Considere la ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x, y)$. Cuando f no depende de la variable y, es decir, $f(x, y) = g(x)$, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{1}$$

se puede resolver por integración. Si $g(x)$ es una función continua, al integrar ambos lados de la ecuación (1) se obtiene $y = \int g(x)\,dx = G(x) + c$, donde $G(x)$ es una antiderivada (integral indefinida) de $g(x)$. Por ejemplo, si $dy/dx = 1 + e^{2x}$, entonces su solución es $y = \int(1 + e^{2x})\,dx$ o $y = x + \frac{1}{2}e^{2x} + c$.

UNA DEFINICIÓN La ecuación (l) así como su método de solución, no son más que un caso especial en el que f, en la forma normal $dy/dx = f(x, y)$ se puede factorizar como el producto de una función de x por una función de y.

DEFINICIÓN 2.2.1 Ecuación separable

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

Se dice que es **separable** o que tiene **variables separables.**

Por ejemplo, las ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} = y^2xe^{3x+4y} \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = y + \operatorname{sen} x$$

son respectivamente, separable y no separable. En la primera ecuación podemos factorizar $f(x, y) = y^2xe^{3x+4y}$ como

$$f(x, y) = y^2xe^{3x+4y} = \underset{g(x)}{(xe^{3x})}\underset{h(y)}{(y^2e^{4y})},$$

pero en la segunda ecuación no hay forma de expresar a $y + \operatorname{sen} x$ como un producto de una función de x por una función de y.

Observe que al dividir entre la función $h(y)$, podemos escribir una ecuación separable $dy/dx = g(x)h(y)$ como

$$p(y)\frac{dy}{dx} = g(x), \tag{2}$$

donde, por conveniencia $p(y)$ representa a $1/h(y)$. Podemos ver inmediatamente que la ecuación (2) se reduce a la ecuación (1) cuando $h(y) = 1$.

Ahora si $y = \phi(x)$ representa una solución de la ecuación (2), se tiene que $p(\phi(x))\phi'(x) = g(x)$, y por tanto

$$\int p(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int g(x)\,dx. \tag{3}$$

Pero $dy = \phi'(x)dx$, por lo que la ecuación (3) es la misma que

$$\int p(y)\,dy = \int g(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad H(y) = G(x) + c, \tag{4}$$

donde $H(y)$ y $G(x)$ son antiderivadas de $p(y) = 1/h(y)$ y $g(x)$, respectivamente.

MÉTODO DE SOLUCIÓN La ecuación (4) indica el procedimiento para resolver ecuaciones separables. Al integrar ambos lados de $p(y)\,dy = g(x)\,dx$, se obtiene una familia uniparamétrica de soluciones, que usualmente se expresa de manera implícita.

NOTA No hay necesidad de emplear dos constantes cuando se integra una ecuación separable, porque si escribimos $H(y) + c_1 = G(x) + c_2$, entonces la diferencia $c_2 - c_1$ se puede reemplazar con una sola constante c, como en la ecuación (4). En muchos casos de los capítulos siguientes, sustituiremos las constantes en la forma más conveniente para una ecuación dada. Por ejemplo, a veces se pueden reemplazar los múltiplos o las combinaciones de constantes con una sola constante.

EJEMPLO 1 Solución de una ED separable

Resuelva $(1 + x)\,dy - y\,dx = 0$.

SOLUCIÓN Dividiendo entre $(1 + x)y$, podemos escribir $dy/y = dx/(1 + x)$, de donde tenemos que

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x}$$

$$\ln|y| = \ln|1 + x| + c_1$$

$$y = e^{\ln|1+x|+c_1} = e^{\ln|1+x|} \cdot e^{c_1} \qquad \leftarrow \text{leyes de exponentes}$$

$$= |1 + x|\,e^{c_1}$$

$$= \pm e^{c_1}(1 + x). \qquad \leftarrow \begin{cases} |1+x| = 1+x, & x \geq -1 \\ |1+x| = -(1+x), & x < -1 \end{cases}$$

Haciendo c igual a $\pm e^{c_1}$ se obtiene $y = c(1 + x)$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA Como cada integral da como resultado un logaritmo, la elección más prudente para la constante de integración es $\ln|c|$, en lugar de c. Reescribiendo el segundo renglón de la solución como $\ln|y| = \ln|1 + x| + \ln|c|$ nos permite combinar los términos del lado derecho usando las propiedades de los logaritmos. De $\ln|y| = \ln|c(1 + x)|$ obtenemos inmediatamente que $y = c(1 + x)$. Aun cuando no todas las integrales indefinidas sean logaritmos, podría seguir siendo más conveniente usar $\ln|c|$. Sin embargo, no se puede establecer una regla firme. ■

En la sección 1.1 vimos que una curva solución puede ser sólo un tramo o un arco de la gráfica de una solución implícita $G(x, y) = 0$.

EJEMPLO 2 Curva solución

Resuelva el problema con valores iniciales $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$, $\quad y(4) = -3$.

SOLUCIÓN Si reescribe la ecuación como $y\,dy = -x\,dx$, obtiene

$$\int y\,dy = -\int x\,dx \qquad \text{y} \qquad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_1.$$

Podemos escribir el resultado de la integración como $x^2 + y^2 = c^2$, sustituyendo a la constante $2c_1$ por c^2. Esta solución de la ecuación diferencial representa una familia de circunferencias concéntricas centradas en el origen.

Ahora cuando $x = 4$, $y = -3$, se tiene $16 + 9 = 25 = c^2$. Así, el problema con valores iniciales determina la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ de radio 5. Debido a su sencillez podemos escribir de esta solución implícita como una solución explícita que satisfaga la

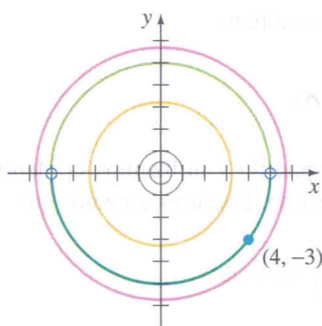


FIGURA 2.2.1 Curvas solución para el PVI del ejemplo 2.

condición inicial. Vimos en el ejemplo 3 de la sección 1.1, esta solución como $y = \phi_2(x)$ o $y = -\sqrt{25 - x^2}$, $-5 < x < 5$. Una curva solución es la gráfica de una función derivable. En este caso la curva solución es la semicircunferencia inferior, que se muestra en azul oscuro en la figura 2.2.1 que contiene al punto $(4, -3)$. ■

PÉRDIDA DE UNA SOLUCIÓN Se debe tener cuidado al separar las variables ya que las variables que sean divisores podrían ser cero en un punto. Concretamente, si r es una raíz de la función $h(y)$, entonces sustituyendo $y = r$ en $dy/dx = g(x)h(y)$ se encuentra que ambos lados son iguales a cero; es decir, $y = r$ es una solución constante de la ecuación diferencial. Pero después de que las variables se separan, el lado izquierdo de $\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$ está indefinido en r. Por tanto, $y = r$ podría no representar a la familia de soluciones que se ha obtenido después de la integración y simplificación. Recuerde que una solución de este tipo se llama solución singular.

EJEMPLO 3 Pérdida de una solución

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$.

SOLUCIÓN Poniendo la ecuación en la forma

$$\frac{dy}{y^2 - 4} = dx \quad \text{o} \quad \left[\frac{\frac{1}{4}}{y - 2} - \frac{\frac{1}{4}}{y + 2}\right] dy = dx. \tag{5}$$

La segunda ecuación en la ecuación (5) es el resultado de utilizar fracciones parciales en el lado izquierdo de la primera ecuación. Integrando y utilizando las leyes de los logaritmos se obtiene

$$\frac{1}{4}\ln|y - 2| - \frac{1}{4}\ln|y + 2| = x + c_1$$

$$\text{o} \qquad \ln\left|\frac{y - 2}{y + 2}\right| = 4x + c_2 \qquad \text{o} \qquad \frac{y - 2}{y + 2} = \pm e^{4x + c_2}.$$

Aquí hemos sustituido $4c_1$ por c_2. Por último, después de sustituir $\pm e^{c_2}$ por c y despejando y de la última ecuación, obtenemos una familia uniparamétrica de soluciones

$$y = 2\,\frac{1 + ce^{4x}}{1 - ce^{4x}}. \tag{6}$$

Ahora, si factorizamos el lado derecho de la ecuación diferencial como $dy/dx = (y - 2)(y + 2)$, sabemos del análisis de puntos críticos de la sección 2.1 que $y = 2$ y $y = -2$ son dos soluciones constantes (de equilibrio). La solución $y = 2$ es un miembro de la familia de soluciones definida por la ecuación (6) correspondiendo al valor $c = 0$. Sin embargo, $y = -2$ es una solución singular; ésta no se puede obtener de la ecuación (6) para cualquier elección del parámetro c. La última solución se perdió al inicio del proceso de solución. El examen de la ecuación (5) indica claramente que debemos excluir $y = \pm 2$ en estos pasos. ■

EJEMPLO 4 Un problema con valores iniciales

Resuelva $(e^{2y} - y)\cos x\,\dfrac{dy}{dx} = e^y \operatorname{sen} 2x$, $\quad y(0) = 0$.

SOLUCIÓN Dividiendo la ecuación entre $e^y \cos x$ se obtiene

$$\frac{e^{2y} - y}{e^y}\, dy = \frac{\text{sen}\, 2x}{\cos x}\, dx.$$

Antes de integrar se realiza la división del lado izquierdo y utilizamos la identidad trigonométrica $\text{sen}\, 2x = 2\,\text{sen}\, x \cos x$ en el lado derecho. Entonces tenemos que

integración de partes →
$$\int (e^y - ye^{-y})\, dy = 2\int \text{sen}\, x\, dx$$

se obtiene
$$e^y + ye^{-y} + e^{-y} = -2\cos x + c. \tag{7}$$

La condición inicial $y = 0$ cuando $x = 0$ implica que $c = 4$. Por tanto una solución del problema con valores iniciales es

$$e^y + ye^{-y} + e^{-y} = 4 - 2\cos x. \tag{8}$$ ■

USO DE COMPUTADORA Los *Comentarios* al final de la sección 1.1 mencionan que puede ser difícil utilizar una solución implícita $G(x, y) = 0$ para encontrar una solución explícita $y = \phi(x)$. La ecuación (8) muestra que la tarea de despejar y en términos de x puede presentar más problemas que solamente el aburrido trabajo de presionar símbolos; ¡en algunos casos simplemente no se puede hacer! Las soluciones implícitas tales como la ecuación (8) son un poco frustrantes; ya que no se aprecia ni en la gráfica de la ecuación ni en el intervalo una solución definida que satisfaga que $y(0) = 0$. El problema de "percibir" cuál es la solución implícita en algunos casos se puede resolver mediante la tecnología. Una manera* de proceder es utilizar la aplicación *contour plot* de un sistema algebraico de computación (SAC). Recuerde del cálculo de varias variables que para una función de dos variables $z = G(x, y)$ las curvas *bi-dimensionales* definidas por $G(x, y) = c$, donde c es una constante, se llaman las *curvas de nivel* de la función. En la figura 2.2.2 se presentan algunas de las curvas de nivel de la función $G(x, y) = e^y + ye^{-y} + e^{-y} + 2\cos x$ que se han reproducido con la ayuda de un SAC. La familia de soluciones definidas por la ecuación (7) son las curvas de nivel $G(x, y) = c$. En la figura 2.2.3 se muestra en color azul la curva de nivel $G(x, y) = 4$, que es la solución particular de la ecuación (8). La otra curva de la figura 2.2.3 es la curva de nivel $G(x, y) = 2$, que es miembro de la familia $G(x, y) = c$ que satisface que $y(\pi/2) = 0$.

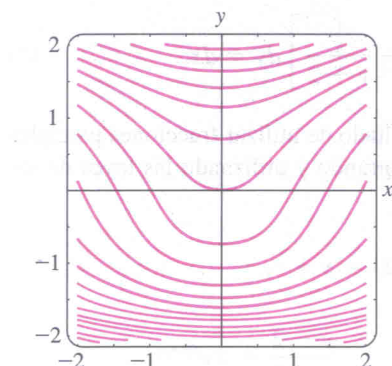


FIGURA 2.2.2 Curvas de nivel $G(x, y) = c$, donde $G(x, y) = e^y + ye^{-y} + e^{-y} + 2\cos x$.

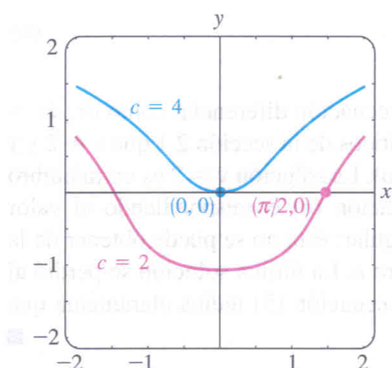


FIGURA 2.2.3 Curvas de nivel $c = 2$ y $c = 4$.

Si al determinar un valor específico del parámetro c en una familia de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden llegamos a una solución particular, hay una inclinación natural de la mayoría de los estudiantes (y de los profesores) a relajarse y estar satisfechos. Sin embargo, una solución de un problema con valores iniciales podría no ser única. Vimos en el ejemplo 4 de la sección 1.2 que el problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0 \tag{9}$$

tiene al menos dos soluciones, $y = 0$ y $y = \frac{1}{16}x^4$. Ahora ya podemos resolver esa ecuación. Separando las variables e integrando $y^{-1/2}\, dy = x\, dx$ obtenemos

$$2y^{1/2} = \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \text{o} \quad y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2.$$

Cuando $x = 0$, entonces $y = 0$, así que necesariamente, $c = 0$. Por tanto $y = \frac{1}{16}x^4$. Se perdió la solución trivial $y = 0$ al dividir entre $y^{1/2}$. Además, el problema con valores iniciales, ecuación (9), tiene una cantidad infinitamente mayor de soluciones porque para cualquier elección del parámetro $a \geq 0$ la función definida en tramos

*En la sección 2.6 analizaremos algunas otras maneras de proceder que están basadas en el concepto de una solución numérica.

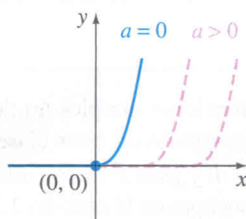


FIGURA 2.2.4 Soluciones de la ecuación (9) definida en tramos.

$$y = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{16}(x^2 - a^2)^2, & x \geq a \end{cases}$$

satisface tanto a la ecuación diferencial como a la condición inicial. Véase la figura 2.2.4.

SOLUCIONES DEFINIDAS POR INTEGRALES Si g es una función continua en un intervalo abierto I que contiene a a, entonces para toda x en I,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt = g(x).$$

Usted podría recordar que el resultado anterior es una de las dos formas del teorema fundamental del cálculo. Es decir, $\int_a^x g(t)\,dt$ es una antiderivada de la función g. En ocasiones esta forma es conveniente en la solución de ED. Por ejemplo, si g es continua en un intervalo I que contiene a x_0 y a x, entonces una solución del sencillo problema con valores iniciales $dy/dx = g(x)$, $y(x_0) = y_0$, que está definido en I está dado por

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t)\,dt$$

Usted debería comprobar que $y(x)$ definida de esta forma satisface la condición inicial. Puesto que una antiderivada de una función continua g no siempre puede expresarse en términos de las funciones elementales, esto podría ser lo mejor que podemos hacer para obtener una solución explícita de un PVI. El ejemplo siguiente ilustra esta idea.

EJEMPLO 5 Un problema con valores iniciales

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x^2}$, $\quad y(3) = 5$.

SOLUCIÓN La función $g(x) = e^{-x^2}$ es continua en $(-\infty, \infty)$, pero su antiderivada no es una función elemental. Utilizando a t como una variable muda de integración, podemos escribir

$$\int_3^x \frac{dy}{dt}\,dt = \int_3^x e^{-t^2}\,dt$$

$$y(t)\Big]_3^x = \int_3^x e^{-t^2}\,dt$$

$$y(x) - y(3) = \int_3^x e^{-t^2}\,dt$$

$$y(x) = y(3) + \int_3^x e^{-t^2}\,dt.$$

Utilizando la condición inicial $y(3) = 5$, obtenemos la solución

$$y(x) = 5 + \int_3^x e^{-t^2}\,dt.$$ ■

El procedimiento que se mostró en el ejemplo 5 también funciona bien en las ecuaciones separables $dy/dx = g(x)f(y)$ donde, $f(y)$ tiene una antiderivada elemental pero $g(x)$ no tiene una antiderivada elemental. Véanse los problemas 29 y 30 de los ejercicios 2.2.

COMENTARIOS

i) Como acabamos de ver en el ejemplo 5, algunas funciones simples no tienen una antiderivada que es una función elemental. Las integrales de estas clases de funciones se llaman **no elementales**. Por ejemplo $\int_3^x e^{-t^2}dt$ y $\int \text{sen}\, x^2\, dx$ son integrales no elementales. Retomaremos nuevamente este concepto en la sección 2.3.

ii) En algunos de los ejemplos anteriores vimos que la constante de la familia uniparamétrica de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden se puede redefinir cuando sea conveniente. También se puede presentar con facilidad el caso de que dos personas obtengan distintas expresiones de las mismas respuestas resolviendo correctamente la misma ecuación. Por ejemplo, separando variables se puede demostrar que familias uniparamétricas de soluciones de la ED $(1 + y^2)\, dx + (1 + x^2)\, dy = 0$ son

$$\arctan x + \arctan y = c \qquad \text{o} \qquad \frac{x + y}{1 - xy} = c.$$

Conforme avance en las siguientes secciones, considere que las familias de soluciones pueden ser equivalentes, en el sentido de que una se puede obtener de otra, ya sea por redefinición de la constante o utilizando álgebra o trigonometría. Vea los problemas 27 y 29 de los ejercicios 2.2.

EJERCICIOS 2.2

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-1.

En los problemas 1 a 22 resuelva la ecuación diferencial dada por separación de variables.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \text{sen}\, 5x$
2. $\dfrac{dy}{dx} = (x + 1)^2$
3. $dx + e^{3x}dy = 0$
4. $dy - (y - 1)^2 dx = 0$
5. $x\dfrac{dy}{dx} = 4y$
6. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$
7. $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$
8. $e^x y\dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$
9. $y \ln x \dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{y + 1}{x}\right)^2$
10. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2y + 3}{4x + 5}\right)^2$
11. $\csc y\, dx + \sec^2 x\, dy = 0$
12. $\text{sen}\, 3x\, dx + 2y \cos^3 3x\, dy = 0$
13. $(e^y + 1)^2 e^{-y}\, dx + (e^x + 1)^3 e^{-x}\, dy = 0$
14. $x(1 + y^2)^{1/2}\, dx = y(1 + x^2)^{1/2}\, dy$
15. $\dfrac{dS}{dr} = kS$
16. $\dfrac{dQ}{dt} = k(Q - 70)$
17. $\dfrac{dP}{dt} = P - P^2$
18. $\dfrac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$
19. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$
20. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$
21. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{1 - y^2}$
22. $(e^x + e^{-x})\dfrac{dy}{dx} = y^2$

En los problemas 23 a 28 encuentre una solución explícita del problema con valores iniciales dado.

23. $\dfrac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1), \quad x(\pi/4) = 1$
24. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - 1}{x^2 - 1}, \quad y(2) = 2$
25. $x^2\dfrac{dy}{dx} = y - xy, \quad y(-1) = -1$
26. $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 1, \quad y(0) = \frac{5}{2}$
27. $\sqrt{1 - y^2}\, dx - \sqrt{1 - x^2}\, dy = 0, \quad y(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
28. $(1 + x^4)\, dy + x(1 + 4y^2)\, dx = 0, \quad y(1) = 0$

En los problemas 29 y 30 proceda como en el ejemplo 5 y determine una solución explícita del problema con valores iniciales dado.

29. $\dfrac{dy}{dx} = ye^{-x^2}, \quad y(4) = 1$
30. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 \text{sen}\, x^2, \quad y(-2) = \frac{1}{3}$
31. **a)** Encuentre una solución al problema con valores iniciales que consiste en la ecuación diferencial del ejemplo 3 y de las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y(0) = -2$, y $y(\frac{1}{4}) = 1$.

b) Encuentre la solución de la ecuación diferencial en el ejemplo 4 cuando se utiliza In c_1 como la constante de integración del *lado izquierdo* en la solución y 4 In c_1 se sustituye por In c. Después resuelva los mismos problemas con valores iniciales que en el inicio a).

32. Encuentre una solución de $x\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y$ que pase por los puntos indicados.

a) $(0, 1)$ **b)** $(0, 0)$ **c)** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **d)** $\left(2, \frac{1}{4}\right)$

33. Encuentre una solución singular del problema 21 y del problema 22.

34. Demuestre que una solución implícita de

$$2x \operatorname{sen}^2 y\, dx - (x^2 + 10)\cos y\, dy = 0$$

está dada por $\ln(x^2 + 10) + \csc y = c$. Determine las soluciones constantes si se perdieron cuando se resolvió la ecuación diferencial.

Con frecuencia, un cambio radical en la forma de la solución de una ecuación diferencial corresponde a un cambio muy pequeño en la condición inicial o en la ecuación misma. En los problemas 35 a 38 determine una solución explícita del problema con valores iniciales dado. Utilice un programa de graficación para dibujar la gráfica de cada solución. Compare cada curva solución en una vecindad de (0, 1).

35. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2, \quad y(0) = 1$

36. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2, \quad y(0) = 1.01$

37. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2 + 0.01, \quad y(0) = 1$

38. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2 - 0.01, \quad y(0) = 1$

39. Toda ecuación autónoma de primer orden $dy/dx = f(y)$ es separable. Encuentre las soluciones explícitas $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ y $y_4(x)$ de la ecuación diferencial $dy/dx = y - y^3$, que satisfagan, respectivamente las condiciones iniciales $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = \frac{1}{2}$, $y_3(0) = -\frac{1}{2}$ y $y_4(0) = -2$. Utilice un programa de graficación para cada solución. Compare estas gráficas con las bosquejadas en el problema 19 de los ejercicios 2.1. Dé el intervalo de definición exacto para cada solución.

40. a) La ecuación diferencial autónoma de primer orden $dy/dx = 1/(y - 3)$ no tiene puntos críticos. No obstante, coloque 3 en la recta de fase y obtenga un esquema de fase de la ecuación. Calcule d^2y/dx^2 para determinar dónde las curvas solución son cóncavas hacia arriba y dónde son cóncavas hacia abajo (vea los problemas 35 y 36 de los ejercicios 2.1). Utilice el esquema de fase y la concavidad para que, a mano, dibuje algunas curvas solución típicas.

b) Encuentre las soluciones explícitas $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ y $y_4(x)$ de la ecuación diferencial del inciso a) que satisfagan, respectivamente las condiciones iniciales $y_1(0) = 4$, $y_2(0) = 2$, $y_3(1) = 2$ y $y_4(-1) = 4$. Trace la gráfica de cada solución y compare con sus dibujos del inciso a). Indique el intervalo de definición exacto de cada solución.

41. a) Determine una solución explícita del problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 1}{2y}, \quad y(-2) = -1.$$

b) Utilice un programa de graficación para dibujar la gráfica de la solución del inciso a). Use la gráfica para estimar el intervalo I de definición de la solución.

c) Determine el intervalo I de definición exacto mediante métodos analíticos.

42. Repita los incisos a) al c) del problema 41 para el PVI que consiste en la ecuación diferencial del problema 7 y de la condición inicial $y(0) = 0$.

Problemas para analizar

43. a) Explique por qué el intervalo de definición de la solución explícita $y = \phi_2(x)$ del problema con valores iniciales en el ejemplo 2 es el intervalo abierto $(-5, 5)$.

b) ¿Alguna solución de la ecuación diferencial puede cruzar el eje x? ¿Usted cree que $x^2 + y^2 = 1$ es una solución implícita del problema con valores iniciales $dy/dx = -x/y$, $y(1) = 0$?

44. a) Si $a > 0$ analice las diferencias, si existen, entre las soluciones de los problemas con valores iniciales que consisten en la ecuación diferencial $dy/dx = x/y$ y de cada una de las condiciones iniciales $y(a) = a$, $y(a) = -a$, $y(-a) = a$ y $y(-a) = -a$.

b) ¿Tiene una solución el problema con valores iniciales $dy/dx = x/y$, $y(0) = 0$?

c) Resuelva $dy/dx = x/y$, $y(1) = 2$ e indique el intervalo de definición exacto de esta solución.

45. En los problemas 39 y 40 vimos que toda ecuación diferencial autónoma de primer orden $dy/dx = f(y)$ es separable. ¿Ayuda este hecho en la solución del problema con valores iniciales $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 + y^2}\operatorname{sen}^2 y, \quad y(0) = \frac{1}{2}$? Analice. A mano, dibuje una posible curva solución del problema.

46. Sin usar tecnología. ¿Cómo podría resolver

$$\left(\sqrt{x} + x\right)\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} + y?$$

Lleve a cabo sus ideas.

47. Determine una función cuyo cuadrado más el cuadrado de su derivada es igual a 1.

48. a) La ecuación diferencial del problema 27 es equivalente a la forma normal

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2}}$$

en la región cuadrada del plano xy definida por $|x| < 1$, $|y| < 1$. Pero la cantidad dentro del radical es no negativa también en las regiones definidas por $|x| > 1$, $|y| > 1$. Dibuje todas las regiones del plano xy para las que esta ecuación diferencial tiene soluciones reales.

b) Resuelva la ED del inciso a) en las regiones definidas por $|x| > 1$, $|y| > 1$. Después determine una solución implícita y una explícita de la ecuación diferencial sujeta a $y(2) = 2$.

Modelo matemático

49. Puente suspendido En la ecuación (16) de la sección 1.3 vimos que un modelo matemático para la forma de un cable flexible colgado de dos postes es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{T_1}, \qquad (10)$$

donde W denota la porción de la carga vertical total entre los puntos P_1 y P_2 que se muestran en la figura 1.3.7. La ED, ecuación (10) es separable bajo las siguientes condiciones que describen un puente suspendido.

Supongamos que los ejes x y y están como se muestra en la figura 2.2.5, es decir, el eje x va a lo largo de la superficie de la carretera y el eje y pasa por $(0, a)$, que es el punto más bajo de un cable en la región que abarca el puente, que coincide con el intervalo $[-L/2, L/2]$. En el caso de un puente suspendido, la suposición usual es que la carga vertical en (10) es sólo una distribución uniforme de la superficie de la carretera a lo largo del eje horizontal. En otras palabras, se supone que el peso de todos los cables es despreciable en comparación con el peso de la superficie de la carretera y que el peso por unidad de longitud de la superficie de la carretera (digamos, libras por pie horizontal) es una constante ρ. Utilice esta información para establecer y resolver un adecuado problema con valores iniciales a partir del cual se determine la forma (una curva con ecuación $y = \phi(x)$) de cada uno de los dos cables en un puente suspendido. Exprese su solución del PVI en términos del pandeo h y de la longitud L. Véase la figura 2.2.5.

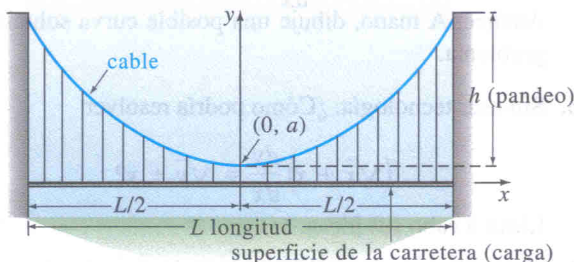


FIGURA 2.2.5 Forma de un cable del problema 49.

Tarea para el laboratorio de computación

50. a) Utilice un SAC y el concepto de curvas de nivel para dibujar las gráficas representativas de los miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{8x + 5}{3y^2 + 1}$. Experimente con diferentes números de las curvas de nivel así como con diferentes regiones rectangulares definidas por $a \le x \le b$, $c \le y \le d$.

b) En diferentes ejes coordenados dibuje las gráficas de las soluciones particulares correspondientes a las condiciones iniciales: $y(0) = -1$; $y(0) = 2$; $y(-1) = 4$; $y(-1) = -3$.

51. a) Determine una solución implícita del PVI

$$(2y + 2)\,dy - (4x^3 + 6x)\,dx = 0, \quad y(0) = -3.$$

b) Utilice el inciso a) para encontrar una solución explícita $y = \phi(x)$ del PVI.

c) Considere su respuesta del inciso b) como una sola *función*. Use un programa de graficación o un SAC para trazar la gráfica de esta función y después utilice la gráfica para estimar su dominio.

d) Con la ayuda de un programa para determinar raíces de un SAC, determine la longitud aproximada del intervalo de definición más grande posible de la *solución* $y = \phi(x)$ del inciso b). Utilice un programa de graficación o un SAC para trazar la gráfica de la curva solución para el PVI en este intervalo.

52. a) Utilice un SAC y el concepto de curvas de nivel para dibujar las gráficas representativas de los miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x(1 - x)}{y(-2 + y)}$. Experimente con diferentes números de curvas de nivel así como en diferentes regiones rectangulares del plano xy hasta que su resultado se parezca a la figura 2.2.6.

b) En diferentes ejes coordenados, dibuje la gráfica de la solución implícita correspondiente a la condición inicial $y(0) = \frac{3}{2}$. Utilice un lápiz de color para indicar el segmento de la gráfica que corresponde a la curva solución de una solución ϕ que satisface la condición inicial. Con ayuda de un programa para determinar raíces de un SAC, determine el intervalo I de definición aproximado más largo de la solución ϕ. [*Sugerencia:* Primero encuentre los puntos en la curva del inciso a) donde la recta tangente es vertical.]

c) Repita el inciso b) para la condición inicial $y(0) = -2$.

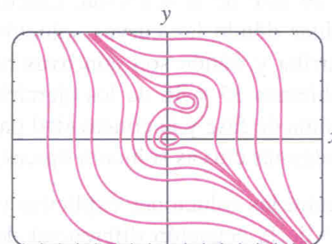


FIGURA 2.2.6 Curvas de nivel del problema 52.

2.3 ECUACIONES LINEALES

REPASO DE MATERIAL

- Repase la definición de las ED en las ecuaciones (6) y (7) de la sección 1.1

INTRODUCCIÓN Continuamos con nuestra búsqueda de las soluciones de las ED de primer orden examinando ecuaciones lineales. Las ecuaciones diferenciales lineales son una familia especialmente "amigable" de ecuaciones diferenciales en las que, dada una ecuación lineal, ya sea de primer orden o de un miembro de orden superior, siempre hay una buena posibilidad de que podamos encontrar alguna clase de solución de la ecuación que podamos examinar.

UNA DEFINICIÓN En la ecuación (7) de la sección 1.1, se presenta la forma de una ED lineal de primer orden. Aquí, por conveniencia, se reproduce esta forma en la ecuación (6) de la sección 1.1, para el caso cuando $n = 1$.

DEFINICIÓN 2.3.1 Ecuación lineal

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{1}$$

se dice que es una **ecuación lineal** en la variable dependiente y.

Se dice que la ecuación lineal (1) es **homogénea** cuando $g(x) = 0$; si no es **no homogénea**.

FORMA ESTÁNDAR Al dividir ambos lados de la ecuación (1) entre el primer coeficiente, $a_1(x)$, se obtiene una forma más útil, la **forma estándar** de una ecuación lineal:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{2}$$

Buscamos una solución de la ecuación (2) en un intervalo I, en el cual las dos funciones P y f sean continuas.

En el análisis que se presenta a continuación ilustraremos una propiedad y un procedimiento y terminaremos con una fórmula que representa la forma de cada solución de la ecuación (2). Pero más importantes que la fórmula son la propiedad y el procedimiento, porque ambos conceptos también se aplican a ecuaciones lineales de orden superior.

LA PROPIEDAD La ecuación diferencial (2) tiene la propiedad de que su solución es la **suma** de las dos soluciones, $y = y_c + y_p$, donde y_c es una solución de la ecuación homogénea asociada

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{3}$$

y y_p es una solución particular de ecuación no homogénea (2). Para ver esto, observe que

$$\frac{d}{dx}[y_c + y_p] + P(x)[y_c + y_p] = \underbrace{\left[\frac{dy_c}{dx} + P(x)y_c\right]}_{0} + \underbrace{\left[\frac{dy_p}{dx} + P(x)y_p\right]}_{f(x)} = f(x).$$

Ahora la ecuación (3) es también separable. Por lo que podemos determinar y_c al escribir la ecuación (3) en la forma

$$\frac{dy}{y} + P(x)\,dx = 0$$

e integramos. Despejando y, se obtiene $y_c = ce^{-\int P(x)dx}$. Por conveniencia escribimos $y_c = cy_1(x)$, donde $y_1 = e^{-\int P(x)dx}$. A continuación se utiliza el hecho de que $dy_1/dx + P(x)y_1 = 0$, para determinar y_p.

EL PROCEDIMIENTO Ahora podemos definir una solución particular de la ecuación (2), siguiendo un procedimiento llamado **variación de parámetros**. Aquí, la idea básica es encontrar una función, u tal que $y_p = u(x)y_1(x) = u(x)e^{-\int P(x)dx}$ sea una solución de la ecuación (2). En otras palabras, nuestra suposición para y_p es la misma que $y_c = cy_1(x)$ excepto que c se ha sustituido por el "parámetro variable" u. Sustituyendo $y_p = uy_1$ en la ecuación (2) se obtiene

$$\underbrace{u\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{du}{dx}}_{\text{Regla del producto}} + P(x)uy_1 = f(x) \quad \text{o} \quad u\underbrace{\left[\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1\right]}_{\text{cero}} + y_1\frac{du}{dx} = f(x)$$

por tanto

$$y_1\frac{du}{dx} = f(x).$$

Entonces separando las variables e integrando se obtiene

$$du = \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx \quad \text{y} \quad u = \int \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx.$$

Puesto que $y_1(x) = e^{-\int P(x)dx}$, vemos que $1/y_1(x) = e^{\int P(x)dx}$. Por tanto

$$y_p = uy_1 = \left(\int \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx\right)e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx,$$

y

$$y = \underbrace{ce^{-\int P(x)dx}}_{y_c} + \underbrace{e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx.}_{y_p} \tag{4}$$

Por tanto, si la ecuación (2) tiene una solución, debe ser de la forma de la ecuación (4). Recíprocamente, es un ejercicio de derivación directa comprobar que la ecuación (4) es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación (2).

No memorice la fórmula que se presenta en la ecuación (4). Sin embargo recuerde el término especial

$$e^{\int P(x)dx} \tag{5}$$

ya que se utiliza para resolver la ecuación (2) de una manera equivalente pero más fácil. Si la ecuación (4) se multiplica por (5),

$$e^{\int P(x)dx}y = c + \int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx, \tag{6}$$

y después se deriva la ecuación (6),

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}f(x), \tag{7}$$

se obtiene

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)dx}y = e^{\int P(x)dx}f(x). \tag{8}$$

Dividiendo el último resultado entre $e^{\int P(x)dx}$ se obtiene la ecuación (2).

MÉTODO DE SOLUCIÓN El método que se recomienda para resolver la ecuación (2) consiste en realidad en trabajar con las ecuaciones (6) a (8) en orden inverso. En otras palabras, si la ecuación (2) se multiplica por la ecuación (5), obtenemos la ecuación (8). Se reconoce que el lado izquierdo de la ecuación (8) es la derivada del producto de $e^{\int P(x)dx}$ por y. Esto nos conduce a la ecuación (7). Entonces, integrando ambos lados de la ecuación (7) se obtiene la solución (6). Como podemos resolver la ecuación (2) por integración, después de multiplicar por $e^{\int P(x)dx}$, esta función se llama **factor integrante** de la ecuación diferencial. Por conveniencia resumiremos estos resultados. Nuevamente le indicamos que no debe memorizar la fórmula (4) sino seguir cada vez el siguiente procedimiento.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL DE PRIMER ORDEN

i) Ponga la ecuación lineal de la forma (1) en la forma estándar (2).

ii) Identifique de la identidad de la forma estándar $P(x)$ y después determine el factor integrante $e^{\int P(x)dx}$.

iii) Multiplique la forma estándar de la ecuación por el factor integrante. El lado izquierdo de la ecuación resultante es automáticamente la derivada del factor integrante y y:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}f(x).$$

iv) Integre ambos lados de esta última ecuación.

EJEMPLO 1 Solución de una ED lineal homogénea

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$.

SOLUCIÓN Esta ecuación lineal se puede resolver por separación de variables. En otro caso, puesto que la ecuación ya está en la forma estándar (2), vemos que $P(x) = -3$ y por tanto el factor integrante es $e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}$. Multiplicando la ecuación por este factor y reconociendo que

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 0 \qquad \text{es la misma que} \qquad \frac{d}{dx}[e^{-3x}y] = 0.$$

Integrando ambos lados de la última ecuación se obtiene $e^{-3x}y = c$. Despejando y se obtiene la solución explícita $y = ce^{3x}$, $-\infty < x < \infty$. ■

EJEMPLO 2 Solución de una ED lineal no homogénea

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} - 3y = 6$.

SOLUCIÓN La ecuación homogénea asociada a esta ED se resolvió en el ejemplo 1. Nuevamente la ecuación está ya en la forma estándar (2) y el factor integrante aún es $e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}$. Ahora al multiplicar la ecuación dada por este factor se obtiene

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 6e^{-3x}, \qquad \text{que es la misma que} \qquad \frac{d}{dx}[e^{-3x}y] = 6e^{-3x}.$$

Integrando ambos lados de la última ecuación se obtiene $e^{-3x}y = -2e^{-3x} + c$ o $y = -2 + ce^{3x}$, $-\infty < x < \infty$. ■

La solución final del ejemplo 2 es la suma de dos soluciones: $y = y_c + y_p$, donde $y_c = ce^{3x}$ es la solución de la ecuación homogénea del ejemplo 1 y $y_p = -2$ es una solución particular de la ecuación no homogénea $y' - 3y = 6$. No necesita preocuparse de si una ecuación lineal de primer orden es homogénea o no homogénea; cuando sigue el procedimiento de solución que se acaba de describir, la solución de una ecuación no homogénea necesariamente produce $y = y_c + y_p$. Sin embargo, la diferencia entre resolver una ED homogénea y una no homogénea será más importante en el capítulo 4, donde se resolverán ecuaciones lineales de orden superior.

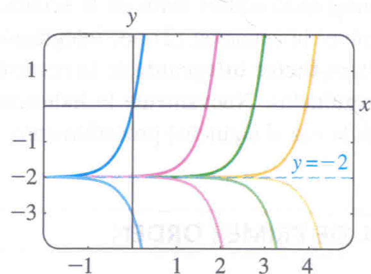


FIGURA 2.3.1 Algunas soluciones $y' - 3y = 6$.

Cuando a_1, a_0 y g en la ecuación (1) son constantes, la ecuación diferencial es autónoma. En el ejemplo 2 podemos comprobar de la forma normal $dy/dx = 3(y + 2)$ que -2 es un punto crítico y que es inestable (un repulsor). Así, una curva solución con un punto inicial ya sea arriba o debajo de la gráfica de la solución de equilibrio $y = -2$ se aleja de esta recta horizontal conforme x aumenta. La figura 2.3.1, obtenida con la ayuda de una aplicación para trazo de gráficas, muestra la gráfica de $y = -2$ junto con otras curvas solución.

CONSTANTE DE INTEGRACIÓN Observe que en el análisis general y en los ejemplos 1 y 2 no se ha considerado una constante de integración en la evaluación de la integral indefinida en el exponente $e^{\int P(x)dx}$. Si consideramos las leyes de los exponentes y el hecho de que el factor integrante multiplica ambos lados de la ecuación diferencial, usted podría explicar por qué es innecesario escribir $\int P(x)\,dx + c$. Vea el problema 44 de los ejercicios 2.3.

SOLUCIÓN GENERAL Suponga que las funciones P y f en la ecuación (2) son continuas en un intervalo I. En los pasos que conducen a la ecuación (4) mostramos que *si* la ecuación (2) tiene una solución en I, entonces debe estar en la forma dada en la ecuación (4). Recíprocamente, es un ejercicio directo de derivación comprobar que cualquier función de la forma dada en (4) es una solución de la ecuación diferencial (2) en I. En otras palabras (4) es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación (2) y *toda solución de la ecuación (2) definida en I es un miembro de esta familia.* Por tanto llamamos a la ecuación (4) la **solución general** de la ecuación diferencial en el intervalo I. (Véase los *Comentarios* al final de la sección 1.1.) Ahora escribiendo la ecuación (2) en la forma normal $y' = F(x, y)$, podemos identificar $F(x, y) = -P(x)y + f(x)$ y $\partial F/\partial y = -P(x)$. De la continuidad de P y f en el intervalo I vemos que F y $\partial F/\partial y$ son también continuas en I. Con el teorema 1.2.1 como nuestra justificación, concluimos que existe una y sólo una solución del problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{9}$$

definida en *algún* intervalo I_0 que contiene a x_0. Pero cuando x_0 está en I, encontrar una solución de (9) es exactamente lo mismo que encontrar un valor adecuado de c en la ecuación (4), es decir, a toda x_0 en I le corresponde un distinto c. En otras palabras, el intervalo de existencia y unicidad I_0 del teorema 1.2.1 para el problema con valores iniciales (9) es el intervalo completo I.

EJEMPLO 3 Solución general

Resuelva $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$.

SOLUCIÓN Dividiendo entre x, obtenemos la forma estándar

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^x. \tag{10}$$

En esta forma identificamos a $P(x) = -4/x$ y $f(x) = x^5e^x$ y además vemos que P y f son continuas en $(0, \infty)$. Por tanto el factor integrante es

podemos utilizar ln x en lugar de ln $|x|$ ya que $x > 0$

$$e^{-4\int dx/x} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}.$$

Aquí hemos utilizado la identidad básica $b^{\log_b N} = N$, $N > 0$. Ahora multiplicamos la ecuación (10) por x^{-4} y reescribimos

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y = xe^x \quad \text{como} \quad \frac{d}{dx}[x^{-4}y] = xe^x.$$

De la integración por partes se tiene que la solución general definida en el intervalo $(0, \infty)$ es $x^{-4}y = xe^x - e^x + c$ o $y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$. ■

Excepto en el caso en el que el coeficiente principal es 1, la reformulación de la ecuación (1) en la forma estándar (2) requiere que se divida entre $a_1(x)$. Los valores de x para los que $a_1(x) = 0$ se llaman **puntos singulares** de la ecuación. Los puntos singulares son potencialmente problemáticos. En concreto, en la ecuación (2), si $P(x)$ (que se forma al dividir $a_0(x)$ entre $a_1(x)$) es discontinua en un punto, la discontinuidad puede conducir a soluciones de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 4 Solución general

Determine la solución general de $(x^2 - 9)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$.

SOLUCIÓN Escribimos la ecuación diferencial en la forma estándar

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{x^2 - 9}y = 0 \tag{11}$$

e identificando $P(x) = x/(x^2 - 9)$. Aunque P es continua en $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ y $(3, \infty)$, resolveremos la ecuación en el primer y tercer intervalos. En estos intervalos el factor integrante es

$$e^{\int x\,dx/(x^2-9)} = e^{\frac{1}{2}\int 2x\,dx/(x^2-9)} = e^{\frac{1}{2}\ln|x^2-9|} = \sqrt{x^2 - 9}.$$

Después multiplicando la forma estándar (11) por este factor, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2 - 9}\,y\right] = 0.$$

Integrando ambos lados de la última ecuación se obtiene $\sqrt{x^2 - 9}\,y = c$. Por tanto para cualquiera $x > 3$ o $x < -3$ la solución general de la ecuación es $y = \dfrac{c}{\sqrt{x^2 - 9}}$. ■

Observe en el ejemplo 4 que $x = 3$ y $x = -3$ son puntos singulares de la ecuación y que toda función en la solución general $y = c/\sqrt{x^2 - 9}$ es discontinua en estos puntos. Por otra parte, $x = 0$ es un punto singular de la ecuación diferencial en el ejemplo 3, pero en la solución general $y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$ es notable que cada función de esta familia uniparamétrica es continua en $x = 0$ y está definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y no sólo en $(0, \infty)$, como se indica en la solución. Sin embargo, la familia $y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$ definida en $(-\infty, \infty)$ no se puede considerar la solución general de la ED, ya que el punto singular $x = 0$ aún causa un problema. Véase el problema 39 en los ejercicios 2.3.

EJEMPLO 5 Un problema con valores iniciales

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} + y = x, \quad y(0) = 4.$

SOLUCIÓN La ecuación está en forma estándar, y $P(x) = 1$ y $f(x) = x$ son continuas en $(-\infty, \infty)$. El factor integrante es $e^{\int dx} = e^x$, entonces integrando

$$\frac{d}{dx}[e^x y] = xe^x$$

se tiene que $e^x y = xe^x - e^x + c$. Despejando y de esta última ecuación se obtiene la solución general $y = x - 1 + ce^{-x}$. Pero de la condición general sabemos que $y = 4$ cuando $x = 0$. El sustituir estos valores en la solución general implica que $c = 5$. Por tanto la solución del problema es

$$y = x - 1 + 5e^{-x}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{12}$$ ■

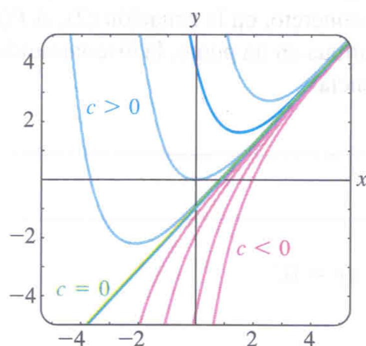


FIGURA 2.3.2 Algunas soluciones $y' + y = x$.

La figura 2.3.2, que se obtuvo con la ayuda de un programa de graficación, muestra la gráfica de (12) en azul oscuro, junto con las gráficas, de las otras soluciones representativas de la familia uniparamétrica $y = x - 1 + ce^{-x}$. En esta solución general identificamos $y_c = ce^{-x}$ y $y_p = x - 1$. Es interesante observar que conforme x aumenta, las gráficas de *todos* los miembros de la familia son cercanas a la gráfica de la solución particular $y_p = x - 1$ que se muestra con una línea sólida de la figura 2.3.2. Esto es debido a que la contribución de $y_c = ce^{-x}$ a los valores de una solución es despreciable al aumentar los valores de x. Decimos que $y_c = ce^{-x}$ es un **término transitorio**, ya que $y_c \to 0$ conforme $x \to \infty$. Mientras que este comportamiento no es característico de todas las soluciones generales de las ecuaciones lineales (véase el ejemplo 2), el concepto de un transitorio es frecuentemente importante en problemas aplicados.

COEFICIENTES DISCONTINUOS En aplicaciones, los coeficientes $P(x)$ y $f(x)$ en (2) pueden ser continuos por tramos. En el siguiente ejemplo $f(x)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$ con una sola discontinuidad, en particular un salto (finito) discontinuo en $x = 1$. Resolvemos el problema en dos partes correspondientes a los dos intervalos en los que f está definida. Es entonces posible juntar las partes de las dos soluciones en $x = 1$ así que $y(x)$ es continua en $[0, \infty)$.

EJEMPLO 6 Un problema con valores iniciales

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x), \quad y(0) = 0 \quad$ donde $\quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

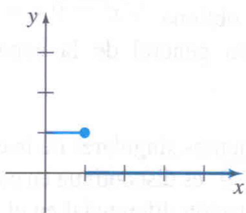


FIGURA 2.3.3 $f(x)$ discontinua.

SOLUCIÓN En la figura 2.3.3 se muestra la gráfica de la función discontinua f. Resolvemos la ED para $y(x)$ primero en el intervalo $[0, 1]$ y después en el intervalo $(1, \infty)$. Para $0 \le x \le 1$ se tiene que

$$\frac{dy}{dx} + y = 1 \qquad \text{o, el equivalente,} \qquad \frac{d}{dx}[e^x y] = e^x.$$

Integrando esta última ecuación y despejando y se obtiene $y = 1 + c_1 e^{-x}$. Puesto que $y(0) = 0$, debemos tener que $c_1 = -1$ y por tanto $y = 1 - e^{-x}$ $0 \le x \le 1$. Entonces para $x > 1$ la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

conduce a $y = c_2e^{-x}$. Por tanto podemos escribir

$$y = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 \le x \le 1, \\ c_2e^{-x}, & x > 1. \end{cases}$$

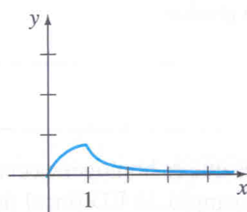


FIGURA 2.3.4 Gráfica de la función de (13).

Invocando a la definición de continuidad en un punto, es posible determinar c_2 así la última función es continua en $x = 1$. El requisito de $\lim_{x\to 1^+} y(x) = y(1)$ implica que $c_2e^{-1} = 1 - e^{-1}$ o $c_2 = e - 1$. Como se muestra en la figura 2.3.4, la función

$$y = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 \le x \le 1, \\ (e-1)e^{-x}, & x > 1 \end{cases} \tag{13}$$

es continua en $(0, \infty)$. ■

Es importante considerar la ecuación (13) y la figura 2.3.4 como un bloque pequeño; le pedimos que lea y conteste el problema 42 de los ejercicios 2.3.

FUNCIONES DEFINIDAS POR INTEGRALES Al final de la sección 2.2 analizamos el hecho de que algunas funciones continuas simples no tienen antiderivadas que sean funciones elementales y que las integrales de esa clase de funciones se llaman **no elementales**. Por ejemplo, usted puede haber visto en cálculo que $\int e^{-x^2}\,dx$ y $\int \operatorname{sen} x^2\,dx$ no son integrales elementales. En matemáticas aplicadas algunas funciones importantes están *definidas* en términos de las integrales no elementales. Dos de esas **funciones especiales** son la **función error** y la **función error complementario**:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \text{y} \quad \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt. \tag{14}$$

Del conocido resultado $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}/2$* podemos escribir $(2/\sqrt{\pi})\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = 1$. Entonces de la forma $\int_0^{+\infty} = \int_0^x + \int_x^{+\infty}$ se ve de la ecuación (14) que la función error complementario, erfc(x), se relaciona con erf(x) por $\operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = 1$. Debido a su importancia en probabilidad, estadística y en ecuaciones diferenciales parciales aplicadas se cuenta con extensas tablas de la función error. Observe que erf(0) = 0 es un valor obvio de la función. Los valores de erf(x) se pueden determinar con un sistema algebraico de computación (SAC).

EJEMPLO 7 La función error

Resuelva el problema con valores iniciales $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 2, \quad y(0) = 1.$

SOLUCIÓN Puesto que la ecuación ya se encuentra en la forma normal, el factor integrante es $e^{-x^2}dx$, y así de

$$\frac{d}{dx}[e^{-x^2}y] = 2e^{-x^2} \quad \text{obtenemos} \quad y = 2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + ce^{x^2}. \tag{15}$$

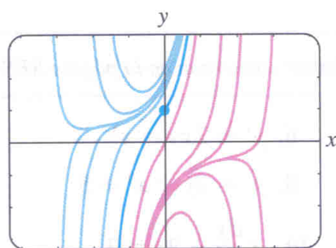


FIGURA 2.3.5 Algunas soluciones de $y' - 2xy = 2$.

Aplicando $y(0) = 1$ en la última expresión obtenemos $c = 1$. Por tanto, la solución del problema es

$$y = 2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2} \text{ o } y = e^{x^2}[1 + \sqrt{\pi}\operatorname{erf}(x)].$$

En la figura 2.3.5 se muestra en azul oscuro, la gráfica de esta solución en el intervalo $(-\infty, \infty)$ junto con otros miembros de la familia definida en la ecuación (15), obtenida con la ayuda de un sistema algebraico de computación. ■

*Este resultado normalmente se presenta en el tercer semestre de cálculo.

USO DE COMPUTADORAS Algunos sistemas algebraicos de computación como *Mathematica* y *Maple* permiten obtener soluciones implícitas o explícitas para algunos tipos de ecuaciones diferenciales, usando la instrucción *dsolve*.*

COMENTARIOS

i) En general, una ED lineal de cualquier orden se dice que es homogénea cuando $g(x) = 0$ en la ecuación (6) de la sección 1.1. Por ejemplo, la ED lineal de segundo orden $y'' - 2y' + 6y = 0$ es homogénea. Como se puede ver en este ejemplo y en el caso especial de la ecuación (3) de esta sección, la solución trivial $y = 0$ es siempre una solución de una ED lineal homogénea.

ii) A veces, una ecuación diferencial de primer orden es no lineal en una variable pero es lineal en la otra variable. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y^2}$$

es no lineal en la variable y. Pero su recíproca

$$\frac{dx}{dy} = x + y^2 \quad \text{o} \quad \frac{dx}{dy} - x = y^2$$

se reconoce como lineal en la variable x. Usted debería comprobar que el factor integrante es $e^{\int(-1)dy} = e^{-y}$ e integrando por partes se obtiene la solución explícita $x = -y^2 - 2y - 2 + ce^y$ para la segunda ecuación. Esta expresión es, entonces, una solución implícita de la primera ecuación.

iii) Los matemáticos han adoptado como propias algunas palabras de ingeniería que consideran adecuadas para describir. La palabra *transitorio*, que ya hemos usado, es uno de estos términos. En futuros análisis ocasionalmente se presentarán las palabras *entrada* y *salida*. La función f en la ecuación (2) es la **función de entrada** o **de conducción**; una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial para una entrada dada se llama **salida** o **respuesta**.

iv) El término **funciones especiales** mencionado en relación con la función error también se aplica a la **función seno integral** y a la **integral seno de Fresnel** introducidas en los problemas 49 y 50 de los ejercicios 2.3. "Funciones especiales" es una rama de las matemáticas realmente bien definidas. En la sección 6.3 se estudian funciones más especiales.

*Ciertas instrucciones se deletrean igual, pero las instrucciones en *Mathematica* inician con una letra mayúscula (**Dsolve**) mientras que en *Maple* la misma instrucción comienza con una letra minúscula (**dsolve**). Cuando analizamos la sintaxis de las instrucciones, nos comprometimos y escribimos, por ejemplo *dsolve*.

EJERCICIOS 2.3

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-2.

En los problemas 1 a 24 determine la solución general de la ecuación diferencial dada. Indique el intervalo I más largo en el que está definida la solución general. Determine si hay algunos términos transitorios en la solución general.

1. $\frac{dy}{dx} = 5y$

2. $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

3. $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

4. $3\frac{dy}{dx} + 12y = 4$

5. $y' + 3x^2y = x^2$

6. $y' + 2xy = x^3$

7. $x^2y' + xy = 1$

8. $y' = 2y + x^2 + 5$

9. $x\frac{dy}{dx} - y = x^2 \operatorname{sen} x$

10. $x\frac{dy}{dx} + 2y = 3$

11. $x\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$

12. $(1 + x)\frac{dy}{dx} - xy = x + x^2$

13. $x^2y' + x(x + 2)y = e^x$

14. $xy' + (1 + x)y = e^{-x} \operatorname{sen} 2x$

15. $y\,dx - 4(x + y^6)\,dy = 0$

16. $y\,dx = (ye^y - 2x)\,dy$

17. $\cos x \dfrac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)y = 1$

18. $\cos^2 x \operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dx} + (\cos^3 x)y = 1$

19. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} + (x + 2)y = 2xe^{-x}$

20. $(x + 2)^2 \dfrac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$

21. $\dfrac{dr}{d\theta} + r \sec \theta = \cos \theta$

22. $\dfrac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$

23. $x\dfrac{dy}{dx} + (3x + 1)y = e^{-3x}$

24. $(x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x + 1)^2$

En los problemas 25 a 30 resuelva el problema con valores iniciales. Indique el intervalo I más largo en el que está definida la solución.

25. $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2$

26. $y\dfrac{dx}{dy} - x = 2y^2, \quad y(1) = 5$

27. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E, \quad i(0) = i_0,$
L, R, E e i_0 constantes

28. $\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_m); \quad T(0) = T_0,$
k, T_m y T_0 constantes

29. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x, \quad y(1) = 10$

30. $y' + (\tan x)y = \cos^2 x, \quad y(0) = -1$

En los problemas 31 a 34 proceda como en el ejemplo 6 para resolver el problema con valores iniciales dado. Utilice un programa de graficación para trazar la función continua $y(x)$.

31. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = f(x), y(0) = 0,$ donde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

32. $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x), y(0) = 1,$ donde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}$$

33. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = f(x), y(0) = 2,$ donde

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}$$

34. $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = f(x), y(0) = 0,$ donde

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ -x, & x \ge 1 \end{cases}$$

35. Proceda en una forma similar al ejemplo 6 para resolver el problema con valores iniciales $y' + P(x)y = 4x, y(0) = 3,$ donde

$$P(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1, \\ -2/x, & x > 1. \end{cases}$$

Utilice un programa de graficación para para trazar la gráfica de la función continua $y(x)$.

36. Considere el problema con valores iniciales $y' + e^x y = f(x), y(0) = 1$. Exprese la solución del PVI para $x > 0$ como una integral no elemental cuando $f(x) = 1$. ¿Cuál es la solución cuando $f(x) = 0$? ¿Y cuándo $f(x) = e^x$?

37. Exprese la solución del problema con valores iniciales $y' - 2xy = 1, y(1) = 1$, en términos de $\operatorname{erf}(x)$.

Problemas para analizar

38. Lea nuevamente el análisis siguiente al ejemplo 2. Construya una ecuación diferencial lineal de primer orden para la que todas las soluciones no constantes tienden a la asíntota horizontal $y = 4$ conforme $x \to \infty$.

39. Lea nuevamente el ejemplo 3 y después analice, usando el teorema 1.2.1, la existencia y unicidad de una solución del problema con valores iniciales que consiste en $xy' - 4y = x^6 e^x$ y de la condición inicial dada.

a) $y(0) = 0$ **b)** $y(0) = y_0, y_0 > 0$

c) $y(x_0) = y_0, x_0 > 0, y_0 > 0$

40. Lea nuevamente el ejemplo 4 y después determine la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo $(-3, 3)$.

41. Lea nuevamente el análisis siguiente al ejemplo 5. Construya una ecuación diferencial lineal de primer orden para la que todas las soluciones son asintóticas a la recta $y = 3x - 5$ conforme $x \to \infty$.

42. Lea nuevamente el ejemplo 6 y después analice por qué es técnicamente incorrecto decir que la función en (13) es una "solución" del PVI en el intervalo $[0, \infty)$.

43. **a)** Construya una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma $xy' + a_0(x)y = g(x)$ para la cual $y_c = c/x^3$ y $y_p = x^3$. Dé un intervalo en el que $y = x^3 + c/x^3$ es la solución general de la ED.

b) Dé una condición inicial $y(x_0) = y_0$ para la ED que se determinó en el inciso a) de modo que la solución

del PVI sea $y = x^3 - 1/x^3$. Repita si la solución es $y = x^3 + 2/x^3$. Dé un intervalo de definición I de cada una de estas soluciones. Trace la gráfica de las curvas solución. ¿Hay un problema con valores iniciales cuya solución esté definida en $(-\infty, \infty)$?

c) ¿Es único cada PVI encontrado en el inciso b)? Es decir, puede haber más de un solo PVI para el cual, digamos, $y = x^3 - 1/x^3$, x en algún intervalo I, es la solución?

44. Al determinar el factor integrante (5), no usamos una constante de integración en la evaluación de $\int P(x)\,dx$. Explique por qué usar $\int P(x)\,dx + c$ no tiene efecto en la solución de (2).

45. Suponga que $P(x)$ es continua en algún intervalo I y a es un número en I. ¿Qué se puede decir acerca de la solución del problema con valores iniciales $y' + P(x)y = 0$, $y(a) = 0$?

Modelos matemáticos

46. Series de decaimiento radiactivo El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales se encuentra en el estudio del decaimiento de un tipo especial de series de elementos radiactivos:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_1 x - \lambda_2 y,$$

donde λ_1 y λ_2 son constantes. Analice cómo resolver este sistema sujeto a $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Lleve a cabo sus ideas.

47. Marcapasos de corazón Un marcapasos de corazón consiste en un interruptor, una batería de voltaje constante E_0, un capacitor con capacitancia constante C y un corazón como un resistor con resistencia constante R. Cuando se cierra el interruptor, el capacitor se carga; cuando el interruptor se abre, el capacitor se descarga enviando estímulos eléctricos al corazón. Todo el tiempo el corazón se está estimulando, el voltaje E a través del corazón satisface la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E.$$

Resuelva la ED sujeta a $E(4) = E_0$.

Tarea para el laboratorio de computación

48. a) Exprese la solución del problema con valores iniciales $y' - 2xy = -1$, $y(0) = \sqrt{\pi}/2$, en términos de $\operatorname{erfc}(x)$.

b) Utilice las tablas de un SAC para determinar el valor de $y(2)$. Use un SAC para trazar la gráfica de la curva solución para el PVI en $(-\infty, \infty)$.

49. a) La función **seno integral** está definida por $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x (\operatorname{sen} t/t)\,dt$, donde el integrando está definido igual a 1 en $t = 0$. Exprese la solución $y(x)$ del problema con valores iniciales $x^3y' + 2x^2y = 10 \operatorname{sen} x$, $y(1) = 0$ en términos de $\operatorname{Si}(x)$.

b) Use un SAC para trazar la gráfica de la curva solución para el PVI para $x > 0$.

c) Use un SAC para encontrar el valor del máximo absoluto de la solución $y(x)$ para $x > 0$.

50. a) La **integral seno de Fresnel** está definida por $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt$. Exprese la solución $y(x)$ del problema con valores iniciales $y' - (\operatorname{sen} x^2)y = 0$, $y(0) = 5$, en términos de $S(x)$.

b) Use un SAC para trazar la gráfica de la curva solución para el PVI en $(-\infty, \infty)$.

c) Se sabe que $S(x) \to \frac{1}{2}$ conforme $x \to \infty$ y $S(x) \to -\frac{1}{2}$ conforme $x \to -\infty$. ¿A dónde tiende la solución $y(x)$ cuando $x \to \infty$? ¿Y cuando $x \to -\infty$?

d) Use un SAC para encontrar los valores del máximo absoluto y del mínimo absoluto de la solución $y(x)$.

2.4 ECUACIONES EXACTAS

REPASO DE MATERIAL

- Cálculo de varias variables.
- Derivación parcial e integración parcial.
- Diferencial de una función de dos variables.

INTRODUCCIÓN Aunque la sencilla ecuación diferencial de primer orden

$$y\,dx + x\,dy = 0$$

es separable, podemos resolver la ecuación en una forma alterna al reconocer que la expresión del lado izquierdo de la ecuación es la diferencial de la función $f(x, y) = xy$, es decir

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy.$$

En esta sección analizamos ecuaciones de primer orden en la forma diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$. Aplicando una prueba simple a M y a N, podemos determinar si $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ es una diferencial de una función $f(x, y)$. Si la respuesta es sí, construimos f integrando parcialmente.

DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables con primeras derivadas parciales continuas en una región R del plano xy, entonces su diferencial es

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy. \tag{1}$$

En el caso especial cuando $f(x, y) = c$, donde c es una constante, entonces la ecuación (1) implica que

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0. \tag{2}$$

En otras palabras, dada una familia de curvas $f(x, y) = c$, podemos generar una ecuación diferencial de primer orden si calculamos la diferencial de ambos lados de la igualdad. Por ejemplo, si $x^2 - 5xy + y^3 = c$, entonces la ecuación (2) da la ED de primer orden

$$(2x - 5y)\,dx + (-5x + 3y^2)\,dy = 0. \tag{3}$$

UNA DEFINICIÓN Por supuesto, que no todas las ED de primer orden escritas en la forma $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ corresponden a una diferencial de $f(x, y) = c$. Por tanto para nuestros objetivos es muy importante regresar al problema anterior; en particular, si nos dan una ED de primer orden tal como la ecuación (3), ¿hay alguna forma de reconocer que la expresión diferencial $(2x - 5y)\,dx + (-5x + 3y^2)\,dy$ es la diferencial $d(x^2 - 5xy + y^3)$? Si la hay, entonces una solución implícita de la ecuación (3) es $x^2 - 5xy + y^3 = c$. Podemos contestar esta pregunta después de la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.4.1 Ecuación exacta

Una expresión diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ es una **diferencial exacta** en una región R del plano xy si ésta corresponde a la diferencial de alguna función $f(x, y)$ definida en R. Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

se dice que es una **ecuación exacta** si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta.

Por ejemplo $x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy = 0$ es una ecuación exacta, ya que su lado izquierdo es una diferencial exacta:

$$d\left(\tfrac{1}{3}x^3y^3\right) = x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy.$$

Observe que si hacemos las identificaciones $M(x, y) = x^2y^3$ y $N(x, y) = x^3y^2$, entonces $\partial M/\partial y = 3x^2y^2 = \partial N/\partial x$. El teorema 2.4.1, que se presenta a continuación, muestra que la igualdad de las derivadas parciales $\partial M/\partial y$ y $\partial N/\partial x$ no es una coincidencia.

TEOREMA 2.4.1 Criterio para una diferencial exacta

Sean $M(x, y)$ y $N(x, y)$ continuas y que tienen primeras derivadas parciales continuas en una región rectangular R definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Entonces una condición necesaria y suficiente para que $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ sea una diferencial exacta es

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{4}$$

PRUEBA DE LA NECESIDAD Por simplicidad suponemos que $M(x, y)$ y $N(x, y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas para todo (x, y). Ahora si la expresión $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ es exacta, existe alguna función f tal que para toda x en R,

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Por tanto
$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y},$$

y
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La igualdad de las parciales mixtas es una consecuencia de la continuidad de las primeras derivadas parciales de $M(x, y)$ y $N(x, y)$. ■

La parte de suficiencia del teorema 2.4.1 consiste en mostrar que existe una función f para la que $\partial f/\partial x = M(x, y)$ y $\partial f/\partial y = N(x, y)$ siempre que la ecuación (4) sea válida. La construcción de la función f en realidad muestra un procedimiento básico para resolver ecuaciones exactas.

MÉTODO DE SOLUCIÓN Dada una ecuación en la forma diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, determine si la igualdad de la ecuación (4) es válida. Si es así, entonces existe una función f para la que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y).$$

Podemos determinar f integrando $M(x, y)$ respecto a x mientras y se conserva constante:

$$f(x, y) = \int M(x, y)\,dx + g(y), \tag{5}$$

donde la función arbitraria $g(y)$ es la "constante" de integración. Ahora derivando (5) respecto a y y suponiendo que $\partial f/\partial y = N(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx + g'(y) = N(x, y).$$

Se obtiene
$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx. \tag{6}$$

Por último, se integra la ecuación (6) respecto a y y se sustituye el resultado en la ecuación (5). La solución implícita de la ecuación es $f(x, y) = c$.

Haremos algunas observaciones en orden. Primero, es importante darse cuenta de que la expresión $N(x, y) - (\partial/\partial y)\int M(x, y)\,dx$ en (6) es independiente de x, ya que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x, y)\,dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Segunda, pudimos iniciar bien el procedimiento anterior con la suposición de que $\partial f/\partial y = N(x, y)$. Después, integrando N respecto a y y derivando este resultado, encontraríamos las ecuaciones que, respectivamente, son análogas a las ecuaciones (5) y (6),

$$f(x, y) = \int N(x, y)\,dy + h(x) \qquad \text{y} \qquad h'(x) = M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x, y)\,dy.$$

En ninguno de ambos casos *se deben memorizar estas fórmulas.*

EJEMPLO 1 Resolviendo una ED exacta

Resuelva $2xy\,dx + (x^2 - 1)\,dy = 0$.

SOLUCIÓN Con $M(x, y) = 2xy$ y $N(x, y) = x^2 - 1$ tenemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Así la ecuación es exacta y por el teorema 2.4.1 existe una función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1.$$

Al integrar la primera de estas ecuaciones, se obtiene:

$$f(x, y) = x^2y + g(y).$$

Tomando la derivada parcial de la última expresión con respecto a y y haciendo el resultado igual a $N(x, y)$ se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 1. \qquad \leftarrow N(x, y)$$

Se tiene que $g'(y) = -1$ y $g(y) = -y$. Por tanto $f(x, y) = x^2y - y$, así la solución de la ecuación en la forma implícita es $x^2y - y = c$. La forma explícita de la solución se ve fácilmente como $y = c/(1 - x^2)$ y está definida en cualquier intervalo que no contenga ni a $x = 1$ ni a $x = -1$. ■

NOTA La solución de la ED en el ejemplo 1 *no* es $f(x, y) = x^2y - y$. Sino que es $f(x, y) = c$; si se usa una constante en la integración de $g'(y)$, podemos escribir la solución como $f(x, y) = 0$. Observe que la ecuación también se podría haber resuelto por separación de variables.

EJEMPLO 2 Solución de una ED exacta

Resuelva $(e^{2y} - y\cos xy)\,dx + (2xe^{2y} - x\cos xy + 2y)\,dy = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación es exacta ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} + xy\,\text{sen}\,xy - \cos xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Por tanto existe una función $f(x, y)$ para la cual

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ahora, para variar, comenzaremos con la suposición de que $\partial f/\partial y = N(x, y)$; es decir

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} - x\cos xy + 2y$$

$$f(x, y) = 2x\int e^{2y}\,dy - x\int \cos xy\,dy + 2\int y\,dy.$$

Recuerde que la razón por la que x sale del símbolo $\int$ es que en la integración respecto a y se considera que x es una constante ordinaria. Entonces se tiene que

$$f(x, y) = xe^{2y} - \operatorname{sen} xy + y^2 + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2y} - y\cos xy + h'(x) = e^{2y} - y\cos xy, \quad \leftarrow M(x, y)$$

y así $h'(x) = 0$ o $h(x) = c$. Por tanto una familia de soluciones es

$$xe^{2y} - \operatorname{sen} xy + y^2 + c = 0.$$

EJEMPLO 3 Problema con valores iniciales

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1 - x^2)}, \quad y(0) = 2.$

SOLUCIÓN Al escribir la ecuación diferencial en la forma

$$(\cos x \operatorname{sen} x - xy^2)\,dx + y(1 - x^2)\,dy = 0,$$

reconocemos que la ecuación es exacta porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Ahora

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y(1 - x^2)$$

$$f(x, y) = \frac{y^2}{2}(1 - x^2) + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -xy^2 + h'(x) = \cos x \operatorname{sen} x - xy^2.$$

La última ecuación implica que $h'(x) = \cos x \operatorname{sen} x$. Integrando se obtiene

$$h(x) = -\int (\cos x)(-\operatorname{sen} x\,dx) = -\frac{1}{2}\cos^2 x.$$

Por tanto $\dfrac{y^2}{2}(1 - x^2) - \dfrac{1}{2}\cos^2 x = c_1 \quad \text{o} \quad y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = c, \qquad (7)$

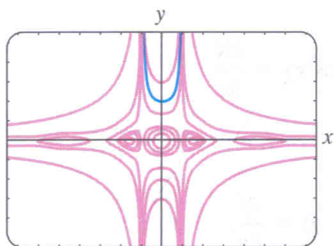


FIGURA 2.4.1 Algunas gráficas de los miembros de la familia $y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = c$.

donde se sustituye $2c_1$ por c. La condición inicial $y = 2$ cuando $x = 0$ exige que $4(1) - \cos^2(0) = c$, y por tanto $c = 3$. Una solución implícita del problema es entonces $y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = 3$.

En la figura 2.4.1, la curva solución del PVI es la curva dibujada en azul oscuro, y forma parte de una interesante familia de curvas. Las gráficas de los miembros de la familia uniparamétrica de soluciones dadas en la ecuación (7) se puede obtener de diferentes maneras, dos de las cuales son utilizando un paquete de computación para trazar gráficas de curvas de nivel (como se analizó en la sección 2.2) y usando un programa de graficación para dibujar cuidadosamente la gráfica de las funciones explícitas obtenidas para diferentes valores de c despejando a y de $y^2 = (c + \cos^2 x)/(1 - x^2)$ para y.

FACTORES INTEGRANTES Recuerde de la sección 2.3 que el lado izquierdo de la ecuación lineal $y' + P(x)y = f(x)$ se puede transformar en una derivada cuando multiplicamos la ecuación por el factor integrante. Esta misma idea básica algunas veces funciona bien para una ecuación diferencial no exacta $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$.

Es decir, algunas veces es posible encontrar un **factor integrante** $\mu(x, y)$ de manera que, después de multiplicar el lado izquierdo de

$$\mu(x, y)M(x, y)\,dx + \mu(x, y)N(x, y)\,dy = 0 \tag{8}$$

es una diferencial exacta. En un intento por encontrar μ, regresamos al criterio (4) de la exactitud. La ecuación (8) es exacta si y sólo si $(\mu M)_y = (\mu N)_x$, donde los subíndices denotan derivadas parciales. Por la regla del producto de la derivación la última ecuación es la misma que $\mu M_y + \mu_y M = \mu N_x + \mu_x N$ o

$$\mu_x N - \mu_y M = (M_y - N_x)\mu. \tag{9}$$

Aunque M, N, M_y y N_x son funciones conocidas de x y y, la dificultad aquí al determinar la incógnita $\mu(x, y)$ de la ecuación (9) es que debemos resolver una ecuación diferencial parcial. Como no estamos preparados para hacerlo, haremos una hipótesis para simplificar. Suponga que μ es una función de una variable; por ejemplo, μ depende sólo de x. En este caso, $\mu_x = d\mu/dx$ y $\mu_y = 0$, así la ecuación (9) se puede escribir como

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu. \tag{10}$$

Estamos aún en un callejón sin salida si el cociente $(M_y - N_x)/N$ depende tanto de x como de y. Sin embargo, si después de que se hacen todas las simplificaciones algebraicas el cociente $(M_y - N_x)/N$ resulta que depende sólo de la variable x, entonces la ecuación (10) es *separable* así como *lineal*. Entonces de la sección 2.2 o de la sección 2.3 tenemos que $\mu(x) = e^{\int((M_y - N_x)/N)dx}$. Análogamente, de la ecuación (9) tenemos que si μ depende sólo de la variable y, entonces

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M}\mu. \tag{11}$$

En este caso, si $(N_x - M_y)/M$ es una función sólo de y, podemos despejar μ de la ecuación (11).

Resumiendo estos resultados para la ecuación diferencial.

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{12}$$

- Si $(M_y - N_x)/N$ es una función sólo de x, entonces un factor integrante para la ecuación (12) es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}dx}. \tag{13}$$

- Si $(N_x - M_y)/M$ es una función sólo de y, entonces un factor integrante de (12) es

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M}dy}. \tag{14}$$

EJEMPLO 4 Una ED no exacta hecha exacta

La ecuación diferencial no lineal de primer orden

$$xy\,dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)\,dy = 0$$

es no exacta. Identificando $M = xy$, $N = 2x^2 + 3y^2 - 20$, encontramos que las derivadas parciales $M_y = x$ y $N_x = 4x$. El primer cociente de la ecuación (13) no nos conduce a nada, ya que

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x - 4x}{2x^2 + 3y^2 - 20} = \frac{-3x}{2x^2 + 3y^2 - 20}$$

depende de x y de y. Sin embargo, la ecuación (14) produce un cociente que depende sólo de y:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{4x - x}{xy} = \frac{3x}{xy} = \frac{3}{y}.$$

El factor integrante es entonces $e^{\int 3dy/y} = e^{3\ln y} = e^{\ln y^3} = y^3$. Después de multiplicar la ED dada por $\mu(y) = y^3$, la ecuación resultante es

$$xy^4\,dx + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3)\,dy = 0.$$

Usted debería comprobar que la última ecuación es ahora exacta así como mostrar, usando el método que se presentó en esta sección, que una familia de soluciones es

$$\tfrac{1}{2}x^2y^4 + \tfrac{1}{2}y^6 - 5y^4 = c.$$

■

COMENTARIOS

i) Cuando pruebe la exactitud de una ecuación, se debe asegurar que tiene exactamente la forma $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$. Algunas veces una ecuación diferencial se escribe como $G(x, y)\,dx = H(x, y)\,dy$. En este caso, primero rescriba como $G(x, y)\,dx - H(x, y)\,dy = 0$ y después identifique $M(x, y) = G(x, y)$ y $N(x, y) = -H(x, y)$ antes de utilizar la ecuación (4).

ii) En algunos libros de ecuaciones diferenciales el estudio de las ecuaciones exactas precede al de las ED lineales. Entonces el método que acabamos de describir para encontrar los factores integrantes se puede utilizar para deducir un factor integrante para $y' + P(x)\,y = f(x)$. Reescribiendo la última ecuación en la forma diferencial $(P(x)y - f(x))\,dx + dy = 0$, vemos que

$$\frac{M_y - N_x}{N} = P(x).$$

A partir de la ecuación (13) hemos obtenido el conocido factor integrante $e^{\int P(x)dx}$, utilizado en la sección 2.3.

EJERCICIOS 2.4

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-2.

En los problemas 1 a 20 determine si la ecuación diferencial dada es exacta. Si lo es, resuélvala.

1. $(2x - 1)\,dx + (3y + 7)\,dy = 0$

2. $(2x + y)\,dx - (x + 6y)\,dy = 0$

3. $(5x + 4y)\,dx + (4x - 8y^3)\,dy = 0$

4. $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)\,dx + (\cos x + x\cos y - y)\,dy = 0$

5. $(2xy^2 - 3)\,dx + (2x^2y + 4)\,dy = 0$

6. $\left(2y - \dfrac{1}{x} + \cos 3x\right)\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \operatorname{sen} 3x = 0$

7. $(x^2 - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy = 0$

8. $\left(1 + \ln x + \dfrac{y}{x}\right)dx = (1 - \ln x)\,dy$

9. $(x - y^3 + y^2 \operatorname{sen} x)\,dx = (3xy^2 + 2y\cos x)\,dy$

10. $(x^3 + y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$

11. $(y\ln y - e^{-xy})\,dx + \left(\dfrac{1}{y} + x\ln y\right)dy = 0$

12. $(3x^2y + e^y)\,dx + (x^3 + xe^y - 2y)\,dy = 0$

13. $x\dfrac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$

14. $\left(1 - \dfrac{3}{y} + x\right)\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{3}{x} - 1$

15. $\left(x^2y^3 - \dfrac{1}{1 + 9x^2}\right)\dfrac{dx}{dy} + x^3y^2 = 0$

16. $(5y - 2x)y' - 2y = 0$

17. $(\tan x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dx + \cos x\cos y\,dy = 0$

18. $(2y \operatorname{sen} x\cos x - y + 2y^2e^{xy^2})\,dx$
$= (x - \operatorname{sen}^2 x - 4xye^{xy^2})\,dy$

19. $(4t^3y - 15t^2 - y)\,dt + (t^4 + 3y^2 - t)\,dy = 0$

20. $\left(\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{y}{t^2 + y^2}\right)dt + \left(ye^y + \dfrac{t}{t^2 + y^2}\right)dy = 0$

En los problemas 21 a 26 resuelva el problema con valores iniciales.

21. $(x + y)^2\, dx + (2xy + x^2 - 1)\, dy = 0, \quad y(1) = 1$

22. $(e^x + y)\, dx + (2 + x + ye^y)\, dy = 0, \quad y(0) = 1$

23. $(4y + 2t - 5)\, dt + (6y + 4t - 1)\, dy = 0, \quad y(-1) = 2$

24. $\left(\dfrac{3y^2 - t^2}{y^5}\right)\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{t}{2y^4} = 0, \quad y(1) = 1$

25. $(y^2 \cos x - 3x^2y - 2x)\, dx$
$+ (2y \operatorname{sen} x - x^3 + \ln y)\, dy = 0, \quad y(0) = e$

26. $\left(\dfrac{1}{1 + y^2} + \cos x - 2xy\right)\dfrac{dy}{dx} = y(y + \operatorname{sen} x), \ y(0) = 1$

En los problemas 27 y 28 determine el valor de k para el que la ecuación diferencial es exacta.

27. $(y^3 + kxy^4 - 2x)\, dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)\, dy = 0$

28. $(6xy^3 + \cos y)\, dx + (2kx^2y^2 - x \operatorname{sen} y)\, dy = 0$

En los problemas 29 y 30 compruebe que la ecuación diferencial dada es no exacta. Multiplique la ecuación diferencial dada por el factor integrante indicado $\mu(x, y)$ y compruebe que la nueva ecuación es exacta. Resuelva.

29. $(-xy \operatorname{sen} x + 2y \cos x)\, dx + 2x \cos x\, dy = 0;$
$\mu(x, y) = xy$

30. $(x^2 + 2xy - y^2)\, dx + (y^2 + 2xy - x^2)\, dy = 0;$
$\mu(x, y) = (x + y)^{-2}$

En los problemas 31 a 36 resuelva la ecuación diferencial dada determinando, como en el ejemplo 4, un factor integrante adecuado.

31. $(2y^2 + 3x)\, dx + 2xy\, dy = 0$

32. $y(x + y + 1)\, dx + (x + 2y)\, dy = 0$

33. $6xy\, dx + (4y + 9x^2)\, dy = 0$

34. $\cos x\, dx + \left(1 + \dfrac{2}{y}\right) \operatorname{sen} x\, dy = 0$

35. $(10 - 6y + e^{-3x})\, dx - 2\, dy = 0$

36. $(y^2 + xy^3)\, dx + (5y^2 - xy + y^3 \operatorname{sen} y)\, dy = 0$

En los problemas 37 y 38 resuelva el problema con valores iniciales determinando, como en el ejemplo 5, un factor integrante adecuado.

37. $x\, dx + (x^2y + 4y)\, dy = 0, \quad y(4) = 0$

38. $(x^2 + y^2 - 5)\, dx = (y + xy)\, dy, \quad y(0) = 1$

39. **a)** Demuestre que una familia de soluciones uniparamétrica de soluciones de la ecuación

$$(4xy + 3x^2)\, dx + (2y + 2x^2)\, dy = 0$$

es $x^3 + 2x^2y + y^2 = c$.

b) Demuestre que las condiciones iniciales $y(0) = -2$ y $y(1) = 1$ determinan la misma solución implícita.

c) Encuentre las soluciones explícitas $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ecuación diferencial del inciso a) tal que $y_1(0) = -2$ y $y_2(1) = 1$. Utilice un programa de graficación para trazar la gráfica de $y_1(x)$ y $y_2(x)$.

Problemas para analizar

40. Considere el concepto de factor integrante utilizado en los problemas 29 a 38. ¿Son las dos ecuaciones $Mdx + N\, dy = 0$ y $\mu M\, dx + \mu N\, dy = 0$ necesariamente equivalentes en el sentido de que la solución de una es también una solución de la otra? Analice.

41. Lea nuevamente el ejemplo 3 y después analice por qué podemos concluir que el intervalo de definición de la solución explícita del PVI (curva azul de la figura 2.4.1) es $(-1, 1)$.

42. Analice cómo se pueden encontrar las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ tal que cada ecuación diferencial sea exacta. Lleve a cabo sus ideas.

a) $M(x, y)\, dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \dfrac{1}{x}\right) dy = 0$

b) $\left(x^{-1/2}y^{1/2} + \dfrac{x}{x^2 + y}\right) dx + N(x, y)\, dy = 0$

43. Algunas veces las ecuaciones diferenciales se resuelven con una idea brillante. Este es un pequeño ejercicio de inteligencia: aunque la ecuación $(x - \sqrt{x^2 + y^2})\, dx + y\, dy = 0$ no es exacta, demuestre cómo el reacomodo $(x\, dx + y\, dy)/\sqrt{x^2 + y^2} = dx$ y la observación $\frac{1}{2}d(x^2 + y^2) = x\, dx + y\, dy$ puede conducir a una solución.

44. Verdadero o falso: toda ecuación de primer orden separable $dy/dx = g(x)h(y)$ es exacta.

Modelos matemáticos

45. **Cadena cayendo** Una parte de una cadena de 8 pies de longitud está enrollada sin apretar alrededor de una clavija en el borde de una plataforma horizontal y la parte restante de la cadena cuelga descansando sobre el borde de la plataforma. Vea la figura 2.4.2. Suponga que la longitud de la cadena que cuelga es de 3 pies, que la cadena pesa 2 lb/pie y que la dirección positiva es hacia abajo. Comenzando en $t = 0$ segundos, el peso de la cadena que cuelga causa que la cadena sobre la plataforma se desenrolle suavemente y caiga al piso. Si $x(t)$ denota la longitud de la cadena que cuelga de la mesa al tiempo $t > 0$, entonces $v = dx/dt$ es su velocidad. Cuando se desprecian todas las

fuerzas de resistencia se puede demostrar que un modelo matemático que relaciona a v con x está dado por

$$xv\frac{dv}{dx} + v^2 = 32x.$$

a) Rescriba este modelo en forma diferencial. Proceda como en los problemas 31 a 36 y resuelva la ED para v en términos de x determinando un factor integrante adecuado. Determine una solución explícita $v(x)$.

b) Determine la velocidad con que la cadena abandona la plataforma.

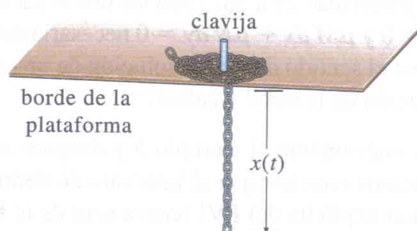


FIGURA 2.4.2 Cadena desenrollada del problema 45.

Tarea para el laboratorio de computación

46. Líneas de flujo

a) La solución de la ecuación diferencial

$$\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \left[1 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]dy = 0$$

es una familia de curvas que se pueden interpretar como líneas de flujo de un fluido que discurre alrededor de un objeto circular cuya frontera está descrita por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Resuelva esta ED y observe que la solución $f(x, y) = c$ para $c = 0$.

b) Use un SAC para dibujar las líneas de flujo para $c = 0$, ± 0.2, ± 0.4, ± 0.6 y ± 0.8 de tres maneras diferentes. Primero, utilice el *contourplot* de un SAC. Segundo, despeje x en términos de la variable y. Dibuje las dos funciones resultantes de y para los valores dados de c, y después combine las gráficas. Tercero, utilice el SAC para despejar y de una ecuación cúbica en términos de x.

2.5 SOLUCIONES POR SUSTITUCIÓN

REPASO DE MATERIAL

- Técnicas de integración.
- Separación de variables.
- Solución de ED.

INTRODUCCIÓN Normalmente resolvemos una ecuación diferencial reconociéndola dentro de una cierta clase de ecuaciones (digamos separables, lineales o exactas) y después aplicamos un procedimiento, que consiste en *pasos matemáticos específicos para el tipo de ecuación* que nos conducen a la solución de la misma. Pero no es inusual que nos sorprenda el tener una ecuación diferencial que no pertenece a alguna de las clases de ecuaciones que sabemos cómo resolver. Los procedimientos que se analizan en esta sección pueden ser útiles en este caso.

SUSTITUCIONES Con frecuencia el primer paso para resolver una ecuación diferencial es transformarla en otra ecuación diferencial mediante una **sustitución**. Por ejemplo, suponga que se quiere transformar la ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ sustituyendo $y = g(x, u)$, donde u se considera una función de la variable x. Si g tiene primeras derivadas parciales, entonces, usando la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{du}{dx} \quad \text{obtenemos} \quad \frac{dy}{dx} = g_x(x, u) + g_u(x, u)\frac{du}{dx}.$$

Al sustituir dy/dx por la derivada anterior y sustituyendo y en $f(x, y)$ por $g(x, u)$, obtenemos la ED $dy/dx = f(x, y)$ que se convierten en $g_x(x, u) + g_u(x, u)\dfrac{du}{dx} = f(x, g(x, u))$, la cual, resuelta para $\dfrac{du}{dx}$, tiene la forma $\dfrac{du}{dx} = F(x, u)$. Si podemos determinar una solución $u = \phi(x)$ de esta última ecuación, entonces una solución de la ecuación diferencial original es $y(x) = g(x, \phi(x))$.

En el análisis siguiente examinaremos tres clases diferentes de ecuaciones diferenciales de primer orden que se pueden resolver mediante una sustitución.

ECUACIONES HOMÓGENEAS Si una función f tiene la propiedad $f(tx, ty) = t^{\alpha}f(x, y)$ para algún número real α, entonces se dice que es una **función homogénea** de grado α. Por ejemplo $f(x, y) = x^3 + y^3$ es una función homogénea de grado 3, ya que

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3(x^3 + y^3) = t^3f(x, y),$$

mientras que $f(x, y) = x^3 + y^3 + 1$ es no homogénea. Una ED de primer orden en forma diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

se dice que es **homogénea*** si ambas funciones coeficientes M y N son ecuaciones homogéneas del *mismo* grado. En otras palabras, la ecuación (1) es homogénea si

$$M(tx, ty) = t^{\alpha}M(x, y) \quad \text{y} \quad N(tx, ty) = t^{\alpha}N(x, y).$$

Además, si M y N son funciones homogéneas de grado α, podemos escribir

$$M(x, y) = x^{\alpha}M(1, u) \quad \text{y} \quad N(x, y) = x^{\alpha}N(1, u) \quad \text{donde } u = y/x, \tag{2}$$

y

$$M(x, y) = y^{\alpha}M(v, 1) \quad \text{y} \quad N(x, y) = y^{\alpha}N(v, 1) \quad \text{donde } v = x/y. \tag{3}$$

Vea el problema 31 de los ejercicios 2.5. Las propiedades (2) y (3) sugieren las sustituciones que se pueden usar para resolver una ecuación diferencial homogénea. En concreto, *cualquiera de las* sustituciones $y = ux$ o $x = vy$, donde u y v son las nuevas variables dependientes, reducirán una ecuación homogénea a una ecuación diferencial de primer orden *separable*. Para mostrar esto, observe que como consecuencia de (2) una ecuación homogénea $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ se puede reescribir como

$$x^{\alpha}M(1, u)\,dx + x^{\alpha}N(1, u)\,dy = 0 \qquad \text{o bien} \qquad M(1, u)\,dx + N(1, u)\,dy = 0,$$

donde $u = y/x$ o $y = ux$. Sustituyendo la diferencial $dy = u\,dx + x\,du$ en la última ecuación y agrupando términos, obtenemos una ED separable en las variables u y x:

$$M(1, u)\,dx + N(1, u)[u\,dx + x\,du] = 0$$

$$[M(1, u) + uN(1, u)]\,dx + xN(1, u)\,du = 0$$

o

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, u)\,du}{M(1, u) + uN(1, u)} = 0.$$

En este momento le damos el mismo consejo que en las secciones anteriores. No memorice nada de aquí (en particular la última fórmula); más bien, *cada vez siga el procedimiento*. Pruebe a partir de la ecuación (3) que las sustituciones $x = vy$ y $dx = v\,dy + y\,dv$ también conducen a una ecuación separable siguiendo un procedimiento similar.

EJEMPLO 1 Solución de una ED homogénea

Resuelva $(x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$.

SOLUCIÓN Examinando a $M(x, y) = x^2 + y^2$ y a $N(x, y) = x^2 - xy$ se muestra que estas funciones coeficientes son homogéneas de grado 2. Si hacemos $y = ux$, entonces

*Aquí la palabra *homogénea* no significa lo mismo que en la sección 2.3. Recuerde que una ecuación lineal de primer orden $a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$ es homogénea cuando $g(x) = 0$.

$dy = u\,dx + x\,du$, de modo que después de sustituir, la ecuación dada se convierte en

$$(x^2 + u^2x^2)\,dx + (x^2 - ux^2)[u\,dx + x\,du] = 0$$
$$x^2(1 + u)\,dx + x^3(1 - u)\,du = 0$$
$$\frac{1 - u}{1 + u}\,du + \frac{dx}{x} = 0$$
$$\left[-1 + \frac{2}{1 + u}\right]du + \frac{dx}{x} = 0. \quad \leftarrow \text{división larga}$$

Después de integrar la última ecuación se obtiene

$$-u + 2\ln|1 + u| + \ln|x| = \ln|c|$$
$$-\frac{y}{x} + 2\ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + \ln|x| = \ln|c|. \quad \leftarrow \text{sustituyendo de nuevo } u = y/x$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos, podemos escribir la solución anterior como

$$\ln\left|\frac{(x + y)^2}{cx}\right| = \frac{y}{x} \quad \text{o} \quad (x + y)^2 = cxe^{y/x}.$$

■

Aunque cualquiera de las soluciones indicadas se puede usar en toda ecuación diferencial homogénea, en la práctica se intenta con $x = vy$ cuando la función $M(x, y)$ sea más fácil que $N(x, y)$. También podría ocurrir que después de utilizar una sustitución, podemos encontrar integrales que son difíciles o imposibles de evaluar en forma cerrada; y el cambiar las sustituciones puede facilitar el problema.

ECUACIÓN DE BERNOULLI La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n, \tag{4}$$

donde n es cualquier número real, se llama **ecuación de Bernoulli.** Observe que para $n = 0$ y $n = 1$, la ecuación (4) es lineal. Para $n \neq 0$ y $n \neq 1$ la sustitución $u = y^{1-n}$ reduce cualquier ecuación de la forma (4) a una ecuación lineal.

EJEMPLO 2 Solución de una ED de Bernoulli

Resuelva $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^2y^2$.

SOLUCIÓN Primero reescribimos la ecuación como

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

al dividir entre x. Con $n = 2$ tenemos $u = y^{-1}$ o $y = u^{-1}$. Entonces sustituimos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx} \quad \leftarrow \text{Regla de la cadena}$$

en la ecuación dada y simplificando. El resultado es

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -x.$$

El factor integrante para esta ecuación lineal en, digamos, $(0, \infty)$ es

$$e^{-\int dx/x} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}.$$

Integrando

$$\frac{d}{dx}[x^{-1}u] = -1$$

se obtiene $x^{-1}u = -x + c$ o $u = -x^2 + cx$. Puesto que $u = y^{-1}$, tenemos que $y = 1/u$, así una solución de la ecuación dada es $y = 1/(-x^2 + cx)$. ■

Observe que no hemos obtenido una solución general de la ecuación diferencial no lineal original del ejemplo 2 ya que $y = 0$ es una solución singular de la ecuación.

REDUCCIÓN A SEPARACIÓN DE VARIABLES Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C) \tag{5}$$

Se puede siempre reducir a una ecuación con variables separables por medio de la sustitución $u = Ax + By + C$, $B \neq 0$. El ejemplo 9 muestra la técnica.

EJEMPLO 3 Un problema con valores iniciales

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = (-2x + y)^2 - 7, \quad y(0) = 0.$

SOLUCIÓN Si hacemos $u = -2x + y$, entonces $du/dx = -2 + dy/dx$, por lo que la ecuación diferencial se expresa como

$$\frac{du}{dx} + 2 = u^2 - 7 \qquad \text{o} \qquad \frac{du}{dx} = u^2 - 9.$$

La última ecuación es separable. Utilizando fracciones parciales

$$\frac{du}{(u-3)(u+3)} = dx \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{6}\left[\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3}\right] du = dx$$

y después de integrar se obtiene

$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right| = x + c_1 \qquad \text{o} \qquad \frac{u-3}{u+3} = e^{6x+6c_1} = ce^{6x}. \leftarrow \text{sustituyendo } e^{6c_1} \text{ por } c$$

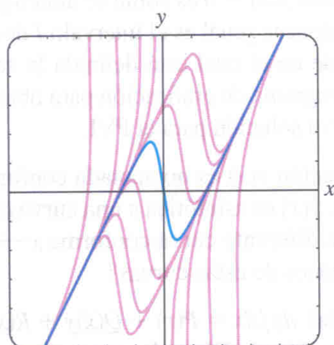


FIGURA 2.5.1 Algunas soluciones de $y' = (-2x + y)^2 - 7$.

Despejando u de la última ecuación y resustituyendo a u en términos de x y y, se obtiene la solución

$$u = \frac{3(1 + ce^{6x})}{1 - ce^{6x}} \qquad \text{o} \qquad y = 2x + \frac{3(1 + ce^{6x})}{1 - ce^{6x}}. \tag{6}$$

Por último, aplicando la condición inicial $y(0) = 0$ a la última ecuación en (6) se obtiene $c = -1$. La figura 2.5.1, obtenida con la ayuda de un programa de graficación, muestra en azul oscuro la gráfica de la solución particular $y = 2x + \dfrac{3(1 - e^{6x})}{1 + e^{6x}}$ junto con las gráficas de algunos otros miembros de la familia de soluciones (6). ■

EJERCICIOS 2.5

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-2.

Cada una de las ED de los problemas 1-14 es homogénea.

En los problemas 1 a 10 resuelva la ecuación diferencial dada usando las sustituciones adecuadas.

1. $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$ **2.** $(x + y)\,dx + x\,dy = 0$

3. $x\,dx + (y - 2x)\,dy = 0$ **4.** $y\,dx = 2(x + y)\,dy$

5. $(y^2 + yx)\,dx - x^2\,dy = 0$

6. $(y^2 + yx)\,dx + x^2\,dy = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x}{y + x}$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{3x + y}$

9. $-y\,dx + \left(x + \sqrt{xy}\right)dy = 0$

10. $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}, \quad x > 0$

En los problemas 11 a 14 resuelva el problema con valores iniciales dado.

11. $xy^2\dfrac{dy}{dx} = y^3 - x^3, \quad y(1) = 2$

12. $(x^2 + 2y^2)\dfrac{dx}{dy} = xy, \quad y(-1) = 1$

13. $(x + ye^{y/x})\,dx - xe^{y/x}\,dy = 0, \quad y(1) = 0$

14. $y\,dx + x(\ln x - \ln y - 1)\,dy = 0, \quad y(1) = e$

Cada una de las ED de los problemas 15 a 22 es una ecuación de Bernoulli.

En los problemas 15 a 20 resuelva la ecuación diferencial dada usando una sustitución adecuada.

15. $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$ **16.** $\dfrac{dy}{dx} - y = e^x y^2$

17. $\dfrac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$ **18.** $x\dfrac{dy}{dx} - (1 + x)y = xy^2$

19. $t^2\dfrac{dy}{dt} + y^2 = ty$ **20.** $3(1 + t^2)\dfrac{dy}{dt} = 2ty(y^3 - 1)$

En los problemas 21 y 22 resuelva el problema con valores iniciales dado.

21. $x^2\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4, \quad y(1) = \frac{1}{2}$

22. $y^{1/2}\dfrac{dy}{dx} + y^{3/2} = 1, \quad y(0) = 4$

Cada una de las ED de los problemas 23 a 30 es de la forma dada en la ecuación (5).

En los problemas 23 a 28 resuelva la ecuación diferencial dada usando una sustitución adecuada.

23. $\dfrac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$ **24.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x - y}{x + y}$

25. $\dfrac{dy}{dx} = \tan^2(x + y)$ **26.** $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x + y)$

27. $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$ **28.** $\dfrac{dy}{dx} = 1 + e^{y-x+5}$

En los problemas 29 y 30 resuelva el problema con valores iniciales dado.

29. $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x + y), \quad y(0) = \pi/4$

30. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x + 2y}{3x + 2y + 2}, \quad y(-1) = -1$

Problemas para analizar

31. Explique por qué es posible expresar cualquier ecuación diferencial homogénea $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ en la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Podría comenzar por demostrar que

$M(x, y) = x^\alpha M(1, y/x)$ y $N(x, y) = x^\alpha N(1, y/x)$.

32. Ponga la ecuación diferencial homogénea

$$(5x^2 - 2y^2)\,dx - xy\,dy = 0$$

en la forma dada en el problema 31.

33. a) Determine dos soluciones singulares de la ED en el problema 10.

b) Si la condición inicial $y(5) = 0$ es como se indicó para el problema 10, entonces ¿cuál es el intervalo I de definición más grande en el cual está definida la solución? Utilice un programa de graficación para obtener la gráfica de la curva solución para el PVI.

34. En el ejemplo 3 la solución $y(x)$ es no acotada conforme $x \to \pm\infty$. Sin embargo, $y(x)$ es asintótica a una curva conforme $x \to -\infty$ y a una diferente curva conforme $x \to \infty$. ¿Cuáles son las ecuaciones de estas curvas?

35. La ecuación diferencial $dy/dx = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$ se conoce como la **ecuación de Riccati.**

a) Una ecuación de Riccati se puede resolver por dos sustituciones consecutivas, *siempre y cuando* conoz-

camos una solución particular, y_1, de la ecuación. Muestre que la sustitución $y = y_1 + u$ reduce la ecuación de Riccati a una ecuación de Bernoulli (4) con $n = 2$. La ecuación de Bernoulli se puede entonces reducir a una ecuación lineal sustituyendo $w = u^{-1}$.

b) Determine una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$$

donde $y_1 = 2/x$ es una solución conocida de la ecuación.

36. Determine una sustitución adecuada para resolver

$$xy' = y \ln(xy).$$

Modelos matemáticos

37. Cadena cayendo En el problema 45 de los ejercicios 2.4 vimos que un modelo matemático para la velocidad v de una cadena que se desliza por el borde de una plataforma horizontal es

$$xv\frac{dv}{dx} + v^2 = 32x.$$

En ese problema se le pidió que resolviera la ED convirtiéndola en una ecuación exacta usando un factor integrante. Esta vez resuelva la ED usando el hecho de que es una ecuación de Bernoulli.

38. Crecimiento de la población En el estudio de la población dinámica uno de los más famosos modelos para un crecimiento poblacional limitado es la **ecuación logística**

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP),$$

donde a y b son constantes positivas. Aunque retomaremos esta ecuación y la resolveremos utilizando un método alternativo en la sección 3.2, resuelva la ED por esta primera vez usando el hecho de que es una ecuación de Bernoulli.

2.6 UN MÉTODO NUMÉRICO

INTRODUCCIÓN Una ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$ es una fuente de información. Comenzaremos este capítulo observando que podríamos recolectar información *cualitativa* de una ED de primer orden respecto a sus soluciones aun antes de intentar resolver la ecuación. Entonces en las secciones 2.2 a 2.5 examinamos a las ED de primer orden *analíticamente,* es decir, desarrollamos algunos procedimientos para obtener soluciones explícitas e implícitas. Pero una ecuación diferencial puede tener una solución aun cuando no podamos obtenerla analíticamente. Así que para redondear el esquema de los diferentes tipos de análisis de las ecuaciones diferenciales, concluimos este capítulo con un método con el cual podemos "resolver" la ecuación diferencial *numéricamente;* esto significa que la ED se utiliza como el principio básico de un algoritmo para aproximar a la solución desconocida.

En esta sección vamos a desarrollar únicamente el más sencillo de los métodos numéricos, un método que utiliza la idea de que se puede usar una recta tangente para aproximar los valores de una función en una pequeña vecindad del punto de tangencia. En el capítulo 9 se presenta un tratamiento más extenso de los métodos numéricos.

USANDO LA RECTA TANGENTE Suponemos que el problema con valores iniciales

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

tiene una solución. Una manera de aproximar esta solución es usar rectas tangentes. Por ejemplo, sea que $y(x)$ denote la solución incógnita para el problema con valores iniciales $y' = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$, $y(2) = 4$. La ecuación diferencial no lineal en este PVI no se puede resolver directamente por cualquiera de los métodos considerados en las secciones 2.2, 2.4 y 2.5; no obstante, aún podemos encontrar valores numéricos aproximados de la incógnita $y(x)$. En concreto, supongamos que deseamos conocer el valor de $y(2, 5)$. El PVI tiene una solución y como el flujo del campo direccional de la ED en la figura 2.6.1a sugiere, una curva solución debe tener una forma similar a la curva que se muestra en azul.

El campo direccional de la figura 2.6.1a se generó con elementos lineales que pasan por puntos de una malla de coordenadas enteras. Puesto que la curva solución pasa por el

punto inicial (2, 4), el elemento lineal en este punto es una recta tangente con pendiente dada por $f(2, 4) = 0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2 = 1.8$. Como se muestra en la figura 2.6.1a y el "zoom in" (acercamiento) de la figura 2.6.1b, cuando x está cerca de 2, los puntos en la curva solución están cerca de los puntos de la recta tangente (el elemento lineal). Utilizando el punto (2, 4), la pendiente $f(2, 4) = 1.8$ y la forma punto pendiente de una recta, encontramos que una ecuación de la recta tangente es $y = L(x)$, donde $L(x) = 1.8x + 0.4$. Esta última ecuación se llama **linealización** de $y(x)$ en $x = 2$ que se puede utilizar para aproximar los valores dentro de una pequeña vecindad de $x = 2$. Si $y_1 = L(x_1)$ denota la coordenada y en la recta tangente y $y(x_1)$ es la coordenada y de la curva solución correspondiente a una coordenada x, x_1 que está cerca de $x = 2$, entonces $y(x_1) \approx y_1$. Si elegimos, $x_1 = 2.1$, entonces $y_1 = L(2.1) = 1.8(2.1) + 0.4 = 4.18$, entonces $y(2.1) \approx 4.18$.

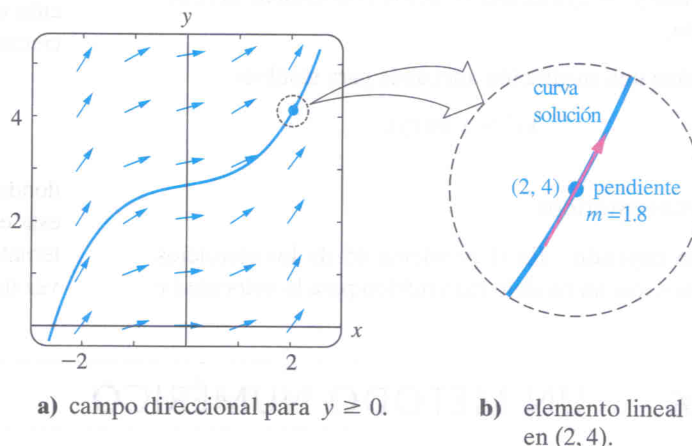


FIGURA 2.6.1 Amplificación de una vecindad del punto (2, 4).

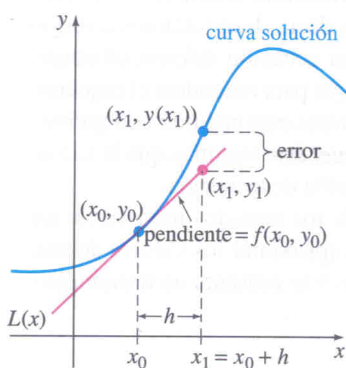


FIGURA 2.6.2 Aproximación de $y(x_1)$ usando una recta tangente.

MÉTODO DE EULER Para generalizar el procedimiento que acabamos de ilustrar, usamos la linealización de una solución incógnita $y(x)$ de (1) en $x = x_0$:

$$L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \tag{2}$$

La gráfica de esta linealización es una recta tangente a la gráfica de $y = y(x)$ en el punto (x_0, y_0). Ahora hacemos que h sea un incremento positivo del eje x, como se muestra en la figura 2.6.2. Entonces sustituyendo x por $x_1 = x_0 + h$ en la ecuación (2), obtenemos

$$L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)(x_0 + h - x_0) \quad \text{o} \quad y_1 = y_0 + hf(x_1, y_1),$$

donde $y_1 = L(x_1)$. El punto (x_1, y_1) en la recta tangente es una aproximación del punto $(x_1, y(x_1))$ sobre la curva solución. Por supuesto, la precisión de la aproximación $L(x_1) \approx y(x_1)$ o $y_1 \approx y(x_1)$ depende fuertemente del tamaño del incremento h. Normalmente debemos elegir este **tamaño de paso** para que sea "razonablemente pequeño". Ahora repetimos el proceso usando una segunda "recta tangente" en (x_1, y_1).* Identificando el nuevo punto inicial como (x_1, y_1) en lugar de (x_0, y_0) del análisis anterior, obtenemos una aproximación $y_2 \approx y(x_2)$ correspondiendo a dos pasos de longitud h a partir de x_0, es decir, $x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$, y

$$y(x_2) = y(x_0 + 2h) = y(x_1 + h) \approx y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

Continuando de esta manera, vemos que $y_1, y_2, y_3, \ldots$, se puede definir recursivamente mediante la fórmula general

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \tag{3}$$

donde $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Este procedimiento de uso sucesivo de las "rectas tangentes" se llama **método de Euler**.

*Esta no es una recta tangente real, ya que (x_1, y_1) está sobre la primera tangente y no sobre la curva solución.

EJEMPLO 1 Método de Euler

Considere el problema con valores iniciales $y' = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$, $y(2) = 4$ Utilice el método de Euler para obtener una aproximación de $y(2.5)$ usando primero $h = 0.1$ y después $h = 0.05$.

SOLUCIÓN Con la identificación $f(x, y) = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$ la ecuación (3) se convierte en

$$y_{n+1} = y_n + h\left(0.1\sqrt{y_n} + 0.4x_n^2\right).$$

Entonces para $h = 0.1$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ y $n = 0$ encontramos

$$y_1 = y_0 + h\left(0.1\sqrt{y_0} + 0.4x_0^2\right) = 4 + 0.1\left(0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2\right) = 4.18,$$

que, como ya hemos visto, es una estimación del valor $y(2.1)$. Sin embargo, si usamos el paso de tamaño más pequeño $h = 0.05$, le toma dos pasos alcanzar $x = 2.1$. A partir de

$$y_1 = 4 + 0.05\left(0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2\right) = 4.09$$

$$y_2 = 4.09 + 0.05\left(0.1\sqrt{4.09} + 0.4(2.05)^2\right) = 4.18416187$$

tenemos $y_1 \approx y(2.05)$ y $y_2 \approx y(2.1)$. El resto de los cálculos fueron realizados usando un paquete computacional. En las tablas 2.1 y 2.2 se resumen los resultados, donde cada entrada se ha redondeado a cuatro lugares decimales. Vemos en las tablas 2.1 y 2.2 que le toma cinco pasos con $h = 0.1$ y 10 pasos con $h = 0.05$, respectivamente, para llegar a $x = 2.5$. Intuitivamente, esperaríamos que $y_{10} = 5.0997$ correspondiente a $h = 0.05$ sea la mejor aproximación de $y(2.5)$ que el valor $y_5 = 5.0768$ correspondiente a $h = 0.1$. ■

TABLA 2.1 $h = 0.1$

x_n	y_n
2.00	4.0000
2.10	4.1800
2.20	4.3768
2.30	4.5914
2.40	4.8244
2.50	5.0768

TABLA 2.2 $h = 0.05$

x_n	y_n
2.00	4.0000
2.05	4.0900
2.10	4.1842
2.15	4.2826
2.20	4.3854
2.25	4.4927
2.30	4.6045
2.35	4.7210
2.40	4.8423
2.45	4.9686
2.50	5.0997

En el ejemplo 2 aplicamos el método de Euler para una ecuación diferencial para la que ya hemos encontrado una solución. Hacemos esto para comparar los valores de las aproximaciones y_n en cada caso con los valores verdaderos o reales de la solución $y(x_n)$ del problema con valores iniciales.

EJEMPLO 2 Comparación de los valores aproximados y reales

Considere el problema con valores iniciales $y' = 0.2xy$, $y(1) = 1$. Utilice el método de Euler para obtener una aproximación de $y(1.5)$ usando primero $h = 0.1$ y después $h = 0.05$.

SOLUCIÓN Con la identificación $f(x, y) = 0.2xy$, la ecuación (3) se convierte en

$$y_{n+1} = y_n + h(0.2x_n y_n)$$

donde $x_0 = 1$ y $y_0 = 1$. De nuevo con la ayuda de un paquete computacional obtenga los valores de las tablas 2.3 y 2.4.

TABLA 2.3 $h = 0.1$

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% Error relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.0200	1.0212	0.0012	0.12
1.20	1.0424	1.0450	0.0025	0.24
1.30	1.0675	1.0714	0.0040	0.37
1.40	1.0952	1.1008	0.0055	0.50
1.50	1.1259	1.1331	0.0073	0.64

TABLA 2.4 $h = 0.05$

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% Error relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.05	1.0100	1.0103	0.0003	0.03
1.10	1.0206	1.0212	0.0006	0.06
1.15	1.0318	1.0328	0.0009	0.09
1.20	1.0437	1.0450	0.0013	0.12
1.25	1.0562	1.0579	0.0016	0.16
1.30	1.0694	1.0714	0.0020	0.19
1.35	1.0833	1.0857	0.0024	0.22
1.40	1.0980	1.1008	0.0028	0.25
1.45	1.1133	1.1166	0.0032	0.29
1.50	1.1295	1.1331	0.0037	0.32

■

En el ejemplo 1 se calcularon los valores verdaderos o reales de la solución conocida $y = e^{0.1(x^2-1)}$. (Compruebe.) El **error absoluto** se define como

$$|\, valor\ real - aproximado\,|.$$

El **error relativo** y el **error relativo porcentual** son, respectivamente,

$$\frac{error\ absoluto}{|\,valor\ real\,|} \quad \text{y} \quad \frac{error\ absoluto}{|\,valor\ real\,|} \times 100.$$

Es evidente de las tablas 2.3 y 2.4 que la precisión de las aproximaciones mejora conforme disminuye el tamaño del paso h. También nosotros vemos esto aun cuando el error relativo porcentual esté creciendo en cada paso, no parece estar mal. Pero no debe engañarse por un ejemplo. Si simplemente cambiamos el coeficiente del lado derecho de la ED del ejemplo 2 de 0.2 a 2 entonces en $x_n = 1.5$ los errores relativos porcentuales crecen dramáticamente. Véase el problema 4 del ejercicio 2.6.

UNA ADVERTENCIA El método de Euler es sólo uno de los diferentes métodos en los que se puede aproximar una solución de una ecuación diferencial. Aunque por su sencillez es atractivo, *el método de Euler rara vez se usa en cálculos serios*. Aquí se ha presentado sólo para dar un primer esbozo de los métodos numéricos. En el capítulo 9 trataremos en detalle el análisis de los métodos numéricos que tienen mucha precisión, en especial el **método de Runge-Kutta** conocido como el **método RK4.**

SOLUCIONADORES NUMÉRICOS Independientemente de si se puede realmente encontrar una solución explícita o implícita, si existe una solución de una ecuación diferencial, ésta se representa por una curva suave en el plano cartesiano. La idea básica detrás de *cualquier* método numérico para las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden es de alguna manera aproximar los valores de y de una solución para valores de x preseleccionados. Comenzamos con un punto inicial dado (x_0, y_0) de una curva solución y procedemos a calcular en un modelo paso por paso una secuencia de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ cuyas coordenadas y, y_i se aproximan a las coordenadas y, $y(x_i)$ de los puntos $(x_1, y(x_1)), (x_2, y(x_2)), \ldots, (x_n, y(x_n))$ que yacen sobre la gráfica de la solución normalmente desconocida $y(x)$. Tomando las coordenadas x más cercanas (es decir, para valores pequeños de h) y uniendo los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ con segmentos de recta cortos, obtenemos una curva poligonal cuyas características cualitativas esperamos sean cercanas a las de una curva solución real. El dibujo de curvas es muy adecuado en una computadora. A un programa de cómputo escrito para implementar un método numérico o para mostrar una representación visual de una solución aproximada que ajusta los datos numéricos producidos por este segundo método se le conoce como un **solucionador numérico.** Comercialmente hay disponibles muchos solucionadores numéricos ya sea que estén integrados en un gran paquete computacional, tal como en un sistema algebraico computacional o que sean un paquete autónomo. Algunos paquetes computacionales simplemente dibujan las aproximaciones numéricas generadas, mientras que otros generan pesados datos numéricos así como la correspondiente aproximación o **curvas solución numérica.** En la figura 2.6.3 se presenta a manera de ilustración la conexión natural entre los puntos de las gráficas producidas por un solucionador numérico, las gráficas poligonales pintadas con dos colores son las curvas solución numérica para el problema con valores iniciales $y' = 0.2xy$, $y(0) = 1$ en el intervalo [0, 4] obtenidas de los métodos de Euler y RK4 usando el tamaño de paso $h = 1$. La curva suave en azul es la gráfica de la solución exacta $y = e^{0.1x^2}$ del PVI. Observe en la figura 2.6.3 que, aun con el ridículo tamaño de paso de $h = 1$, el método RK4 produce la "curva solución" más creíble. La curva solución numérica obtenida del método RK4 es indistinguible de la curva solución real en el intervalo [0, 4] cuando se usa el tamaño de paso usual de $h = 0.1$.

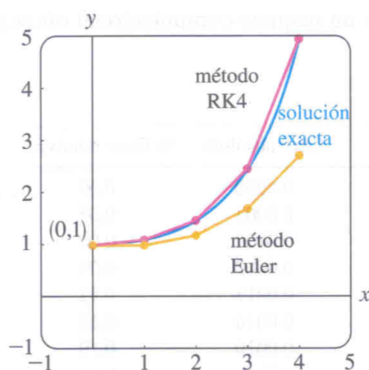


FIGURA 2.6.3 Comparación de los métodos de Runge-Kutta (RK4) y de Euler.

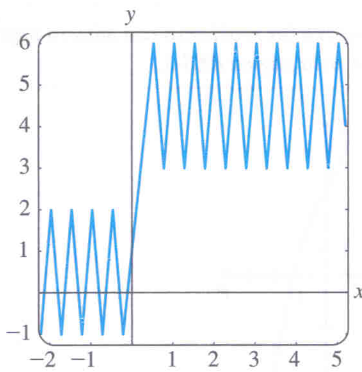


FIGURA 2.6.4 Una curva solución que no ayuda mucho.

USANDO UN SOLUCIONADOR NUMÉRICO No es necesario conocer los diferentes métodos numéricos para utilizar un solucionador numérico. Un solucionador usualmente requiere que la ecuación diferencial se pueda expresar en la forma normal $dy/dx = f(x, y)$. Los solucionadores numéricos que sólo generan curvas requieren que se les proporcione $f(x, y)$ y los datos iniciales x_0 y y_0 y que se indique el método numérico deseado. Si la idea es aproximarse al valor numérico de $y(a)$, entonces un solucionador numérico podría requerir además expresar un valor de h o, del mismo modo, dar el número de pasos que quiere tomar para llegar de $x = x_0$ a $x = a$. Por ejemplo, si queremos aproximar $y(4)$ para el PVI que se muestra en la figura 2.6.3, entonces, comenzando en $x = 0$ le tomaría cuatro pasos llegar a $x = 4$ con un tamaño de paso de $h = 1$; 40 pasos son equivalentes a un tamaño de paso de $h = 0.1$. Aunque aquí no investigaremos todos los problemas que se pueden encontrar cuando se intenta aproximar cantidades matemáticas, al menos debe estar consciente del hecho de que el solucionador numérico puede dejar de funcionar cerca de ciertos puntos o dar una incompleta o engañosa imagen cuando se aplica a ciertas ecuaciones diferenciales en la forma normal. La figura 2.6.4 muestra la gráfica que se obtuvo al aplicar el método de Euler a un problema con valores iniciales de primer orden $dy/dx = f(x, y)$, $y(0) = 1$. Se obtuvieron resultados equivalentes utilizando tres diferentes solucionadores numéricos, sin embargo la gráfica difícilmente es una posible curva solución. (¿Por qué?) Hay diferentes caminos de solución cuando un solucionador numérico tiene dificultades; las tres más obvias son disminuir el tamaño del paso, usar otro método numérico e intentar con un solucionador diferente.

EJERCICIOS 2.6

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-2.

En los problemas 1 y 2 use el método de Euler para obtener una aproximación a cuatro decimales del valor indicado, ejecute a mano la ecuación de recursión (3), usando primero $h = 0.1$ y después usando $h = 0.05$.

1. $y' = 2x - 3y + 1, y(1) = 5; \quad y(1.2)$

2. $y' = x + y^2, y(0) = 0; \quad y(0.2)$

En los problemas 3 y 4 use el método de Euler para obtener una aproximación a cuatro decimales del valor indicado. Primero utilice $h = 0.1$ y después utilice $h = 0.05$. Determine una solución explícita para cada problema con valores iniciales y después construya tablas similares a las tablas 2.3 y 2.4.

3. $y' = y, y(0) = 1; \quad y(1.0)$

4. $y' = 2xy, y(1) = 1; \quad y(1.5)$

En los problemas 5 a 10 use un solucionador numérico y el método de Euler para obtener una aproximación a cuatro decimales del valor indicado. Primero utilice $h = 0.1$ y después utilice $h = 0.05$.

5. $y' = e^{-y}, y(0) = 0; \quad y(0.5)$

6. $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1; \quad y(0.5)$

7. $y' = (x - y)^2, y(0) = 0.5; \quad y(0.5)$

8. $y' = xy + \sqrt{y}, y(0) = 1; \quad y(0.5)$

9. $y' = xy^2 - \dfrac{y}{x}, y(1) = 1; \quad y(1.5)$

10. $y' = y - y^2, y(0) = 0.5; \quad y(0.5)$

En los problemas 11 y 12 utilice un solucionador para obtener una curva solución numérica para el problema con valores iniciales dado. Primero utilice el método de Euler y después el método RK4. Utilice $h = 0.25$ en cada caso. Superponga ambas curvas solución en los mismos ejes coordenados. Si es posible, utilice un color diferente para cada curva. Repita, usando $h = 0.1$ y $h = 0.05$.

11. $y' = 2(\cos x)y, \quad y(0) = 1$

12. $y' = y(10 - 2y), \quad y(0) = 1$

Problemas para analizar

13. Use un solucionador numérico y el método de Euler para aproximar $y(0.1)$, donde $y(x)$ es la solución de $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$. Primero use $h = 0.1$ y después use $h = 0.05$. Repita, usando el método RK4. Analice qué podría causar que las aproximaciones a $y(1.0)$ difieran mucho.

Tarea para el laboratorio de computación

14. **a)** Utilice un solucionador numérico y el método RK4 para trazar la gráfica de la solución del problema con valores iniciales $y' = -2xy + 1$, $y(0) = 0$.

b) Resuelva el problema con valores iniciales por uno de los procedimientos analíticos desarrollados en las secciones anteriores en este capítulo.

c) Use la solución analítica $y(x)$ que encontró en el inciso b) y un SAC para determinar las coordenadas de todos los extremos relativos.

REPASO DEL CAPÍTULO 2

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-3.

Responda los problemas 1 a 4 sin consultar las respuestas del libro. Llene los espacios en blanco o responda si es verdadero o falso.

1. La ED lineal, $y' - ky = A$, donde k y A son constantes, es autónomo. El punto crítico _________ de la ecuación es un _________ (atractor o repulsor) para $k > 0$ y un _________ (atractor o repulsor) para $k < 0$.

2. El problema $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$, $y(0) = k$, tiene un número infinito de soluciones para $k =$ _________ y no tiene solución para $k =$ _________.

3. La ED lineal, $y' + k_1y = k_2$, donde k_1 y k_2 son constantes distintas de cero, siempre tiene una solución constante. _________

4. La ED lineal, $a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ es también separable. _________

En los problemas 5 y 6 construya una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(y)$ cuyo esquema de fase es consistente con la figura dada.

5.



FIGURA 2.R.1 Gráfica del problema 5.

6.



FIGURA 2.R.2 Gráfica del problema 6.

7. El número 0 es un punto crítico de la ecuación diferencial autónoma $dx/dt = x^n$, donde n es un entero positivo. ¿Para qué valores de n es 0 asintóticamente estable? ¿Semiestable? ¿Inestable? Repita para la ecuación diferencial $dx/dt = -x^n$.

8. Considere la ecuación diferencial $dP / dt = f(P)$, donde

$$f(P) = -0.5P^3 - 1.7P + 3.4.$$

La función $f(P)$ tiene una raíz real, como se muestra en la figura 2.R.3. Sin intentar resolver la ecuación diferencial, estime el valor de $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

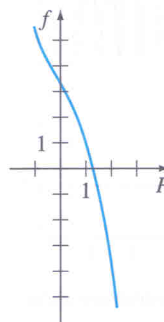


FIGURA 2.R.3 Gráfica del problema 8.

9. La figura 2.R.4 es una parte de un campo direccional de una ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$. Dibuje a mano dos diferentes curvas solución, una que es tangente al elemento lineal que se muestra en negro y el otro que es tangente al elemento lineal que se muestra de color (rojo).

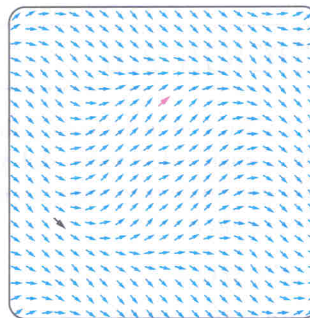


FIGURA 2.R.4 Parte de un campo direccional del problema 9.

10. Clasifique cada ecuación diferencial como separable, exacta, lineal, homogénea o Bernoulli. Algunas ecuaciones pueden ser de más de una clase. No las resuelva.

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y}{x}$ b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y - x}$

c) $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} = -y + 10$ d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x(x - y)}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + y}{x^2 + x}$ f) $\dfrac{dy}{dx} = 5y + y^2$

g) $y\,dx = (y - xy^2)\,dy$ h) $x\dfrac{dy}{dx} = ye^{x/y} - x$

i) $xy\,y' + y^2 = 2x$ j) $2xy\,y' + y^2 = 2x^2$

k) $y\,dx + x\,dy = 0$

l) $\left(x^2 + \dfrac{2y}{x}\right)dx = (3 - \ln x^2)\,dy$

m) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + 1$ n) $\dfrac{y}{x^2}\dfrac{dy}{dx} + e^{2x^3+y^2} = 0$

En los problemas resuelva la ecuación diferencial dada.

11. $(y^2 + 1)\, dx = y \sec^2 x\, dy$

12. $y(\ln x - \ln y)\, dx = (x \ln x - x \ln y - y)\, dy$

13. $(6x + 1)y^2 \dfrac{dy}{dx} + 3x^2 + 2y^3 = 0$

14. $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{4y^2 + 6xy}{3y^2 + 2x}$

15. $t\dfrac{dQ}{dt} + Q = t^4 \ln t$

16. $(2x + y + 1)y' = 1$

17. $(x^2 + 4)\, dy = (2x - 8xy)\, dx$

18. $(2r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta + r\cos\theta)\, d\theta + (4r + \operatorname{sen}\theta - 2r\cos^2\theta)\, dr = 0$

En los problemas 19 y 20 resuelva el problema con valores iniciales dado e indique el intervalo I más largo en el que la solución está definida.

19. $\operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = 0, \quad y\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = -2$

20. $\dfrac{dy}{dt} + 2(t + 1)y^2 = 0, \quad y(0) = -\frac{1}{8}$

21. **a)** Sin resolver, explique por qué el problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \quad y(x_0) = y_0$$

no tiene solución para $y_0 < 0$.

b) Resuelva el problema con valores iniciales del inciso a) para $y_0 > 0$ y determine el intervalo I más largo en el que la solución está definida.

22. **a)** Determine una solución implícita del problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{xy}, \quad y(1) = -\sqrt{2}.$$

b) Determine una solución explícita del problema del inciso a) e indique el intervalo de solución más largo de I en el que la solución está definida. Aquí puede ser útil un programa de graficación.

23. En la figura 2.R.5 se presentan las gráficas de algunos miembros de una familia de soluciones para una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x, y)$. Las gráficas de dos soluciones implícitas, una que pasa por el punto $(1, -1)$ y la otra que pasa por $(-1, 3)$ se muestran en rojo. Reproduzca la figura en una hoja. Con lápices de colores trace las curvas solución para las soluciones $y = y_1(x)$ y $y = y_2(x)$ definidas por las soluciones implícitas tales como $y_1(1) = -1$ y $y_2(-1) = 3$, respectivamente. Estime los intervalos en los que las soluciones $y = y_1(x)$ y $y = y_2(x)$ están definidas.

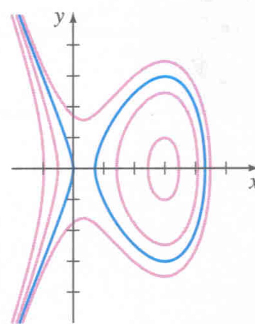


FIGURA 2.R.5 Gráfica para el problema 23.

24. Utilice el método de Euler con tamaño de paso $h = 0.1$ para aproximar $y(1.2)$, donde $y(x)$ es una solución del problema con valores iniciales $y' = 1 + x\sqrt{y}$, $y(1) = 9$.

En los problemas 25 y 26 cada figura representa una parte de un campo direccional de una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(y)$. Reproduzca esta figura en una hoja y después termine el campo direccional sobre la malla. Los puntos de la malla son (mh, nh) donde $h = \frac{1}{2}$, m y n son enteros, $-7 \le m \le 7$, $-7 \le n \le 7$. En cada campo direccional dibuje a mano una curva solución aproximada que pase por cada uno de los puntos sólidos mostrados en rojo. Analice: ¿parece que la ED tiene puntos críticos en el intervalo $-3.5 \le m \le 3.5$? Si es así, clasifique los puntos críticos como asintóticamente estables, inestables o semiestables.

25.

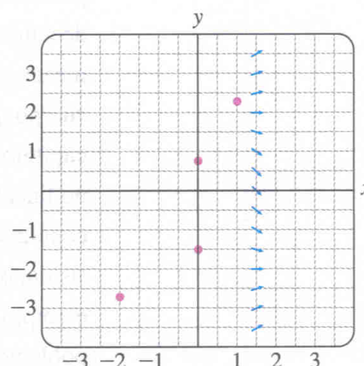


FIGURA 2.R.6 Parte de un campo direccional del problema 25.

26.

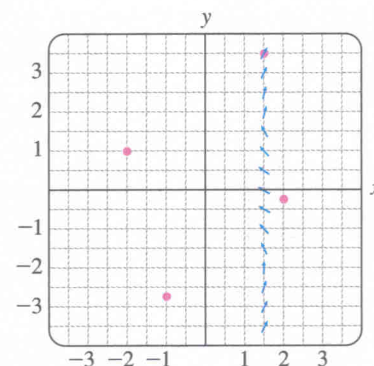
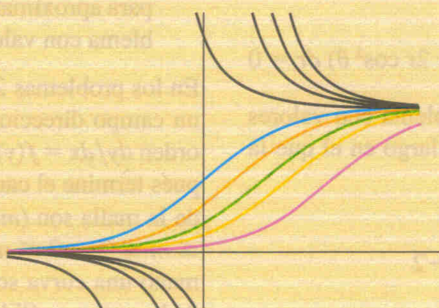


FIGURA 2.R.7 Parte de un campo direccional del problema 26.

3 MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN



En la sección 1.3 vimos cómo se podría utilizar una ecuación diferencial de primer orden como modelo matemático en el estudio de crecimiento poblacional, decaimiento radiactivo, interés compuesto continuo, enfriamiento de cuerpos, mezclas, reacciones químicas, drenado del fluido de un tanque, velocidad de un cuerpo que cae y corriente en un circuito en serie. Utilizando los métodos del capítulo 2 ahora podemos resolver algunas de las ED lineales (sección 3.1) y ED no lineales (sección 3.2) que aparecen comúnmente en las aplicaciones. El capítulo concluye con el siguiente paso natural: en la sección 3.3 examinamos cómo surgen sistemas de ED como modelos matemáticos en sistemas físicos acoplados (por ejemplo, una población de predadores como los zorros que interactúan con una población de presas como los conejos).

3.1 MODELOS LINEALES

REPASO DE MATERIAL

- Ecuación diferencial como modelo matemático en la sección 1.3.
- Leer nuevamente "Solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden", página 55 en la sección 2.3.

INTRODUCCIÓN En esta sección resolvemos algunos de los modelos lineales de primer orden que se presentaron en la sección 1.3.

CRECIMIENTO Y DECAIMIENTO El problema con valores iniciales

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

donde k es una constante de proporcionalidad, sirve como modelo para diferentes fenómenos que tienen que ver con crecimiento o decaimiento. En la sección 1.3 vimos que en las aplicaciones biológicas la razón de crecimiento de ciertas poblaciones (bacterias, pequeños animales) en cortos periodos de tiempo es proporcional a la población presente en el tiempo t. Si se conoce la población en algún tiempo inicial arbitrario t_0, la solución de la ecuación (1) se puede utilizar para predecir la población en el futuro, es decir, a tiempos $t > t_0$. La constante de proporcionalidad k en la ecuación (1) se determina a partir de la solución del problema con valores iniciales, usando una medida posterior de x al tiempo $t_1 > t_0$. En física y química la ecuación (1) se ve en la forma de una *reacción de primer orden*, es decir, una reacción cuya razón, o velocidad, dx/dt es directamente proporcional a la cantidad x de sustancia que no se ha convertido o que queda al tiempo t. La descomposición, o decaimiento, de U-238 (uranio) por radiactividad en Th-234 (torio) es una reacción de primer orden.

EJEMPLO 1 Crecimiento de bacterias

Inicialmente un cultivo tiene un número P_0 de bacterias. En $t = 1$ h se determina que el número de bacterias es $\frac{3}{2}P_0$. Si la razón de crecimiento es proporcional al número de bacterias $P(t)$ presentes en el tiempo t, determine el tiempo necesario para que se triplique el número de bacterias.

SOLUCIÓN Primero se resuelve la ecuación diferencial (1), sustituyendo el símbolo x por P. Con $t_0 = 0$ la condición inicial es $P(0) = P_0$. Entonces se usa la observación empírica de que $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ para determinar la constante de proporcionalidad k.

Observe que la ecuación diferencial $dP/dt = kP$ es separable y lineal. Cuando se pone en la forma estándar de una ED lineal de primer orden,

$$\frac{dP}{dt} - kP = 0,$$

se ve por inspección que el factor integrante es e^{-kt}. Multiplicando ambos lados de la ecuación e integrando se obtiene, respectivamente,

$$\frac{d}{dt}[e^{-kt}P] = 0 \qquad \text{y} \qquad e^{-kt}P = c.$$

Por tanto $P(t) = ce^{kt}$. En $t = 0$ se tiene que $P_0 = ce^0 = c$, por tanto $P(t) = P_0e^{kt}$. En $t = 1$ se tiene que $\frac{3}{2}P_0 = P_0e^k$, o $e^k = \frac{3}{2}$. De la última ecuación se obtiene $k = \ln\frac{3}{2} = 0.4055$, por tanto $P(t) = P_0e^{0.4055t}$. Para determinar el tiempo en que se ha triplicado el número de bacterias, resolvemos $3P_0 = P_0e^{0.4055t}$ para t. Entonces $0.4055t = \ln 3$, o

$$t = \frac{\ln 3}{0.4055} \approx 2.71 \text{ h}.$$

Vea la figura 3.1.1. ■

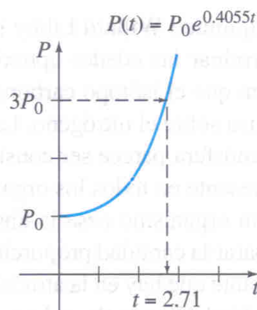


FIGURA 3.1.1 Tiempo en que se triplica la población.

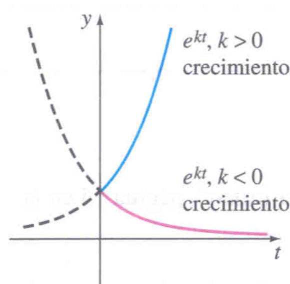


FIGURA 3.1.2 Crecimiento ($k > 0$) y decaimiento ($k < 0$).

Observe en el ejemplo 1 que el número real P_0 de bacterias presentes en el tiempo $t = 0$ no tiene que ver en el cálculo del tiempo que se requirió para que el número de bacterias en el cultivo se triplique. El tiempo necesario para que se triplique una población inicial de, digamos, 100 o 1 000 000 de bacterias es de aproximadamente 2.71 horas.

Como se muestra en la figura 3.1.2, la función exponencial e^{kt} aumenta conforme crece t para $k > 0$ y disminuye conforme crece t para $k < 0$. Así los problemas que describen el crecimiento (ya sea de poblaciones, bacterias o aun de capital) se caracterizan por un valor positivo de k, en tanto que los problemas relacionados con decaimiento (como en la desintegración radiactiva) tienen un valor k negativo. De acuerdo con esto, decimos que k es una **constante de crecimiento** ($k > 0$) o una **constante de decaimiento** ($k < 0$).

VIDA MEDIA En física la **vida media** es una medida de la estabilidad de una sustancia radiactiva. La vida media es, simplemente, el tiempo que tarda en desintegrarse o transmutarse en otro elemento la mitad de los átomos en una muestra inicial A_0. Mientras mayor sea la vida media de una sustancia, más estable es la sustancia. Por ejemplo, la vida media del radio altamente radiactivo Ra-226 es de aproximadamente 1 700 años. En 1 700 años la mitad de una cantidad dada de Ra-226 se transmuta en radón, Rn-222. El isótopo más común del uranio, U-238, tiene una vida media de 4 500 000 000 años. En aproximadamente 4.5 miles de millones de años la mitad de una cantidad de U-238 se transmuta en plomo 206.

EJEMPLO 2 Vida media del plutonio

Un reactor de cría convierte uranio 238 relativamente estable en el isótopo plutonio 239. Después de 15 años, se ha determinado que 0.043% de la cantidad inicial A_0 de plutonio se ha desintegrado. Determine la vida media de ese isótopo, si la razón de desintegración es proporcional a la cantidad que queda.

SOLUCIÓN Sea $A(t)$ la cantidad de plutonio que queda al tiempo t. Como en el ejemplo 1, la solución del problema con valores iniciales

$$\frac{dA}{dt} = kA, \quad A(0) = A_0$$

es $A(t) = A_0e^{kt}$. Si se ha desintegrado 0.043% de los átomos de A_0, queda 99.957%. Para encontrar la constante k, usamos $0.99957A_0 = A(15)$, es decir, $099957 A_0 = A_0e^{15k}$. Despejando k se obtiene $k = \frac{1}{15}\ \ln 0.99957 = -0.00002867$. Por tanto $A(t) = A_0e^{-0.00002867t}$. Ahora la vida media es el valor del tiempo que le corresponde a $A(t) = \frac{1}{2}A_0$. Despejando t se obtiene $\frac{1}{2}A_0 = A_0e^{-0.00002867t}$ o $\frac{1}{2} = e^{-0.00002867t}$. De la última ecuación se obtiene

$$t = \frac{\ln 2}{0.00002867} \approx 24{,}180 \text{ años.}$$

■

DATADO CON CARBONO Alrededor de 1950, el químico Willard Libby inventó un método que utiliza al carbono radiactivo para determinar las edades aproximadas de fósiles. La teoría del **datado con carbono**, se basa en que el isótopo carbono 14 se produce en la atmósfera por acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. La razón de la cantidad de C-l4 con el carbono ordinario en la atmósfera parece ser constante y, en consecuencia, la cantidad proporcional del isótopo presente en todos los organismos vivos es igual que la de la atmósfera. Cuando muere un organismo cesa la absorción del C-l4 sea por respiración o alimentación. Así, al comparar la cantidad proporcional de C-14 presente, por ejemplo en un fósil con la razón constante que hay en la atmósfera, es posible obtener una estimación razonable de la edad del fósil. El método se basa en que se sabe que la vida media del C-l4 radiactivo es de aproximadamente 5 600 años. Por este trabajo, Libby obtuvo el Premio Nobel de química en 1960. El método de Libby se

ha utilizado para datar los muebles de madera en las tumbas egipcias y las envolturas de lino de los rollos del Mar Muerto y la tela del enigmático sudario de Turín.

EJEMPLO 3 Edad de un fósil

Se encuentra que un hueso fosilizado contiene la centésima parte de la cantidad de C-14 encontrada en la materia viva. Determine la edad del fósil.

SOLUCIÓN El punto de partida es, de nuevo, $A(t) = A_0e^{kt}$. Para determinar el valor de la constante de decaimiento k, usamos el hecho de que $\frac{1}{2}A_0 = A(5600)$ o $\frac{1}{2}A_0 = A_0e^{5600k}$. De $5600k = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$, obtenemos $k = -(\ln 2)/5600 = -0.00012378$, por tanto $A(t) = A_0e^{-0.00012378t}$. Con $A(t) = \frac{1}{1000}A_0$ tenemos $\frac{1}{1000}A_0 = A_0e^{-0.00012378t}$, por lo que $-0.00012378t = \ln \frac{1}{1000} = -\ln 1000$. Así la edad del fósil es aproximadamente

$$t = \frac{\ln 1000}{0.00012378} \approx 55\,800 \text{ años}.$$

En realidad, la edad determinada en el ejemplo 3 está en el límite de exactitud del método. Normalmente esta técnica se limita a aproximadamente 9 vidas medias del isótopo, que son aproximadamente 50 000 años. Una razón para esta limitante es que el análisis químico necesario para una determinación exacta del C-14 que queda, presenta obstáculos formidables cuando se alcanza el punto de $\frac{1}{1000}A_0$. También, en este método se necesita destruir gran parte de la muestra. Si la medición se realiza indirectamente, basándose en la radiactividad existente en la muestra, es muy difícil distinguir la radiación que procede del fósil de la radiación de fondo normal.* Pero recientemente, con los aceleradores de partículas los científicos han podido separar al C-14 del estable C-12. Cuando se calcula la relación exacta de C-14 a C-12, la exactitud de este método se puede ampliar hasta 70 000 a 100 000 años. Hay otras técnicas isotópicas, como la que usa potasio 40 y argón 40, adecuadas para establecer edades de varios millones de años.† A veces, también es posible aplicar métodos que se basan en el empleo de aminoácidos.

LEY DE NEWTON DEL ENFRIAMIENTO/CALENTAMIENTO En la ecuación (3) de la sección 1.3 vimos que la formulación matemática de la ley empírica de Newton del enfriamiento/calentamiento de un objeto, se expresa con la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \tag{2}$$

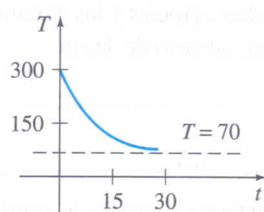
donde k es una constante de proporcionalidad, $T(t)$ es la temperatura del objeto para $t > 0$, y T_m es la temperatura ambiente, es decir, la temperatura del medio que rodea al objeto. En el ejemplo 4 suponemos que T_m es constante.

EJEMPLO 4 Enfriamiento de un pastel

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es 300° F. Tres minutos después su temperatura es de 200° F. ¿Cuánto tiempo le tomará al pastel enfriarse hasta la temperatura ambiente de 70° F?

*El número de desintegraciones por minuto por gramo de carbono se registra usando un contador Geiger. El nivel mínimo de detección es de aproximadamente 0.1 desintegraciones por minuto por gramo.

†El fechado con potasio-argón se usa en el registro de materiales tales como minerales, piedras, lava y materiales extraterrestres como rocas lunares y meteoritos. La edad de un fósil se puede estimar determinando la edad del estrato en que se encontraba la roca.



a)

$T(t)$	t (min)
75°	20.1
74°	21.3
73°	22.8
72°	24.9
71°	28.6
70.5°	32.3

b)

FIGURA 3.1.3 La temperatura de enfriamiento del pastel tiende a la temperatura ambiente.

SOLUCIÓN En la ecuación (2) identificamos $T_m = 70$. Debemos resolver el problema con valores iniciales

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70), \quad T(0) = 300 \tag{3}$$

y determinar el valor de k tal que T(3) = 200.

La ecuación (3) es tanto lineal como separable. Si separamos las variables

$$\frac{dT}{T - 70} = k\,dt,$$

se obtiene $\ln|T - 70| = kt + c_1$, y así $T = 70 + c_2e^{kt}$. Cuando $t = 0$, $T = 300$, así $300 = 70 + c_2$ da $c_2 = 230$. Por tanto $T = 70 + 230\,e^{kt}$. Por último, la medición de $T(3) = 200$ conduce a $e^{3k} = \frac{13}{23}$, o $k = \frac{1}{3}\ln\frac{13}{23} = -0.19018$. Así

$$T(t) = 70 + 230e^{-0.19018t}. \tag{4}$$

Observamos que la ecuación (4) no tiene una solución finita a $T(t) = 70$ porque $\lim_{t\to\infty} T(t) = 70$. No obstante, en forma intuitiva esperamos que el pastel se enfríe al transcurrir un intervalo razonablemente largo. ¿Qué tan largo es "largo"? Por supuesto, no nos debe inquietar el hecho de que el modelo (3) no se apegue mucho a nuestra intuición física. Los incisos a) y b) de la figura 3.1.3 muestran claramente que el pastel estará a la temperatura ambiente en aproximadamente una media hora. ■

La temperatura ambiente en la ecuación (2) no necesariamente es una constante, pudiera ser una función $T_m(t)$ del tiempo t. Vea el problema 18 de los ejercicios 3.1.

MEZCLAS Al mezclar dos fluidos a veces surgen ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Cuando describimos la mezcla de dos salmueras en la sección 1.3, supusimos que la razón con que cambia la cantidad de sal $A'(t)$ en el tanque de mezcla es una razón neta

$$\frac{dA}{dt} = (\text{razón de entrada de sal}) - (\text{razón de salida de sal}) = R_{entra} - R_{sale}. \tag{5}$$

En el ejemplo 5 resolveremos la ecuación (8) de la sección 1.3.

EJEMPLO 5 Mezcla de dos soluciones de sal

Recordemos que el tanque grande de la sección 1.3 contenía inicialmente 300 galones de una solución de salmuera. Al tanque entraba y salía sal porque se bombeaba una solución a un flujo de 3 gal/min, se mezclaba con la solución original y salía del tanque con un flujo de 3 gal/min. La concentración de la solución entrante era 2 lb/gal, por consiguiente, la entrada de sal era R_{entra} = (2 lb/gal) · (3 gal/min) = 6 lb/min y salía del tanque con una razón R_{sale} = (A/300 lb/gal) · (3 gal/min) = A/100 lb/min. A partir de esos datos y de la ecuación (5) obtuvimos la ecuación (8) de la sección 1.3. Permítanos preguntar: si había 50 lb de sal disueltas en los 300 galones iniciales, ¿cuánta sal habrá en el tanque pasado un gran tiempo?

SOLUCIÓN Para encontrar la cantidad de sal $A(t)$ en el tanque al tiempo t, resolvemos el problema con valores iniciales

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{100}A = 6, \quad A(0) = 50.$$

Aquí observamos que la condición adjunta es la cantidad inicial de sal $A(0) = 50$ en el tanque y *no* la cantidad inicial de líquido. Ahora como el factor integrante de esta

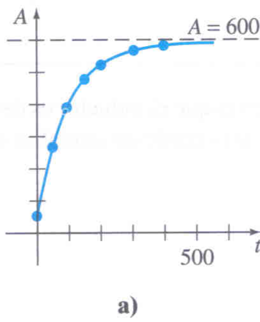
ecuación diferencial lineal es $e^{t/100}$, podemos escribir la ecuación como

$$\frac{d}{dt}[e^{t/100}A] = 6e^{t/100}.$$

Integrando la última ecuación y despejando A se obtiene la solución general $A(t) = 600 + ce^{-t/100}$. Conforme $t = 0$, $A = 50$, de modo que $c = -550$. Entonces, la cantidad de sal en el tanque al tiempo t está dada por

$$A(t) = 600 - 550e^{-t/100}. \tag{6}$$

La solución (6) se usó para construir la tabla de la figura 3.1.4b. En la ecuación (6) y en la figura 3.1.4a también se puede ver, que $A(t) \to 600$ conforme $t \to \infty$. Por supuesto que esto es lo que se esperaría intuitivamente en este caso; cuando ha pasado un gran tiempo la cantidad de libras de sal en la solución debe ser (300 gal)(2 lb/gal) = 600 lb. ■



a)

t (min)	A (lb)
50	266.41
100	397.67
150	477.27
200	525.57
300	572.62
400	589.93

b)

FIGURA 3.1.4 Libras de sal en el tanque como una función del tiempo t.

En el ejemplo 5 supusimos que la razón con que entra la solución al tanque es la misma que la razón con que sale. Sin embargo, el caso no necesita ser siempre el mismo; la salmuera mezclada se puede sacar con una razón r_{sale} que es mayor o menor que la razón r_{entra} con la que entra la otra salmuera. Por ejemplo, si la solución bien mezclada del ejemplo 5 sale con una razón menor, digamos de $r_{sale} = 2$ gal/min, entonces se acumulará líquido en el tanque con una razón de $r_{entra} - r_{sale} = (3 - 2)$ gal/min = 1 gal/min. Después de t minutos (1 gal/min) · (t min) = t gal se acumularán, por lo que en el tanque habrá 300 + t galones de salmuera. La concentración del flujo de salida es entonces $c(t) = A/(300 + t)$ y la razón con que sale la sal es $R_{sale} = c(t) \cdot r_{sale}$, o

$$R_{sale} = \left(\frac{A}{300 + t}\ \text{lb/gal}\right) \cdot (2\ \text{gal/min}) = \frac{2A}{300 + t}\ \text{lb/min}.$$

Por tanto, la ecuación (5) se convierte en

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{2A}{300 + t} \quad \text{o} \quad \frac{dA}{dt} + \frac{2}{300 + t}A = 6.$$

Debe comprobar que la solución de la última ecuación, sujeta a $A(0) = 50$, es $A(t) = 600 + 2t - (4.95 \times 10^7)(300 + t)^{-2}$. Vea el análisis siguiente a la ecuación (8) de la sección 1.3, del problema 12 en los ejercicios 1.3 y en los problemas 25 a 28 de los ejercicios 3.1.

CIRCUITOS EN SERIE Para un circuito en serie que sólo contiene un resistor y un inductor la segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de la caída de voltaje a través del inductor ($L(di/dt)$) más la caída de voltaje a través del resistor (iR) es igual al voltaje aplicado ($E(t)$) al circuito. Vea la figura 3.1.5.

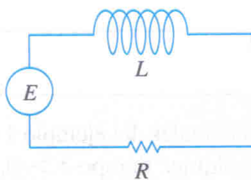


FIGURA 3.1.5 Circuito en serie *LR*.

Por tanto obtenemos la ecuación diferencial lineal para la corriente $i(t)$,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t), \tag{7}$$

donde L y R son constantes conocidas como la inductancia y la resistencia, respectivamente. La corriente $i(t)$ se llama, también **respuesta** del sistema.

La caída de voltaje a través de un capacitor de capacitancia C es $q(t)/C$, donde q es la carga del capacitor. Por tanto, para el circuito en serie que se muestra en la figura 3.1.6, la segunda ley de Kirchhoff da

$$Ri + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{8}$$

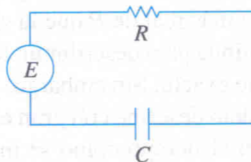


FIGURA 3.1.6 Circuito en serie *RC*.

Pero la corriente i y la carga q están relacionadas por $i = dq/dt$, así la ecuación (8) se convierte en la ecuación diferencial lineal

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{9}$$

EJEMPLO 6 Circuito en serie

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i, si la corriente inicial es cero.

SOLUCIÓN De la ecuación (7) debemos resolver

$$\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10i = 12,$$

sujeta a $i(0) = 0$. Primero multiplicamos la ecuación diferencial por 2, y vemos que el factor integrante es e^{20t}. Entonces sustituyendo

$$\frac{d}{dt}[e^{20t}i] = 24e^{20t}.$$

Integrando cada lado de la última ecuación y despejando i se obtiene $i(t) = \frac{6}{5} + ce^{-20t}$. Ahora $i(0) = 0$ implica que $0 = \frac{6}{5} + c$ o $c = -\frac{6}{5}$. Por tanto la respuesta es $i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$. ■

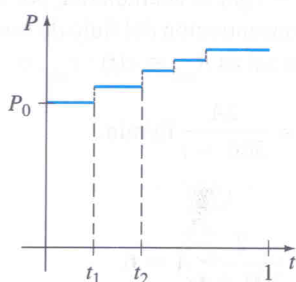
De la ecuación (4) de la sección 2.3, podemos escribir una solución general de (7):

$$i(t) = \frac{e^{-(R/L)t}}{L}\int e^{(R/L)t}E(t)\,dt + ce^{-(R/L)t}. \tag{10}$$

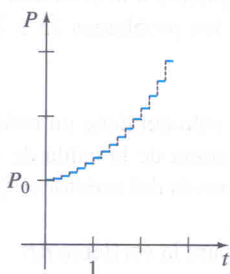
En particular, cuando $E(t) = E_0$ es una constante, la ecuación (l0) se convierte en

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + ce^{-(R/L)t}. \tag{11}$$

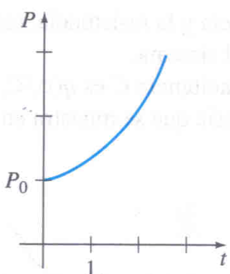
Observamos que conforme $t \to \infty$, el segundo término de la ecuación (11) tiende a cero. A ese término usualmente se le llama **término transitorio**; los demás términos se llaman parte de **estado estable** de la solución. En este caso, E_0/R también se llama **corriente de estado estable**; para valores grandes de tiempo resulta que la corriente está determinada tan sólo por la ley de Ohm ($E = iR$).



a)



b)



c)

FIGURA 3.1.7 El crecimiento poblacional es un proceso discreto.

COMENTARIOS

La solución $P(t) = P_0e^{0.4055t}$ del problema con valores iniciales del ejemplo 1 describe la población de una colonia de bacterias a cualquier tiempo $t > 0$. Por supuesto, $P(t)$ es una función continua que toma *todos* los números reales del intervalo $P_0 \leq P < \infty$. Pero puesto que estamos hablando de una población, el sentido común indica que P puede tomar sólo valores positivos. Además, no esperaríamos que la población crezca continuamente, es decir, cada segundo, cada microsegundo, etc., como lo predice nuestra solución; puede haber intervalos de tiempo $[t_1, t_2]$, en los que no haya crecimiento alguno. Quizá, entonces, la gráfica que se muestra en la figura 3.1.7a es una descripción más real de P que la gráfica de una función exponencial. Usar una función continua para describir un fenómeno discreto con frecuencia es más conveniente que exacto. Sin embargo, para ciertos fines nos podemos sentir satisfechos si el modelo describe con gran exactitud el sistema, considerado macroscópicamente en el tiempo como se muestra en las figuras 3.1.7b y 3.1.7c, más que microscópicamente, como se muestra en la figura 3.1.7a.

EJERCICIOS 3.1

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-3.

Crecimiento y decrecimiento

1. Se sabe que la población de una comunidad crece con una razón proporcional al número de personas presentes en el tiempo t. Si la población inicial P_0 se duplicó en 5 años, ¿En cuánto tiempo se triplicará y cuadruplicará?

2. Suponga que se sabe que la población de la comunidad del problema 1 es de 10 000 después de tres años. ¿Cuál era la población inicial P_0? ¿Cuál será la población en 10 años? ¿Qué tan rápido está creciendo la población en $t = 10$?

3. La población de un pueblo crece con una razón proporcional a la población en el tiempo t. La población inicial de 500 aumenta 15% en 10 años. ¿Cuál será la población pasados 30 años? ¿Qué tan rápido está creciendo la población en $t = 30$?

4. La población de bacterias en un cultivo crece a una razón proporcional a la cantidad de bacterias presentes al tiempo t. Después de tres horas se observa que hay 400 bacterias presentes. Después de 10 horas hay 2 000 bacterias presentes. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

5. El isótopo radiactivo del plomo Pb-209, decae con una razón proporcional a la cantidad presente al tiempo t y tiene un vida media de 3.3 horas. Si al principio había 1 gramo de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que decaiga 90%?

6. Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas la masa disminuyó 3%. Si la razón de decaimiento, en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente al tiempo t, determine la cantidad que queda después de 24 horas.

7. Calcule la vida media de la sustancia radiactiva del problema 6.

8. a) El problema con valores iniciales $dA/dt = kA$, $A(0) = A_0$ es el modelo de decaimiento de una sustancia radiactiva. Demuestre que, en general, la vida media T de la sustancia es $T = -(\ln 2)/k$.
   b) Demuestre que la solución del problema con valores iniciales del inciso a) se puede escribir como $A(t) = A_0 2^{-t/T}$.
   c) Si una sustancia radiactiva tiene la vida media T dada en el inciso a), ¿cuánto tiempo le tomará a una cantidad inicial A_0 de sustancia decaer a $\frac{1}{8}A_0$?

9. Cuando pasa un rayo vertical de luz por un medio transparente, la razón con que decrece su intensidad I es proporcional a $I(t)$, donde t representa el espesor, en pies, del medio. En agua limpia de mar, la intensidad a 3 pies debajo de la superficie es 25% de la intensidad inicial I_0 del rayo incidente. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 pies debajo de la superficie?

10. Cuando el interés es compuesto continuamente, la cantidad de dinero aumenta con una razón proporcional a la cantidad presente S al tiempo t, es decir, $dS/dt = rS$, donde r es la razón de interés anual.
    a) Calcule la cantidad reunida al final de 5 años cuando se depositan \$5 000 en una cuenta de ahorro que rinde el $5\frac{3}{4}\%$ de interés anual compuesto continuamente.
    b) ¿En cuántos años se habrá duplicado el capital inicial?
    c) Utilice una calculadora para comparar la cantidad obtenida en el inciso a) con la cantidad $S = 5000(1 + \frac{1}{4}(0.0575))^{5(4)}$ que se reúne cuando el interés se compone trimestralmente.

Datado con carbono

11. Los arqueólogos utilizan piezas de madera quemada o carbón vegetal, encontradas en el lugar para datar pinturas prehistóricas de paredes y techos de una caverna en Lascaux, Francia. Vea la figura 3.1.8. Utilice la información de la página 84 para precisar la edad aproximada de una pieza de madera quemada, si se determinó que 85.5% de su C-14 encontrado en los árboles vivos del mismo tipo se había desintegrado.



© Prehistoric/The Bridgeman Art Library/Getty Images

FIGURA 3.1.8 Pintura en una pared de la caverna del problema 11.

12. El sudario de Turín muestra el negativo de la imagen del cuerpo de un hombre que parece que fue crucificado, muchas personas creen que es el sudario del entierro de Jesús de Nazaret. Vea la figura 3.1.9. En 1988 el Vaticano concedió permiso para datar con carbono el sudario. Tres laboratorios científicos independientes analizaron el paño y concluyeron que el sudario tenía una antigüedad de 660 años,* una antigüedad consistente con su aparición histó-



© Bettmann/CORBIS

FIGURA 3.1.9 Imagen del sudario del problema 12.

*Algunos eruditos no están de acuerdo con este hallazgo. Para más información de este fascinante misterio vea la página del Sudario de Turín en la página http://www.shroud.com

rica. Usando esta antigüedad determine qué porcentaje de la cantidad original de C-14 quedaba en el paño en 1988.

Ley de Newton enfriamiento/calentamiento

13. Un termómetro se cambia de una habitación donde la temperatura es de 70° F al exterior, donde la temperatura del aire es de 10° F. Después de medio minuto el termómetro indica 50° F. ¿Cuál es la lectura del termómetro en $t = 1$ min? ¿Cuánto tiempo le tomará al termómetro alcanzar los 15° F?

14. Un termómetro se lleva de una habitación hasta el ambiente exterior, donde la temperatura del aire es 5° F. Después de 1 minuto, el termómetro indica 55° F y después de 5 minutos indica 30° F. ¿Cuál era la temperatura inicial de la habitación?

15. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial era de 20° C, se deja caer en un gran tanque de agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo tardará la barra en alcanzar los 90° C si se sabe que su temperatura aumentó 2° en 1 segundo? ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar los 98° C?

16. Dos grandes tanques *A* y *B* del mismo tamaño se llenan con fluidos diferentes. Los fluidos en los tanques *A* y *B* se mantienen a 0° C y a 100° C, respectivamente. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es 100° C, se sumerge dentro del tanque *A*. Después de 1 minuto la temperatura de la barra es de 90° C. Después de 2 minutos se saca la barra e inmediatamente se transfiere al otro tanque. Después de 1 minuto en el tanque B la temperatura se eleva 10° C. ¿Cuánto tiempo, medido desde el comienzo de todo el proceso, le tomará a la barra alcanzar los 99.9° C?

17. Un termómetro que indica 70° F se coloca en un horno precalentado a una temperatura constante. A través de una ventana de vidrio en la puerta del horno, un observador registra que el termómetro lee 110° F después de $\frac{1}{2}$ minuto y 145° F después de 1 minuto. ¿Cuál es la temperatura del horno?

18. Al tiempo $t = 0$ un tubo de ensayo sellado que contiene una sustancia química está inmerso en un baño líquido. La temperatura inicial de la sustancia química en el tubo de ensayo es de 80° F. El baño líquido tiene una temperatura controlada (medida en grados Fahrenheit) dada por $T_m(t) = 100 - 40e^{-0.1t}$, $t \geq 0$, donde t se mide en minutos.

a) Suponga que $k = -0.1$ en la ecuación (2). Antes de resolver el PVI, describa con palabras cómo espera que sea la temperatura $T(t)$ de la sustancia química a corto plazo. Y a largo plazo.

b) Resuelva el problema con valores iniciales. Use un programa de graficación para trazar la gráfica de $T(t)$ en diferentes intervalos de tiempo. ¿Las gráficas concuerdan con sus predicciones del inciso a)?

19. Un cadáver se encontró dentro de un cuarto cerrado en una casa donde la temperatura era constante a 70° F. Al tiempo del descubrimiento la temperatura del corazón del cadáver se determinó de 85° F. Una hora después una segunda medición mostró que la temperatura del corazón era de 80° F. Suponga que el tiempo de la muerte corresponde a $t = 0$ y que la temperatura del corazón en ese momento era de 98.6° F. Determine ¿cuántas horas pasaron antes de que se encontrara el cadáver? [*Sugerencia*: Sea que $t_1 > 0$ denote el tiempo en que se encontró el cadáver.]

20. La razón con la que un cuerpo se enfría también depende de su área superficial expuesta *S*. Si *S* es una constante entonces una modificación de la ecuación (2) es

$$\frac{dT}{dt} = kS(T - T_m),$$

donde $k < 0$ y T_m es una constante. Suponga que dos tazas *A* y *B* están llenas de café al mismo tiempo. Inicialmente la temperatura del café es de 150° F. El área superficial del café en la taza *B* es del doble del área superficial del café en la taza *A*. Después de 30 min la temperatura del café en la taza *A* es de 100° F. Si $T_m = 70°$ F, entonces ¿cuál es la temperatura del café de la taza *B* después de 30 min?

Mezclas

21. Un tanque contiene 200 litros de un líquido en el que se han disuelto 30 g de sal. Salmuera que tiene 1 g de sal por litro entra al tanque con una razón de 4 L/min; la solución bien mezclada sale del tanque con la misma razón. Encuentre la cantidad $A(t)$ de gramos de sal que hay en el tanque al tiempo t.

22. Resuelva el problema 21 suponiendo que al tanque entra agua pura.

23. Un gran tanque de 500 galones está lleno de agua pura. Le entra salmuera que tiene 2 lb de sal por galón a razón de 5 gal/min. La solución bien mezclada sale del tanque con la misma razón. Determine la cantidad $A(t)$ de libras de sal que hay en el tanque al tiempo t.

24. En el problema 23, ¿cuál es la concentración $c(t)$ de sal en el tanque al tiempo t? ¿Y al tiempo $t = 5$ min? ¿Cuál es la concentración en el tanque después de un largo tiempo, es decir, conforme $t \to \infty$? ¿Para qué tiempo la concentración de sal en el tanque es igual a la mitad de este valor límite?

25. Resuelva el problema 23 suponiendo que la solución sale con una razón de 10 gal/min. ¿Cuándo se vacía el tanque?

26. Determine la cantidad de sal en el tanque al tiempo t en el ejemplo 5 si la concentración de sal que entra es variable y está dada por $c_{entra}(t) = 2 + \text{sen}(t/4)$ lb/gal. Sin trazar la gráfica, infiera a qué curva solución del PVI se parecería. Después utilice un programa de graficación para trazar la gráfica de la solución en el intervalo [0, 300]. Repita para el intervalo [0, 600] y compare su gráfica con la que se muestra en la figura 3.1.4a.

27. Un gran tanque está parcialmente lleno con 100 galones de fluido en los que se disolvieron 10 libras de sal. La sal-

muera tiene $\frac{1}{2}$ de sal por galón que entra al tanque a razón de 6 gal/min. La solución bien mezclada sale del tanque a razón de 4 gal/min. Determine la cantidad de libras de sal que hay en el tanque después de 30 minutos.

28. En el ejemplo 5, no se dio el tamaño del tanque que tiene la solución salina. Suponga, como en el análisis siguiente al ejemplo 5, que la razón con que entra la solución al tanque es de 3 gal/min pero que la solución bien mezclada sale del tanque a razón de 2 gal/min. Esta es la razón por la cual la salmuera se está acumulando en el tanque a razón de 1 gal/min, cualquier tanque de tamaño finito terminará derramándose. Ahora suponga que el tanque está destapado y tiene una capacidad de 400 galones.

a) ¿Cuándo se derramará el tanque?

b) ¿Cuántas libras de sal habrá en el tanque cuando comienza a derramarse?

c) Suponga que el tanque se derrama, que la salmuera continúa entrando a razón de 3 gal/min, que la solución está bien mezclada y que la solución sigue saliendo a razón de 2 gal/min. Determine un método para encontrar la cantidad de libras de sal que hay en el tanque al tiempo $t = 150$ min.

d) Calcule la cantidad de libras de sal en el tanque conforme $t \to \infty$. ¿Su respuesta coincide con su intuición?

e) Utilice un programa de graficación para trazar la gráfica de $A(t)$ en el intervalo $[0, 500)$.

Circuitos en serie

29. Se aplica una fuerza electromotriz de 30 V a un circuito en serie LR con 0.1 henrys de inductancia y 50 ohms de resistencia. Determine la corriente $i(t)$, si $i(0) = 0$. Determine la corriente conforme $t \to \infty$.

30. Resuelva la ecuación (7) suponiendo que $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$ y que $i(0) = i_0$.

31. Se aplica una fuerza electromotriz de 100 volts a un circuito en serie RC, en el que la resistencia es de 200 ohms y la capacitancia es de 10^{-4} farads. Determine la carga $q(t)$ del capacitor, si $q(0) = 0$. Encuentre la corriente $i(t)$.

32. Se aplica una fuerza electromotriz de 200 V a un circuito en serie RC, en el que la resistencia es de 1000 ohms y la capacitancia es de 5×10^{-6} farads. Determine la carga $q(t)$ en el capacitor, si $i(0) = 0.4$ amperes. Determine la carga y la corriente en $t = 0.005$ s. Encuentre la carga conforme $t \to \infty$.

33. Se aplica una fuerza electromotriz

$$E(t) = \begin{cases} 120, & 0 \le t \le 20 \\ 0, & t > 20 \end{cases}$$

a un circuito en serie LR en el que la inductancia es de 20 henrys y la resistencia es de 2 ohms. Determine la corriente $i(t)$, si $i(0) = 0$.

34. Suponga que un circuito en serie RC tiene un resistor variable. Si la resistencia al tiempo t está dada por $R = k_1 + k_2 t$, donde k_1 y k_2 son constantes positivas, entonces la ecuación (9) se convierte en

$$(k_1 + k_2 t)\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t).$$

Si $E(t) = E_0$ y $q(0) = q_0$, donde E_0 y q_0 son constantes, muestre que

$$q(t) = E_0 C + (q_0 - E_0 C)\left(\frac{k_1}{k_1 + k_2 t}\right)^{1/Ck_2}.$$

Modelos lineales adicionales

35. Resistencia del aire En la ecuación (14) de la sección 1.3 vimos una ecuación diferencial que describe la velocidad v de una masa que cae sujeta a una resistencia del aire proporcional a la velocidad instantánea es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad. La dirección positiva se toma hacia abajo.

a) Resuelva la ecuación sujeta a la condición inicial $v(0) = v_0$.

b) Utilice la solución del inciso a) para determinar la velocidad límite o terminal de la masa. Vimos cómo determinar la velocidad terminal sin resolver la ED del problema 40 en los ejercicios 2.1.

c) Si la distancia s, medida desde el punto en el que se suelta la masa se relaciona con la velocidad v por $ds/dt = v(t)$, determine una expresión explícita para $s(t)$, si $s(0) = 0$.

36. ¿Qué tan alto? (Sin resistencia del aire) Suponga que una pequeña bala de cañón que pesa 16 libras se dispara verticalmente hacia arriba, como se muestra en la figura 3.1.10, con una velocidad inicial de $v_0 = 300$ pies/s. La respuesta a la pregunta "¿Qué tanto sube la bala de cañón?", depende de si se considera la resistencia del aire.

a) Suponga que se desprecia la resistencia del aire. Si la dirección es positiva hacia arriba, entonces un modelo para la bala del cañón está dado por $d^2s/dt^2 = -g$ (ecuación (12) de la sección 1.3). Puesto que $ds/dt = v(t)$ la última ecuación diferencial es la



FIGURA 3.1.10 Determinación de la altura máxima de la bala de cañón del problema 36.

misma que la ecuación $dv/dt = -g$, donde se toma $g = 32$ pies/s^2. Encuentre la velocidad $v(t)$ de la bala de cañón al tiempo t.

b) Utilice el resultado que se obtuvo en el inciso a) para determinar la altura $s(t)$ de la bala de cañón medida desde el nivel del suelo. Determine la altura máxima que alcanza la bala.

37. ¿Qué tan alto? (Resistencia lineal del aire) Repita el problema 36, pero esta vez suponga que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea. Esta es la razón por la que la altura máxima que alcanza la bala del cañón debe ser *menor* que la del inciso b) del problema 36. Demuestre esto suponiendo que la constante de proporcionalidad es $k = 0.0025$. [*Sugerencia*: Modifique ligeramente la ED del problema 35.]

38. Paracaidismo Una paracaidista pesa 125 libras y su paracaídas y equipo juntos pesan otras 35 libras. Después de saltar del avión desde una altura de 15 000 pies, la paracaidista espera 15 segundos y abre su paracaídas. Suponga que la constante de proporcionalidad del modelo del problema 35 tiene el valor $k = 0.5$ durante la caída libre y $k = 10$ después de que se abrió el paracaídas. Suponga que su velocidad inicial al saltar del avión es igual a cero. ¿Cuál es la velocidad de la paracaidista y qué distancia ha recorrido después de 20 segundos de que saltó del avión? Vea la figura 3.1.11. ¿Cómo se compara la velocidad de la paracaidista a los 20 segundos con su velocidad terminal? ¿Cuánto tarda en llegar al suelo? [*Sugerencia*: Piense en función de dos diferentes PVI.]

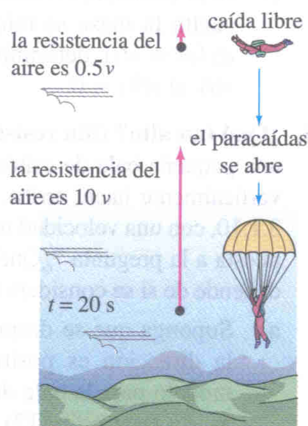


FIGURA 3.1.11 Cálculo del tiempo que tarda en llegar al suelo del problema 38.

39. Evaporación de una gota de lluvia Cuando cae una gota de lluvia, ésta se evapora mientras conserva su forma esférica. Si se hacen suposiciones adicionales de que la rapidez a la que se evapora la gota de lluvia es proporcional a su área superficial y que se desprecia la resistencia del aire, entonces un modelo para la velocidad $v(t)$ de la gota de lluvia es

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3(k/\rho)}{(k/\rho)t + r_0}v = g.$$

Aquí ρ es la densidad del agua, r_0 es el radio de la gota de lluvia en $t = 0$, $k < 0$ es la constante de proporcionalidad y la dirección hacia abajo se considera positiva.

a) Determine $v(t)$ si la gota de lluvia cae a partir del reposo.

b) Vuelva a leer el problema 34 de los ejercicios 1.3 y demuestre que el radio de la gota de lluvia en el tiempo t es $r(t) = (k/\rho)t + r_0$.

c) Si $r_0 = 0.01$ pies y $r = 0.007$ pies, 10 segundos después de que la gota cae desde una nube, determine el tiempo en el que la gota de lluvia se ha evaporado por completo.

40. Población fluctuante La ecuación diferencial $dP/dt = (k \cos t)P$, donde k es una constante positiva, es un modelo matemático para una población $P(t)$ que experimenta fluctuaciones anuales. Resuelva la ecuación sujeta a $P(0) = P_0$. Utilice un programa de graficación para trazar la gráfica de la solución para diferentes elecciones de P_0.

41. Modelo poblacional En un modelo del cambio de población de $P(t)$ de una comunidad, se supone que

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt},$$

donde dB/dt y dD/dt son las tasas de natalidad y mortandad, respectivamente.

a) Determine $P(t)$ si $dB/dt = k_1P$ y $dD/dt = k_2P$.

b) Analice los casos $k_1 > k_2$, $k_1 = k_2$ y $k_1 < k_2$.

42. Modelo de cosecha constante Un modelo que describe la población de una pesquería en la que se cosecha con una razón constante está dada por

$$\frac{dP}{dt} = kP - h,$$

donde k y h son constantes positivas.

a) Resuelva la ED sujeta a $P(0) = P_0$.

b) Describa el comportamiento de la población $P(t)$ conforme pasa el tiempo en los tres casos $P_0 > h/k$, $P_0 = h/k$ y $0 < P_0 < h/k$.

c) Utilice los resultados del inciso b) para determinar si la población de peces desaparecerá en un tiempo finito, es decir, si existe un tiempo $T > 0$ tal que $P(T) = 0$. Si la población desaparecerá, entonces determine en qué tiempo T.

43. Propagación de una medicina Un modelo matemático para la razón con la que se propaga una medicina en el torrente sanguíneo está dado por

$$\frac{dx}{dt} = r - kx,$$

donde r y k son constantes positivas. Sea $x(t)$ la función que describe la concentración de la medicina en el torrente sanguíneo al tiempo t.

a) Ya que la ED es autónoma, utilice el concepto de esquema de fase de la sección 2.1 para determinar el valor de $x(t)$ conforme $t \to \infty$.

b) Resuelva la ED sujeta a $x(0) = 0$. Dibuje la gráfica de $x(t)$ y compruebe su predicción del inciso a). ¿En cuánto tiempo la concentración es la mitad del valor límite?

44. Memorización Cuando se considera la falta de memoria, la razón de memorización de un tema está dada por

$$\frac{dA}{dt} = k_1(M - A) - k_2A,$$

donde $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $A(t)$ es la cantidad memorizada al tiempo t, M es la cantidad total a memorizarse y $M - A$ es la cantidad que falta por memorizar.

a) Puesto que la ED es autónoma, utilice el concepto de esquema de fase de la sección 2.1 para determinar el valor límite de $A(t)$ conforme $t \to \infty$. Interprete el resultado.

b) Resuelva la ED sujeta a $A(0) = 0$. Dibuje la gráfica de $A(t)$ y compruebe su predicción del inciso a).

45. Marcapasos de corazón En la figura 3.1.12 se muestra un marcapasos de corazón, que consiste en un interruptor, una batería, un capacitor y el corazón como un resistor. Cuando el interruptor S está en P, el capacitor se carga; cuando S está en Q, el capacitor se descarga, enviando estímulos eléctricos al corazón. En el problema 47 de los ejercicios 2.3 vimos que durante este tiempo en que se están aplicado estímulos eléctricos al corazón, el voltaje E a través del corazón satisface la ED lineal

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E.$$

a) Suponga que en el intervalo de tiempo de duración t_1, $0 < t < t_1$, el interruptor S está en la posición P como se muestra en la figura 3.1.12 y el capacitor se está cargando. Cuando el interruptor se mueve a la posición Q al tiempo t_1 el capacitor se descarga, enviando un impulso al corazón durante el intervalo de tiempo de duración t_2: $t_1 \le t < t_1 + t_2$. Por lo que el intervalo inicial de carga descarga $0 < t < t_1 + t_2$ el voltaje en el corazón se modela realmente por la ecuación diferencial definida por tramos.

$$\frac{dE}{dt} = \begin{cases} 0, & 0 \le t < t_1 \\ -\dfrac{1}{RC}E, & t_1 \le t < t_1 + t_2. \end{cases}$$

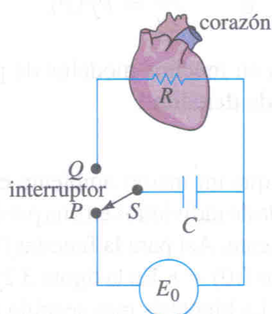


FIGURA 3.1.12 Modelo de un marcapasos del problema 45.

Al moverse S entre P y Q, los intervalos de carga y descarga de duraciones t_1 y t_2 se repiten indefinidamente. Suponga que $t_1 = 4$ s, $t_2 = 2$ s, $E_0 = 12$ V, $E(0) = 0$, $E(4) = 12$, $E(6) = 0$, $E(10) = 12$, $E(12) = 0$, etc. Determine $E(t)$ para $0 \le t \le 24$.

b) Suponga para ilustrar que $R = C = 1$. Utilice un programa de graficación para trazar la gráfica de la solución del PVI del inciso a) para $0 \le t \le 24$.

46. Caja deslizándose **a)** Una caja de masa m se desliza hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal como se muestra en la figura 3.1.13. Determine una ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ de la caja al tiempo t para cada uno de los casos siguientes:

i) No hay fricción cinética y no hay resistencia del aire.

ii) Hay fricción cinética y no hay resistencia del aire.

iii) Hay fricción cinética y hay resistencia del aire.

En los casos *ii)* y *iii)* utilice el hecho de que la fuerza de fricción que se opone al movimiento es μN, donde μ es el coeficiente de fricción cinética y N es la componente normal del peso de la caja. En el caso *iii)* suponga que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea.

b) En el inciso a), suponga que la caja pesa 96 libras, que el ángulo de inclinación del plano es $\theta = 30°$, que el coeficiente de fricción cinética es $\mu = \sqrt{3}/4$, y que la fuerza de retardo debida a la resistencia del aire es numéricamente igual a $\frac{1}{4}v$. Resuelva la ecuación diferencial para cada uno de los tres casos, suponiendo que la caja inicia desde el reposo desde el punto más alto a 50 pies por encima del suelo.

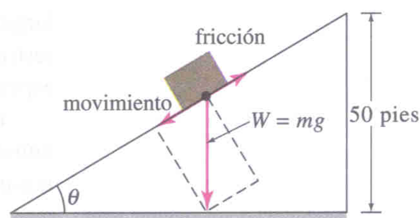


FIGURA 3.1.13 Caja deslizándose hacia abajo del plano inclinado del problema 46.

47. Continuación de caja deslizándose **a)** En el problema 46 sea $s(t)$ la distancia medida hacia abajo del plano inclinado desde el punto más alto. Utilice $ds/dt = v(t)$ y la solución de cada uno de los tres casos del inciso b) del problema 46 para determinar el tiempo que le toma a la caja deslizarse completamente hacia abajo del plano inclinado. Aquí puede ser útil un programa para determinar raíces con un SAC.

b) En el caso en que hay fricción ($\mu \neq 0$) pero no hay resistencia del aire, explique por qué la caja no se desliza hacia abajo comenzando desde el *reposo* desde el punto más alto arriba del suelo cuando el ángulo de inclinación θ satisface a $\tan\theta \leq \mu$.

c) La caja se *deslizará* hacia abajo del plano conforme $\tan\theta \leq \mu$ si a ésta se le proporciona una velocidad inicial $v(0) = v_0 > 0$. Suponga que $\mu = \sqrt{3}/4$ y $\theta = 23°$. Compruebe que $\tan\theta \leq \mu$. ¿Qué distancia se deslizará hacia abajo del plano si $v_0 = 1$ pie/s?

d) Utilice los valores $\mu = \sqrt{3}/4$ y $\theta = 23°$ para aproximar la menor velocidad inicial v_0 que puede tener la caja, para que a partir del reposo a 50 pies arriba del suelo, se deslice por todo el plano inclinado. Después encuentre el tiempo que tarda en deslizarse el plano.

48. Qué sube . . . a) Es bien conocido que el modelo que desprecia la resistencia del aire, inciso a) del problema 36, predice que el tiempo t_a que tarda la bala de cañón en alcanzar su altura máxima es el mismo tiempo t_d que tarda la bala de cañón en llegar al suelo. Además la magnitud de la velocidad de impacto v_i es igual a la velocidad inicial v_0 de la bala de cañón. Compruebe ambos resultados.

b) Después, utilizando el modelo del problema 37 que considera la resistencia del aire, compare el valor de t_a con t_d y el valor de la magnitud de v_i con v_0. Aquí puede ser útil un programa para determinar raíces con un SAC (o una calculadora graficadora).

3.2 MODELOS NO LINEALES

REPASO DE MATERIAL

- Ecuaciones (5), (6) y (10) de la sección 1.3 y problemas 7, 8, 13, 14 y 17 de los ejercicios 1.3.
- Separación de variables de la sección 2.2.

INTRODUCCIÓN Terminamos nuestro estudio de ecuaciones diferenciales de primer orden simples con el análisis de algunos modelos no lineales.

DINÁMICA POBLACIONAL Si $P(t)$ es el tamaño de una población al tiempo t, el modelo del crecimiento exponencial comienza suponiendo que $dP/dt = kP$ para cierta $k > 0$. En este modelo, la **tasa específica** o **relativa de crecimiento,** definida por

$$\frac{dP/dt}{P} \tag{1}$$

es una constante k. Es difícil encontrar casos reales de un crecimiento exponencial durante largos periodos, porque en cierto momento los recursos limitados del ambiente ejercerán restricciones sobre el crecimiento de la población. Por lo que para otros modelos, se puede esperar que la razón (1) decrezca conforme la población P aumenta de tamaño.

La hipótesis de que la tasa con que crece (o decrece) una población sólo depende del número presente P y no de mecanismos dependientes del tiempo, tales como los fenómenos estacionales (vea el problema 18, en los ejercicios 1.3), se puede enunciar como:

$$\frac{dP/dt}{P} = f(P) \quad \text{o} \quad \frac{dP}{dt} = Pf(P). \tag{2}$$

Esta ecuación diferencial, que se adopta en muchos modelos de población de animales, se llama **hipótesis de dependencia de densidad**.

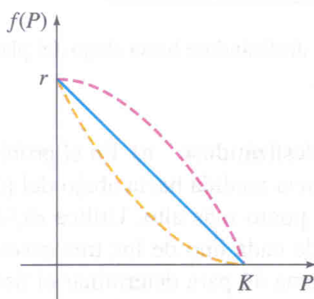


FIGURA 3.2.1 La suposición más simple para $f(P)$ es una recta (color azul).

ECUACIÓN LOGÍSTICA Supóngase que un medio ambiente es capaz de sostener, como máximo, una cantidad K determinada de individuos en una población. La cantidad K se llama **capacidad de sustento** del ambiente. Así para la función f en la ecuación (2) se tiene que $f(K) = 0$ y simplemente hacemos $f(0) = r$. En la figura 3.2.1 vemos tres funciones que satisfacen estas dos condiciones. La hipótesis más sencilla es que $f(P)$ es lineal, es decir, $f(P) = c_1P + c_2$. Si aplicamos las condiciones $f(0) = r$ y $f(K) = 0$, tenemos

que $c_2 = r$ y $c_1 = -r/K$, respectivamente, y así f adopta la forma $f(P) = r - (r/K)P$. Entonces la ecuación (2) se convierte en

$$\frac{dP}{dt} = P\left(r - \frac{r}{K}P\right). \tag{3}$$

Redefiniendo las constantes, la ecuación no lineal (3) es igual a

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP). \tag{4}$$

Alrededor de 1840, P. F. Verhulst, matemático y biólogo belga, investigó modelos matemáticos para predecir la población humana en varios países. Una de las ecuaciones que estudió fue la (4), con $a > 0$ y $b > 0$. Esa ecuación se llamó **ecuación logística** y su solución se denomina **función logística**. La gráfica de una función logística es la **curva logística.**

La ecuación diferencial $dP/dt = kP$ no es un modelo muy fiel de la población cuando ésta es muy grande. Cuando las condiciones son de sobrepoblación, se presentan efectos negativos sobre el ambiente como contaminación y exceso de demanda de alimentos y combustible, esto puede tener un efecto inhibidor en el crecimiento para la población. Como veremos a continuación, la solución de (4) está acotada conforme $t \to \infty$. Si se rescribe (4) como $dP/dt = aP - bP^2$, el término no lineal $-bP^2$, $b > 0$ se puede interpretar como un término de "inhibición" o "competencia". También, en la mayoría de las aplicaciones la constante positiva a es mucho mayor que b.

Se ha comprobado que las curvas logísticas predicen con bastante exactitud el crecimiento de ciertos tipos de bacterias, protozoarios, pulgas de agua (*Dafnia*) y moscas de la fruta (*Drosófila*) en un espacio limitado.

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN LOGÍSTICA Uno de los métodos para resolver la ecuación (4) es por separación de variables. Al descomponer el lado izquierdo de $dP/P(a - bP) = dt$ en fracciones parciales e integrar, se obtiene

$$\left(\frac{1/a}{P} + \frac{b/a}{a - bP}\right)dP = dt$$

$$\frac{1}{a}\ln|P| - \frac{1}{a}\ln|a - bP| = t + c$$

$$\ln\left|\frac{P}{a - bP}\right| = at + ac$$

$$\frac{P}{a - bP} = c_1 e^{at}.$$

De la última ecuación se tiene que

$$P(t) = \frac{ac_1 e^{at}}{1 + bc_1 e^{at}} = \frac{ac_1}{bc_1 + e^{-at}}.$$

Si $P(0) = P_0$, $P_0 \neq a/b$, encontramos que $c_1 = P_0 b(a - bP_0)$ y así, sustituyendo y simplificando, la solución se convierte en

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}. \tag{5}$$

GRÁFICAS DE $P(t)$ La forma básica de la función logística $P(t)$ se puede obtener sin mucho esfuerzo. Aunque la variable t usualmente representa el tiempo y raras veces se consideran aplicaciones en las que $t < 0$, sin embargo tiene cierto interés incluir este intervalo al mostrar las diferentes gráficas de P. De la ecuación (5) vemos que

$$P(t) \to \frac{aP_0}{bP_0} = \frac{a}{b} \quad \text{conforme} \quad t \to \infty \quad \text{y} \quad P(t) \to 0 \quad \text{conforme} \quad t \to -\infty.$$

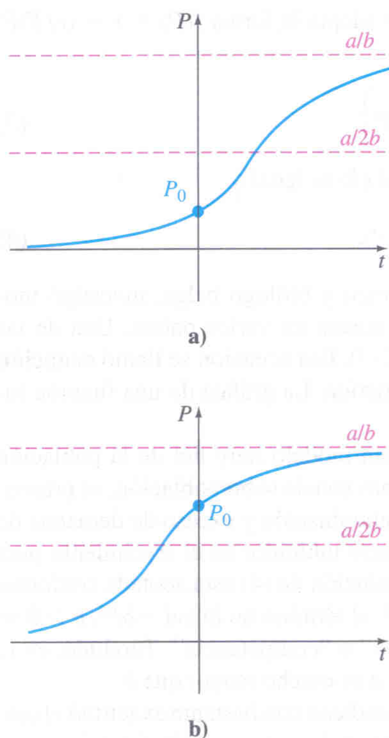


FIGURA 3.2.2 Curvas logísticas para diferentes condiciones iniciales.

La línea punteada $P = a/2b$ de la figura 3.2.2 corresponde a la ordenada de un punto de inflexión de la curva logística. Para mostrar esto derivamos la ecuación (4) usando la regla del producto:

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} = P\left(-b\frac{dP}{dt}\right) + (a - bP)\frac{dP}{dt} &= \frac{dP}{dt}(a - 2bP)\\ &= P(a - bP)(a - 2bP)\\ &= 2b^2P\left(P - \frac{a}{b}\right)\left(P - \frac{a}{2b}\right).\end{aligned}$$

Recuerde del cálculo que los puntos donde $d^2P/dt^2 = 0$ son posibles puntos de inflexión, pero obviamente se pueden excluir $P = 0$ y $P = a/b$. Por tanto $P = a/2b$ es el único valor posible para la ordenada en la cual puede cambiar la concavidad de la gráfica. Para $0 < P < a/2b$ se tiene que $P'' > 0$, y $a/2b < P < a/b$ implica que $P'' < 0$. Así cuando se lee de izquierda a derecha, la gráfica cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, en el punto que corresponde a $P = a/2b$. Cuando el valor inicial satisface a $0 < P_0 < a/2b$, la gráfica de $P(t)$ adopta la forma de una S, como se ve en la figura 3.2.2a. Para $a/2b < P_0 < a/b$ la gráfica aún tiene la forma de S, pero el punto de inflexión ocurre en un valor negativo de t, como se muestra en la figura 3.2.2b.

En la ecuación (5) de la sección 1.3 ya hemos visto a la ecuación (4) en la forma $dx/dt = kx(n + 1 - x)$, $k > 0$. Esta ecuación diferencial presenta un modelo razonable para describir la propagación de una epidemia que comienza cuando se introduce una persona infectada en una población estática. La solución $x(t)$ representa la cantidad de personas que contraen la enfermedad al tiempo t.

EJEMPLO 1 Crecimiento logístico

Suponga que un estudiante es portador del virus de la gripe y regresa a su aislado campus de 1000 estudiantes. Si se supone que la razón con que se propaga el virus es proporcional no sólo a la cantidad x de estudiantes infectados sino también a la cantidad de estudiantes no infectados, determine la cantidad de estudiantes infectados después de 6 días si además se observa que después de cuatro días $x(4) = 50$.

SOLUCIÓN Suponiendo que nadie deja el campus mientras dura la enfermedad, debemos resolver el problema con valores iniciales

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x), \quad x(0) = 1.$$

Identificando $a = 1000k$ y $b = k$, vemos de inmediato en la ecuación (5) que

$$x(t) = \frac{1000k}{k + 999ke^{-1000kt}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}}.$$

Ahora, usamos la información $x(4) = 50$ y calculamos k con

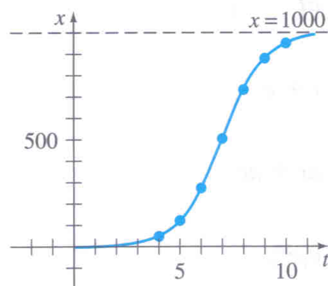
$$50 = \frac{1000}{1 + 999e^{-4000k}}.$$

Encontramos $-1000k = \frac{1}{4}\ln\frac{19}{999} = -0.9906$. Por tanto

$$x(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.9906t}}.$$

Finalmente, $$x(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-5.9436}} = 276 \text{ estudiantes}.$$

En la tabla de la figura 3.2.3b se dan otros valores calculados de $x(t)$. ■



a)

t (días)	x (número de infectados)
4	50 (observados)
5	124
6	276
7	507
8	735
9	882
10	953

b)

FIGURA 3.2.3 El número de estudiantes infectados $x(t)$ tiende a 1000 conforme pasa el tiempo t.

MODIFICACIONES DE LA ECUACIÓN LOGÍSTICA Hay muchas variaciones de la ecuación logística. Por ejemplo, las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) - h \quad \text{y} \quad \frac{dP}{dt} = P(a - bP) + h \tag{6}$$

podrían servir, a su vez, como modelos para la población de una pesquería donde el pez se **pesca** o se **reabastece** con una razón h. Cuando $h > 0$ es una constante, las ED en las ecuaciones (6) se analizan fácilmente cualitativamente o se resuelven analíticamente por separación de variables. Las ecuaciones en (6) también podrían servir como modelos de poblaciones humanas que decrecen por emigración o que crecen por inmigración, respectivamente. La razón h en las ecuaciones (6) podría ser función del tiempo t o depender de la población; por ejemplo, se podría pescar periódicamente o con una razón proporcional a la población P al tiempo t. En el último caso, el modelo sería $P' = P(a - bP) - cP$, $c > 0$. La población humana de una comunidad podría cambiar debido a la inmigración de manera tal que la contribución debida a la inmigración es grande cuando la población P de la comunidad era pequeña pero pequeña cuando P es grande; entonces un modelo razonable para la población de la comunidad sería $P' = P(a - bP) + ce^{-kP}$, $c > 0$, $k > 0$. Vea el problema 22 de los ejercicios 3.2. Otra ecuación de la forma dada en (2),

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b \ln P), \tag{7}$$

es una modificación de la ecuación logística conocida como la **ecuación diferencial de Gompertz**. Esta ED algunas veces se usa como un modelo en el estudio del crecimiento o decrecimiento de poblaciones, el crecimiento de tumores sólidos y cierta clase de predicciones actuariales. Vea el problema 22 de los ejercicios 3.2.

REACCIONES QUÍMICAS Suponga que a gramos de una sustancia química A se combinan con b gramos de una sustancia química B. Si hay M partes de A y N partes de B formadas en el compuesto y $X(t)$ es el número de gramos de la sustancia química C formada, entonces el número de gramos de la sustancia química A y el número de gramos de la sustancia química B que quedan al tiempo t son, respectivamente,

$$a - \frac{M}{M+N}X \quad \text{y} \quad b - \frac{N}{M+N}X.$$

La ley de acción de masas establece que cuando no hay ningún cambio de temperatura, la razón con la que reaccionan las dos sustancias es proporcional al producto de las cantidades de A y de B que aún no se han transformado al tiempo t:

$$\frac{dX}{dt} \propto \left(a - \frac{M}{M+N}X\right)\left(b - \frac{N}{M+N}X\right). \tag{8}$$

Si se saca el factor $M/(M + N)$ del primer factor y $N/(M + N)$ del segundo y se introduce una constante de proporcionalidad $k > 0$, la expresión (8) toma la forma

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X), \tag{9}$$

donde $\alpha = a(M + N)/M$ y $\beta = b(M + N)/N$. Recuerde de (6) de la sección 1.3 que una reacción química gobernada por la ecuación diferencial no lineal (9) se dice que es una **reacción de segundo orden**.

EJEMPLO 2 Reacción química de segundo orden

Cuando se combinan dos sustancias químicas A y B se forma un compuesto C. La reacción resultante entre las dos sustancias químicas es tal que por cada gramo de A se usan 4 gramos de B. Se observa que a los 10 minutos se han formado 30 gramos

del producto C. Determine la cantidad de C en el tiempo t si la razón de la reacción es proporcional a las cantidades de A y B que quedan y si inicialmente hay 50 gramos de A y 32 gramos de B. ¿Qué cantidad de compuesto C hay a los 15 minutos? Interprete la solución cuando $t \to \infty$.

SOLUCIÓN Sea $X(t)$ la cantidad de gramos del compuesto C presentes en el tiempo t. Es obvio que $X(0) = 0$ g y $X(10) = 30$ g.

Si, por ejemplo, hay 2 gramos del producto C, hemos debido usar, digamos, a gramos de A y b gramos de B, así $a + b = 2$ y $b = 4a$. Por tanto, debemos usar $a = \frac{2}{5} = 2\left(\frac{1}{5}\right)$ de la sustancia química A y $b = \frac{8}{5} = 2\left(\frac{4}{5}\right)$ g de B. En general, para obtener X gramos de C debemos usar

$$\frac{1}{5}X \text{ gramos de } A \quad \text{y} \quad \frac{4}{5}X \text{ gramos de } B.$$

Entonces las cantidades de A y B que quedan al tiempo t son

$$50 - \frac{1}{5}X \quad \text{y} \quad 32 - \frac{4}{5}X,$$

respectivamente.

Sabemos que la razón con la que se forma el compuesto C satisface que

$$\frac{dX}{dt} \propto \left(50 - \frac{1}{5}X\right)\left(32 - \frac{4}{5}X\right).$$

Para simplificar las operaciones algebraicas subsecuentes, factorizamos $\frac{1}{5}$ del primer término y $\frac{4}{5}$ del segundo y después introduciremos la constante de proporcionalidad:

$$\frac{dX}{dt} = k(250 - X)(40 - X).$$

Separamos variables y por fracciones parciales podemos escribir que

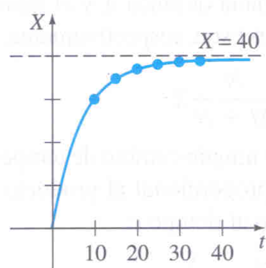
$$-\frac{\frac{1}{210}}{250 - X}\,dX + \frac{\frac{1}{210}}{40 - X}\,dX = k\,dt.$$

Integrando se obtiene

$$\ln \frac{250 - X}{40 - X} = 210kt + c_1 \quad \text{o} \quad \frac{250 - X}{40 - X} = c_2 e^{210kt}. \tag{10}$$

Cuando $t = 0$, $X = 0$, se tiene que en este punto $c_2 = \frac{25}{4}$. Usando $X = 30$ g en $t = 10$ encontramos que $210k = \frac{1}{10}\ln\frac{88}{25} = 0.1258$. Con esta información se despeja X de la última ecuación (10):

$$X(t) = 1000\frac{1 - e^{-0.1258t}}{25 - 4e^{-0.1258t}}. \tag{11}$$



a)

t (min)	X (g)
10	30 (medido)
15	34.78
20	37.25
25	38.54
30	39.22
35	39.59

b)

FIGURA 3.2.4 $X(t)$ comienza en 0 y tiende a 40 cuando t crece.

En la figura 3.2.4 se presenta el comportamiento de X como una función del tiempo. Es claro de la tabla adjunta y de la ecuación (11) que $X \to 40$ conforme $t \to \infty$. Esto significa que se forman 40 gramos del compuesto C, quedando

$$50 - \frac{1}{5}(40) = 42 \text{ g de } A \quad \text{y} \quad 32 - \frac{4}{5}(40) = 0 \text{ g de } B. \qquad \blacksquare$$

COMENTARIOS

La integral indefinida $\int du/(a^2 - u^2)$ se puede evaluar en términos de logaritmos tangente hiperbólica inversa, o de la cotangente hiperbólica inversa. Por ejemplo, de los dos resultados

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} + c, \quad |u| < a \tag{12}$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c, \quad |u| \neq a, \tag{13}$$

la ecuación (12) puede ser conveniente en los problemas 15 y 24 de los ejercicios 3.2, mientras que la ecuación (13) puede ser preferible en el problema 25.

EJERCICIOS 3.2

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-3.

Ecuación logística

1. La cantidad $N(t)$ de supermercados del país que están usando sistemas de revisión computarizados se describe por el problema con valores iniciales

$$\frac{dN}{dt} = N(1 - 0.0005N), \quad N(0) = 1.$$

a) Use el concepto de esquema de fase de la sección 2.1 para predecir cuántos supermercados se espera que adopten el nuevo procedimiento en un periodo de tiempo largo. A mano, dibuje una curva solución del problema con valores iniciales dados.

b) Resuelva el problema con valores iniciales y después utilice un programa de graficación para comprobar y trazar la curva solución del inciso a). ¿Cuántas compañías se espera que adopten la nueva tecnología cuando $t = 10$?

2. La cantidad $N(t)$ de personas en una comunidad bajo la influencia de determinado anuncio está gobernada por la ecuación logística. Inicialmente $N(0) = 500$ y se observa que $N(1) = 1000$. Determine $N(t)$ si se predice que habrá un límite de 50 000 personas en la comunidad que verán el anuncio.

3. Un modelo para la población $P(t)$ en un suburbio de una gran ciudad está descrito por el problema con valores iniciales

$$\frac{dP}{dt} = P(10^{-1} - 10^{-7}P), \quad P(0) = 5000,$$

donde t se expresa en meses. ¿Cuál es el valor límite de la población? ¿Cuánto tardará la población en alcanzar la mitad de ese valor límite?

4. a) En la tabla 3.1 se presentan los datos del censo de los Estados Unidos entre 1790 y 1950. Construya un modelo de población logístico usando los datos de 1790, 1850 y 1910.

b) Construya una tabla en la que se compare la población real del censo con la población predicha por el modelo del inciso a). Calcule el error y el error porcentual para cada par de datos.

TABLA 3.1

Año	Población (en millones)
1790	3.929
1800	5.308
1810	7.240
1820	9.638
1830	12.866
1840	17.069
1850	23.192
1860	31.433
1870	38.558
1880	50.156
1890	62.948
1900	75.996
1910	91.972
1920	105.711
1930	122.775
1940	131.669
1950	150.697

Modificaciones del modelo logístico

5. a) Si se pesca un número constante h de peces de una pesquería por unidad de tiempo, entonces un modelo para la población $P(t)$ de una pesquería al tiempo t está dado por

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) - h, \quad P(0) = P_0,$$

donde a, b, h y P_0 son constantes positivas. Suponga que $a = 5$, $b = 1$ y $h = 4$. Puesto que la ED es autónoma, utilice el concepto de esquema de fase de la sección 2.1 para dibujar curvas solución representativas que corresponden a los casos $P_0 > 4$, $1 < P_0 <$

4 y $0 < P_0 < 1$. Determine el comportamiento de la población a largo plazo en cada caso.

b) Resuelva el PVI del inciso a). Compruebe los resultados de su esquema de fase del inciso a) utilizando un programa de graficación para trazar la gráfica de $P(t)$ con una condición inicial tomada de cada uno de los tres intervalos dados.

c) Utilice la información de los incisos a) y b) para determinar si la población de la pesquería desaparecerá en un tiempo finito. De ser así, determine ese tiempo.

6. Investigue el modelo de pesca del problema 5 tanto cualitativa como analíticamente en el caso en que $a = 5$, $b = 1$, $h = \frac{25}{4}$. Determine si la población desaparecerá en un tiempo finito. De ser así, determine ese tiempo.

7. Repita el problema 6 en el caso $a = 5$, $b = 1$, $h = 7$.

8. a) Suponga $a = b = 1$ en la ecuación diferencial de Gompertz, ecuación (7). Puesto que la ED es autónoma, utilice el concepto de esquema de fase de la sección 2.1 para dibujar curvas solución representativas correspondientes a los casos $P_0 > e$ y $0 < P_0 < e$.

b) Suponga que $a = 1$, $b = -1$ en la ecuación (7). Utilice un nuevo esquema de fase para dibujar las curvas solución representativas correspondientes a los casos $P_0 > e^{-1}$ y $0 < P_0 < e^{-1}$.

c) Encuentre una solución explícita de la ecuación (7) sujeta a $P(0) = P_0$.

Reacciones químicas

9. Dos sustancias químicas A y B se combinan para formar la sustancia química C. La razón de reacción es proporcional al producto de las cantidades instantáneas de A y B que no se han convertido en C. Al principio hay 40 gramos de A y 50 gramos de B, y por cada gramo de B se consumen 2 de A. Se observa que a los cinco minutos se han formado 10 gramos de C. ¿Cuánto se forma en 20 minutos de C? ¿Cuál es la cantidad límite de C a largo plazo? ¿Cuánto de las sustancias A y B queda después de mucho tiempo?

10. Resuelva el problema 9 si hay al principio 100 gramos de la sustancia química A. ¿Cuándo se formará la mitad de la cantidad límite de C?

Modelos no lineales adicionales

11. Tanque cilíndrico con gotera Un tanque en forma de un cilindro recto circular en posición vertical está sacando agua por un agujero circular en su fondo. Como se vio en (10) de la sección 1.3, cuando se desprecia la fricción y la contracción del agujero, la altura h del agua en el tanque está descrita por

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh},$$

donde A_a y A_h son las áreas de sección transversal del agua y del agujero, respectivamente.

a) Resuelva la ED si la altura inicial del agua es H. A mano, dibuje la gráfica de $h(t)$ y de su intervalo de definición I en términos de los símbolos A_w, A_h y H. Utilice $g = 32$ pies/s^2.

b) Suponga que el tanque tiene 10 pies de altura y un radio de 2 pies y el agujero circular tiene un radio de $\frac{1}{2}$ pulg. Si el tanque está inicialmente lleno, ¿cuánto tarda en vaciarse?

12. Tanque cilíndrico con gotera (continuación) Cuando se considera la fricción y contracción del agua en el agujero, el modelo del problema 11 se convierte en

$$\frac{dh}{dt} = -c\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh},$$

donde $0 < c < 1$. ¿Cuánto tarda el tanque del problema 11b en vaciarse si $c = 0.6$? Vea el problema 13 de los ejercicios 1.3.

13. Tanque cónico con gotera Un tanque con forma de cono recto con el vértice hacia abajo, está sacando agua por un agujero circular en su fondo.

a) Suponga que el tanque tiene 20 pies de altura y tiene un radio de 8 pies y el agujero circular mide dos pulgadas de radio. En el problema 14 de los ejercicios 1.3 se le pidió mostrar que la ecuación diferencial que gobierna la altura h del agua que sale del tanque es

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{5}{6h^{3/2}}.$$

En este modelo, se consideró la fricción y la contracción del agua en el agujero con $c = 0.6$ y el valor de g se tomó de 32 pies/s^2. Véase la figura 1.3.12. Si al principio el tanque está lleno, ¿cuánto tarda en vaciarse?

b) Suponga que el tanque tiene un ángulo de vértice de 60° y el agujero circular mide dos pulgadas de radio. Determine la ecuación diferencial que gobierna la altura h del agua. Utilice $c = 0.6$ y $g = 32$ pies/s^2. Si al principio la altura del agua es de 9 pies, ¿cuánto tarda en vaciarse el tanque?

14. Tanque cónico invertido Suponga que se invierte el tanque cónico del problema 13a, como se muestra en la figura 3.2.5 y que sale agua por un agujero circular con un radio de dos pulgadas en el centro de su base circular. ¿El tiempo en que se vacía el tanque lleno es el mismo que para el tanque con el vértice hacia abajo del problema 13? Tome el coeficiente de fricción/contracción de $c = 0.6$ y $g = 32$ pies/s^2.

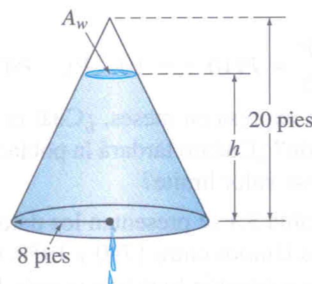


FIGURA 3.2.5 Tanque cónico invertido del problema 14.

15. Resistencia del aire Una ecuación diferencial para la velocidad v de una masa m que cae sujeta a la resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2,$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad. La dirección positiva es hacia abajo.

a) Resuelva la ecuación sujeta a la condición inicial $v(0) = v_0$.

b) Utilice la solución del inciso a) para determinar la velocidad límite, o terminal de la masa. En el problema 41 de los ejercicios 2.1 vimos cómo determinar la velocidad terminal sin resolver la ED.

c) Si la distancia s, medida desde el punto donde se suelta la masa sobre el suelo, está relacionada con la velocidad v por $ds/dt = v(t)$, encuentre una expresión explícita para $s(t)$ si $s(0) = 0$.

16. ¿Qué tan alto? (Resistencia del aire no lineal) Considere la bala de cañón de 16 libras que se dispara verticalmente hacia arriba en los problemas 36 y 37 en los ejercicios 3.1 con una velocidad inicial $v_0 = 300$ pies/s. Determine la altura máxima que alcanza la bala si se supone que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea. Suponga que la dirección positiva es hacia arriba y tome $k = 0.0003$. [*Sugerencia*: Modifique un poco la ED del problema 15.]

17. Esa sensación de hundimiento **a)** Determine una ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ de una masa m que se hunde en agua que le da una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea y también ejerce una fuerza boyante hacia arriba cuya magnitud está dada por el principio de Arquímedes. Véase el problema 18 de los ejercicios 1.3. Suponga que la dirección positiva es hacia abajo.

b) Resuelva la ecuación diferencial del inciso a).

c) Determine la velocidad límite, o terminal, de la masa hundida.

18. Colector solar La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

describe la forma de una curva plana C que refleja los haces de luz entrantes al mismo punto y podría ser un modelo para el espejo de un telescopio reflector, una antena de satélite o un colector solar. Vea el problema 27 de los ejercicios 1.3. Hay varias formas de resolver esta ED.

a) Compruebe que la ecuación diferencial es homogénea (véase la sección 2.5). Demuestre que la sustitución $y = ux$ produce

$$\frac{u\,du}{\sqrt{1+u^2}\left(1 - \sqrt{1+u^2}\right)} = \frac{dx}{x}.$$

Utilice un SAC (u otra sustitución adecuada) para integrar el lado izquierdo de la ecuación. Muestre que la curva C debe ser una parábola con foco en el origen y simétrica respecto al eje x.

b) Demuestre que la ecuación diferencial puede también resolverse por medio de la sustitución $u = x^2 + y^2$.

19. Tsunami **a)** Un modelo simple para la forma de un tsunami o maremoto, está dado por

$$\frac{dW}{dx} = W\sqrt{4 - 2W},$$

donde $W(x) > 0$ es la altura de la ola expresada como una función de su posición respecto a un punto en altamar. Examinando, encuentre todas las soluciones constantes de la ED.

b) Resuelva la ecuación diferencial del inciso a). Un SAC puede ser útil para la integración.

c) Use un programa de graficación para obtener las gráficas de las soluciones que satisfacen la condición inicial $W(0) = 2$.

20. Evaporación Un estanque decorativo exterior con forma de tanque semiesférico se llenará con agua bombeada hacia el tanque por una entrada en su fondo. Suponga que el radio del tanque es $R = 10$ pies, que el agua se bombea a una rapidez de π pies^3/minuto y que al inicio el tanque está vacío. Véase la figura 3.2.6. Conforme se llena el tanque, éste pierde agua por evaporación. Suponga que la rapidez de evaporación es proporcional al área A de la superficie sobre el agua y que la constante de proporcionalidad es $k = 0.01$.

a) La rapidez de cambio dV/dt del volumen del agua al tiempo t es una rapidez neta. Utilice esta rapidez neta para determinar una ecuación diferencial para la altura h del agua al tiempo t. El volumen de agua que se muestra en la figura es $V = \pi Rh^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$, donde $R = 10$. Exprese el área de la superficie del agua $A = \pi r^2$ en términos de h.

b) Resuelva la ecuación diferencial del inciso a). Trace la gráfica de la solución.

c) Si no hubiera evaporación, ¿cuánto tardaría en llenarse el tanque?

d) Con evaporación, ¿cuál es la profundidad del agua en el tiempo que se determinó en el inciso c)? ¿Alguna vez se llenará el tanque? Demuestre su afirmación.



FIGURA 3.2.6 Estanque decorativo del problema 20.

Problemas de proyecto

21. Recta de regresión Lea en el manual de su SAC acerca de *gráficas de dispersión* (o *diagramas de dispersión*) y *ajuste de rectas por mínimos cuadrados*. La recta que mejor se ajusta a un conjunto de datos se llama **recta de regresión** o **recta de mínimos cuadrados**. Su tarea es construir un modelo logístico para la población de Estados Unidos, definiendo $f(P)$ en (2) como una ecuación de una recta de regresión que se basa en los datos de población que aparecen en la tabla del problema 4. Una manera de hacer esto es aproximar el lado izquierdo $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$ de la primera ecuación en (2), utilizando el cociente de diferencias hacia adelante en lugar de dP/dt:

$$Q(t) = \frac{1}{P(t)}\frac{P(t+h) - P(t)}{h}.$$

a) Haga una tabla de los valores t, $P(t)$ y $Q(t)$ usando $t = 0, 10, 20, \ldots, 160$ y $h = 10$. Por ejemplo, el primer renglón de la tabla debería contener $t = 0$, $P(0)$ y $Q(0)$. Con $P(0) = 3.929$ y $P(10) = 5.308$,

$$Q(0) = \frac{1}{P(0)}\frac{P(10) - P(0)}{10} = 0.035.$$

Observe que $Q(160)$ depende de la población del censo de 1960 $P(170)$. Busque este valor.

b) Use un SAC para obtener el diagrama de dispersión de los datos $(P(t), Q(t))$ que se calculó en el inciso a). También utilice un SAC para encontrar una ecuación de la recta de regresión y superponer su gráfica en el diagrama de dispersión.

c) Construya un modelo logístico $dP/dt = Pf(P)$, donde $f(P)$ es la ecuación de la recta de regresión que se encontró en el inciso b).

d) Resuelva el modelo del inciso c) usando la condición inicial $P(0) = 3.929$.

e) Utilice un SAC para obtener un diagrama de dispersión, esta vez de los pares ordenados $(t, P(t))$ de su tabla del inciso a). Utilice un SAC para superponer la gráfica de la solución del inciso d) en el diagrama de dispersión.

f) Busque los datos del censo de Estados Unidos para 1970, 1980 y 1990. ¿Qué población predice el modelo logístico del inciso c) para estos años? ¿Qué predice el modelo para la población $P(t)$ de Estados Unidos conforme $t \to \infty$?

22. Modelo de inmigración **a)** En los ejemplos 3 y 4 de la sección 2.1 vimos que cualquier solución $P(t)$ de (4) tiene el comportamiento asintótico $P(t) \to a/b$ conforme $t \to \infty$ para $P_0 > a/b$ y para $0 < P_0 < a/b$; como consecuencia, la solución de equilibrio $P = a/b$ se llama un atractor. Utilice un programa para determinar raíces de un SAC (o una calculadora graficadora) para aproximar la solución de equilibrio del modelo de inmigración

$$\frac{dP}{dt} = P(1 - P) + 0.3e^{-P}.$$

b) Utilice un programa de graficación para trazar la gráfica de la función $F(P) = P(1 - P) + 0.3e^{-P}$. Explique cómo se puede utilizar esta gráfica para determinar si el número que se encontró en el inciso a) es un atractor.

c) Use un programa de solución numérica para comparar las curvas solución de los PVI

$$\frac{dP}{dt} = P(1 - P), \quad P(0) = P_0$$

Para $P_0 = 0.2$ y $P_0 = 1.2$ con las curvas solución para los PVI.

$$\frac{dP}{dt} = P(1 - P) + 0.3e^{-P}, \quad P(0) = P_0$$

para $P_0 = 0.2$ y $P_0 = 1.2$. Superponga todas las curvas en los mismos ejes de coordenadas pero, si es posible, utilice un color diferente para las curvas del segundo problema con valores iniciales. En un periodo largo, ¿qué incremento porcentual predice el modelo de inmigración en la población comparado con el modelo logístico?

23. Lo que sube . . . En el problema 16 sea t_a el tiempo que tarda la bala de cañón en alcanzar su altura máxima y sea t_d el tiempo que tarda en caer desde la altura máxima hasta el suelo. Compare el valor t_a con el valor de t_d y compare la magnitud de la velocidad de impacto v_i con la velocidad inicial v_0. Vea el problema 48 de los ejercicios 3.1. Aquí puede ser útil un programa para determinar raíces de un SAC. [*Sugerencia*: Utilice el modelo del problema 15 cuando la bala de cañón va cayendo.]

24. Paracaidismo Un paracaidista está equipado con un cronómetro y un altímetro. Como se muestra en la figura 3.2.7, el paracaidista abre su paracaídas 25 segundos después de saltar del avión que vuela a una altitud de 20 000 pies, y observa que su altitud es de 14 800 pies. Suponga que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea, la velocidad inicial del paracaidista al saltar del avión es cero y $g = 32$ pies/s^2.

a) Encuentre la distancia $s(t)$, medida desde el avión, que ha recorrido el paracaidista durante la caída libre en el tiempo t. [*Sugerencia*: No se especifica la constante de proporcionalidad k en el modelo del problema 15. Use la expresión para la velocidad terminal v_t que se

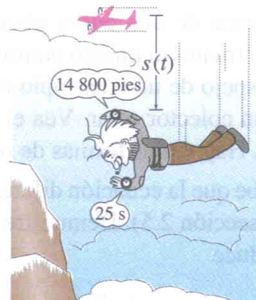


FIGURA 3.2.7 Paracaidista del problema 24.

obtuvo en el inciso b) del problema 15 para eliminar k del PVI. Luego, finalmente encuentre v_t.]

b) ¿Qué distancia descendió el paracaidista y cuál es su velocidad cuando $t = 15$ s?

25. Impacto en el fondo Un helicóptero sobrevuela 500 pies por arriba de un gran tanque abierto lleno de líquido (no agua). Se deja caer un objeto compacto y denso que pesa 160 libras (liberado desde el reposo) desde el helicóptero en el líquido. Suponga que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea v en tanto el objeto está en el aire y que el amortiguamiento viscoso es proporcional a v^2 después de que el objeto ha entrado al líquido. Para el aire, tome $k = \frac{1}{4}$, y para el líquido tome $k = 0.1$. Suponga que la dirección positiva es hacia abajo. Si el tanque mide 75 pies de alto, determine el tiempo y la velocidad de impacto cuando el objeto golpea el fondo del tanque. [*Sugerencia*: Piense en términos de dos PVI distintos. Si se utiliza la ecuación (13), tenga cuidado de eliminar el signo de valor absoluto. Se podría comparar la velocidad cuando el objeto golpea el líquido, la velocidad inicial para el segundo problema, con la velocidad terminal v_t del objeto cuando cae a través del líquido.]

26. Hombre viejo de río . . . En la figura 3.2.8a suponga que el eje y y la recta vertical $x = 1$ representan, respectivamente, las playas oeste y este de un río que tiene 1 milla de ancho. El río fluye hacia el norte con una velocidad $\mathbf{v}_r$, donde $|\mathbf{v}_r| = v_r$ mi/h es una constante. Un hombre entra a la corriente en el punto (1, 0) en la costa este y nada en una dirección y razón respecto al río dada por el vector $\mathbf{v}_s$, donde la velocidad $|\mathbf{v}_s| = v_s$ mi/h es una constante. El hombre quiere alcanzar la costa oeste exactamente en (0, 0) y así nadar de tal forma que conserve su vector velocidad $\mathbf{v}_s$ siempre con dirección hacia (0, 0). Utilice la figura 3.2.8b como una ayuda para mostrar que un modelo matemático para la trayectoria del nadador en el río es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_s y - v_r\sqrt{x^2 + y^2}}{v_s x}.$$

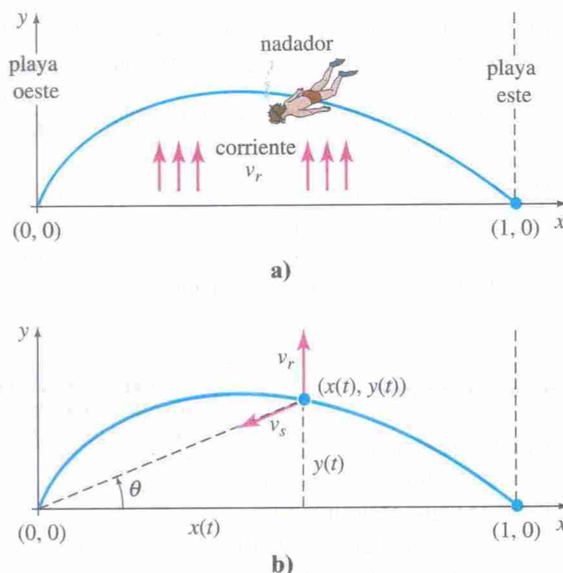


FIGURA 3.2.8 Trayectoria del nadador del problema 26.

[*Sugerencia*: La velocidad $\mathbf{v}$ del nadador a lo largo de la trayectoria o curva que se muestra en la figura 3.2.8 es la resultante $\mathbf{v} = \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_r$. Determine $\mathbf{v}_s$ y $\mathbf{v}_r$ en componentes en las direcciones x y y. Si $x = x(t)$, $y = y(t)$ son ecuaciones paramétricas de la trayectoria del nadador, entonces $\mathbf{v} = (dx/dt, dy/dt)$].

27. a) Resuelva la ED del problema 26 sujeto a $y(1) = 0$. Por conveniencia haga $k = v_r/v_s$.

b) Determine los valores de v_s, para los que el nadador alcanzará el punto (0, 0) examinando $\lim_{x\to 0^+} y(x)$ en los casos $k = 1$, $k > 1$ y $0 < k < 1$.

28. Hombre viejo de río conserva su movimiento . . . Suponga que el hombre del problema 26 de nuevo entra a la corriente en (1, 0) pero esta vez decide nadar de tal forma que su vector velocidad $\mathbf{v}_s$ está siempre dirigido hacia la playa oeste. Suponga que la rapidez $|\mathbf{v}_s| = v_s$ mi/h es una constante. Muestre que un modelo matemático para la trayectoria del nadador en el río es ahora

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v_r}{v_s}.$$

29. La rapidez de la corriente v_r de un río recto tal como el del problema 26 usualmente no es una constante. Más bien, una aproximación a la rapidez de la corriente (medida en millas por hora) podría ser una función tal como $v_r(x) = 30x(1 - x)$, $0 \le x \le 1$, cuyos valores son pequeños en las costas (en este caso, $v_r(0) = 0$ y $v_r(1) = 0$ y más grande en la mitad de río. Resuelva la ED del problema 28 sujeto a $y(1) = 0$, donde $v_s = 2$ mi/h y $v_r(x)$ está dado. Cuando el nadador hace esto a través del río, ¿qué tanto tendrá que caminar en la playa para llegar al punto (0, 0)?

30. Gotas de lluvia continúan cayendo . . . Cuando hace poco se abrió una botella de refresco se encontró que decía dentro de la tapa de la botella:

La velocidad promedio de una gota de lluvia cayendo es de 7 millas/hora.

En una búsqueda rápida por la internet se encontró que el meteorólogo Jeff Haby ofrecía información adicional de que una gota de lluvia esférica en "promedio" tenía un radio de 0.04 pulg. y un volumen aproximado de 0.000000155 pies^3. Utilice estos datos y, si se necesita investigue más y haga otras suposiciones razonables para determinar si "*la velocidad promedio de . . . 7 millas por hora*" es consistente con los modelos de los problemas 35 y 36 de los ejercicios 3.1 y con el problema 15 de este conjunto de ejercicios. También vea el problema 34 de los ejercicios 1.3.

31. El tiempo gotea El **clepsidra**, o reloj de agua, fue un dispositivo que los antiguos egipcios, griegos, romanos y chinos usaban para medir el paso del tiempo al observar el cambio en la altura del agua a la que se le permitía salir por un agujero pequeño en el fondo de un tanque.

a) Suponga que se ha hecho un tanque de vidrio y que tiene la forma de un cilindro circular recto de radio 1 pie. Suponga que $h(0) = 2$ pies corresponde a agua llena hasta la tapa del tanque, un agujero en el fondo es circular con radio $\frac{1}{32}$ pulg, $g = 32$ pies/s^2 y $c = 0.6$.

Utilice la ecuación diferencial del problema 12 para encontrar la altura $h(t)$ del agua.

b) Para el tanque del inciso a), ¿a qué altura desde su fondo se debería marcar ese lado, como se muestra en la figura 3.2.9, que corresponde al paso de una hora? Después determine dónde colocaría las marcas correspondientes al paso de 2 h, 3 h, . . . , 12 h. Explique por qué estas marcas no están igualmente espaciadas.

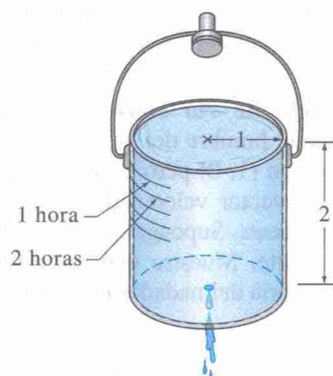


FIGURA 3.2.9 Clepsidra del problema 31.

32. a) Suponga que un tanque de vidrio tiene la forma de un cono con sección transversal circular como se muestra en la figura 3.2.10. Como en el inciso a) del problema 31, suponga que $h(0) = 2$ pies corresponde a agua llena hasta la parte superior del tanque, un agujero circular en el fondo de radio $\frac{1}{32}$ pulg, $g = 32$ pies/s^2 y $c = 0.6$. Utilice la ecuación diferencial del problema 12 para encontrar la altura $h(t)$ del agua.

b) ¿Puede este reloj de agua medir 12 intervalos de tiempo de duración de 1 hora? Explique usando matemáticas.

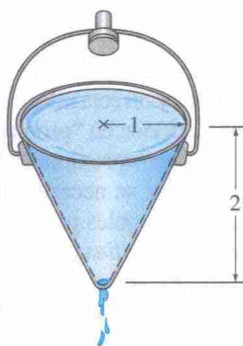


FIGURA 3.2.10 Clepsidra del problema 12.

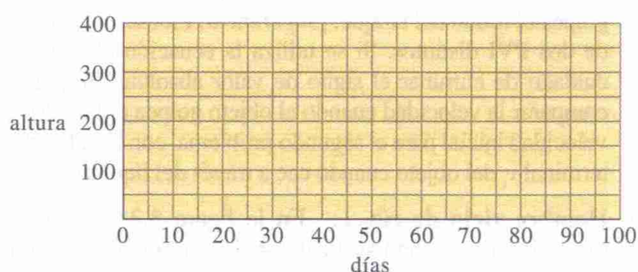
33. Suponga que $r = f(h)$ define la forma de un reloj de agua en el que las marcas del tiempo están igualmente espaciadas. Utilice la ecuación diferencial del problema 12 para encontrar $f(h)$ y dibuje una gráfica típica de h como una función de r. Suponga que el área de sección transversal A_h del agujero es constante. [*Sugerencia*: En este caso $dh/dt = -a$ donde $a > 0$ es una constante.]

Problema aportado

Dr. Michael Prophet, Dr. Doug Shaw, profesores asociados del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Iowa del Norte

34. Un modelo logístico para el crecimiento del girasol Este problema implica un plantío de semillas de girasol y el dibujo de la altura en función del tiempo. Podría llevar de 3 a 4 meses obtener los datos, por lo que ¡comencemos ya! Si puede cámbiela por una planta diferente, pero puede tener que ajustar la escala de tiempo y la escala de altura adecuada.

a) Usted va a crear una gráfica de la altura del girasol (en cm) contra el tiempo (en días). Antes de iniciar intuya cómo será esta curva y ponga la gráfica intuida en la malla.



b) Ahora plante su girasol. Tome la medida de la altura el primer día que su flor brote y llámelo el día 0. Después tome una medida al menos una vez a la semana; éste es el momento para empezar a escribir sus datos.

c) ¿Sus datos de puntos más cercanos parecen crecimiento exponencial o crecimiento logístico? ¿Por qué?

d) Si sus datos más cercanos semejan crecimiento exponencial, la ecuación para la altura en términos del tiempo será $dH/dt = kH$. Si sus datos más cercanos se asemejan a un crecimiento logístico, la ecuación de peso en términos de la altura será $dH/dt = kH(C - H)$. ¿Cuál es el significado físico de C? Utilice sus datos para calcular C.

e) Ahora experimentalmente determine k. Para cada uno de sus valores de t, estime dH/dt usando diferencias de cocientes. Después use el hecho de que $k = \dfrac{dH/dt}{H(C - H)}$ para obtener la mejor estimación de k.

f) Resuelva su ecuación diferencial. Ahora trace la gráfica de su solución junto con los datos de los puntos. ¿Llegó a un buen modelo? ¿Cree que k cambiará si planta un girasol diferente el año que entra?

Problema aportado

Ben Fitzpatrick, Ph. D Clarence Wallen, Departamento de Matemáticas de la Universidad Loyola Marymount

35. Ley de Torricelli Si perforamos un agujero en un cubo lleno de agua, el líquido sale con una razón gobernada por la ley de Torricelli, que establece que la razón de cambio del volumen es proporcional a la raíz cuadrada de la altura del líquido.

La ecuación de la razón dada en la figura 3.2.11 surge del principio de Bernoulli de hidrodinámica que establece que la cantidad $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h$ es una constante. Aquí P es la presión, ρ es la densidad del fluido, v es la velocidad y g es la aceleración de la gravedad. Comparando la parte superior del fluido, a la altura h, con el fluido en el agujero, tenemos que

$$P_{\text{parte superior}} + \tfrac{1}{2}\rho v^2_{\text{parte superior}} + \rho g h = P_{\text{agujero}} + \tfrac{1}{2}\rho v^2_{\text{agujero}} + \rho g \cdot 0.$$

Si la presión en la parte superior y en el fondo son las dos igual a la presión atmosférica y el radio del agujero es mucho menor que el radio del cubo, entonces $P_{\text{parte superior}} = P_{\text{agujero}}$ y $v_{\text{parte superior}} = 0$, por lo que $\rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2_{\text{agujero}}$ conduce a la ley de Torricelli: $v = \sqrt{2gh}$. Puesto que $\frac{dV}{dt} = -A_{\text{agujero}} v$, tenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dV}{dt} = -A_{\text{agujero}}\sqrt{2gh}.$$

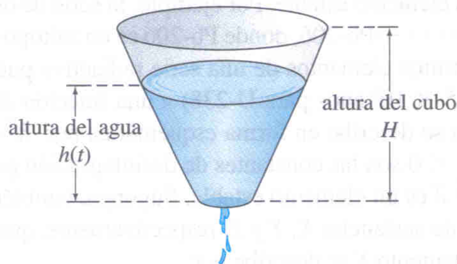


FIGURA 3.2.11 Cubo con gotera.

En este problema, vemos una comparación de la ecuación diferencial de Torricelli con los datos reales.

a) Si el agua está a una altura h, podemos encontrar el volumen de agua en el cubo usando la fórmula

$$V(h) = \frac{\pi}{3m}\left[(mh + R_B)^3 - R_B^3\right]$$

en la que $m = (R_T - R_B)/H$. Aquí R_T y R_B denotan el radio de la parte superior y del fondo del cubo, respectivamente y H denota la altura del cubo. Tomando esta fórmula como dada, se deriva para encontrar una relación entre las razones dV/dt y dh/dt.

b) Use la expresión deducida en el inciso a) para encontrar una ecuación diferencial para $h(t)$ (es decir, tendría una variable independiente t, una variable dependiente h y las constantes en la ecuación).

c) Resuelva esta ecuación diferencial usando separación de variables. Es relativamente directo determinar al tiempo como una función de la altura, pero despejar la altura como una función del tiempo puede ser difícil.

d) Haga una maceta, llénela con agua y vea cómo gotea. Para un conjunto fijo de alturas, registre el tiempo para el que el agua alcanza la altura. Compare los resultados con los de la solución de la ecuación diferencial.

e) Se puede ver que una ecuación diferencial más exacta es

$$\frac{dV}{dt} = -(0.84)A_{\text{agujero}}\sqrt{gh}.$$

Resuelva esta ecuación diferencial y compare los resultados del inciso d).

3.3 MODELADO CON SISTEMAS DE ED DE PRIMER ORDEN

REPASO DE MATERIAL

- Sección 1.3.

INTRODUCCIÓN Esta sección es similar a la sección 1.3 en que se van a analizar ciertos modelos matemáticos, pero en lugar de una sola ecuación diferencial los modelos serán sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Aunque algunos de los modelos se basan en temas que se analizaron en las dos secciones anteriores, no se desarrollan métodos generales para resolver estos sistemas. Hay razones para esto: primero, hasta el momento no se tienen las herramientas matemáticas necesarias para resolver sistemas. Segundo, algunos de los sistemas que se analizan, sobre todo los sistemas de ED *no lineales* de primer orden, simplemente no se pueden resolver de forma analítica. Los capítulos 4, 7 y 8 tratan métodos de solución para sistemas de ED *lineales*.

SISTEMAS LINEALES Y NO LINEALES Se ha visto que una sola ecuación diferencial puede servir como modelo matemático para una sola población en un medio ambiente. Pero si hay, por ejemplo, dos especies que interactúan, y quizá compiten, viviendo en el mismo medio ambiente (por ejemplo, conejos y zorros), entonces un

modelo para sus poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ podría ser un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden como

$$\frac{dx}{dt} = g_1(t, x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g_2(t, x, y). \tag{1}$$

Cuando g_1 y g_2 son lineales en las variables x y y, es decir, g_1 y g_2 tienen las formas

$$g_1(t, x, y) = c_1 x + c_2 y + f_1(t) \qquad \text{y} \qquad g_2(t, x, y) = c_3 x + c_4 y + f_2(t),$$

donde los coeficientes c_i podrían depender de t− entonces se dice que es un **sistema lineal**. Un sistema de ecuaciones diferenciales que no es lineal se llama **no lineal**.

SERIES RADIACTIVAS En el análisis del decaimiento radiactivo en las secciones 1.3 y 3.1 se supuso que la razón de decaimiento era proporcional a la cantidad $A(t)$ de núcleos de la sustancia presentes en el tiempo t. Cuando una sustancia se desintegra por radiactividad, usualmente no transmuta en un solo paso a una sustancia estable, sino que la primera sustancia se transforma en otra sustancia radiactiva, que a su vez forma una tercera sustancia, etc. Este proceso, que se conoce como **serie de decaimiento radiactivo** continúa hasta que llega a un elemento estable. Por ejemplo, la serie de decaimiento del uranio es U-238 → Th-234 → · · · → Pb-206, donde Pb-206 es un isótopo estable del plomo. La vida media de los distintos elementos de una serie radiactiva pueden variar de miles de millones de años (4.5×10^9 años para U-238) a una fracción de segundo. Suponga que una serie radiactiva se describe en forma esquemática por $X \xrightarrow{-\lambda_1} Y \xrightarrow{-\lambda_2} Z$, donde $k_1 = -\lambda_1 < 0$ y $k_2 = -\lambda_2 < 0$ son las constantes de desintegración para las sustancias X y Y, respectivamente, y Z es un elemento estable. Suponga, también, que $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ denotan las cantidades de sustancias X, Y y Z, respectivamente, que quedan al tiempo t. La desintegración del elemento X se describe por

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x,$$

mientras que la razón a la que se desintegra el segundo elemento Y es la razón neta

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_1 x - \lambda_2 y,$$

porque Y está *ganando* átomos de la desintegración de X y al mismo tiempo *perdiendo* átomos como resultado de su propia desintegración. Como Z es un elemento estable, simplemente está ganando átomos de la desintegración del elemento Y:

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_2 y.$$

En otras palabras, un modelo de la serie de decaimiento radiactivo para los tres elementos es el sistema lineal de tres ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x$$
$$\frac{dy}{dt} = \lambda_1 x - \lambda_2 y \tag{2}$$
$$\frac{dz}{dt} = \lambda_2 y.$$

MEZCLAS Considere los dos tanques que se ilustran en la figura 3.3.1. Suponga que el tanque A contiene 50 galones de agua en los que hay disueltas 25 libras de sal. Suponga que el tanque B contiene 50 galones de agua pura. A los tanques entra y sale líquido como se indica en la figura; se supone que tanto la mezcla intercambiada entre los dos tanques como el líquido bombeado hacia fuera del tanque B están bien mezcla-

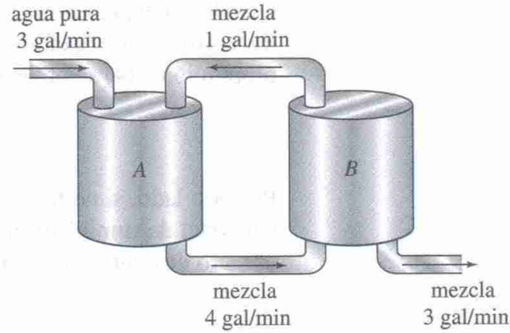


FIGURA 3.3.1 Tanques mezclados conectados.

dos. Se desea construir un modelo matemático que describa la cantidad de libras $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de sal en los tanques A y B, respectivamente, en el tiempo t.

Con un análisis similar al de la página 23 en la sección 1.3 y del ejemplo 5 de la sección 3.1 vemos que la razón de cambio neta de $x_1(t)$ para el tanque A es

$$\frac{dx_1}{dt} = \overbrace{(3 \text{ gal/min}) \cdot (0 \text{ lb/gal}) + (1 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{x_2}{50} \text{ lb/gal}\right)}^{\text{razón de entrada de la sal}} - \overbrace{(4 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{x_1}{50} \text{ lb/gal}\right)}^{\text{razón de salida de la sal}}$$

$$= -\frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2.$$

De manera similar, para el tanque B la razón de cambio neta de $x_2(t)$ es

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dt} &= 4 \cdot \frac{x_1}{50} - 3 \cdot \frac{x_2}{50} - 1 \cdot \frac{x_2}{50} \\ &= \frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2.\end{aligned}$$

Así obtenemos el sistema lineal

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2.\end{aligned} \tag{3}$$

Observe que el sistema anterior va acompañado de las condiciones iniciales $x_1(0) = 25$, $x_2(0) = 0$.

MODELO PRESA-DEPREDADOR Suponga que dos especies de animales interactúan dentro del mismo medio ambiente o ecosistema y suponga además que la primera especie se alimenta sólo de vegetación y la segunda se alimenta sólo de la primera especie. En otras palabras, una especie es un depredador y la otra es una presa. Por ejemplo, los lobos cazan caribúes que se alimentan de pasto, los tiburones devoran peces pequeños y el búho nival persigue a un roedor del ártico llamado lemming. Por razones de análisis, imagínese que los depredadores son zorros y las presas conejos.

Sea $x(t)$ y $y(t)$ las poblaciones de zorros y conejos, respectivamente, en el tiempo t. Si no hubiera conejos, entonces se podría esperar que los zorros, sin un suministro adecuado de alimento, disminuyeran en número de acuerdo con

$$\frac{dx}{dt} = -ax, \qquad a > 0. \tag{4}$$

Sin embargo cuando hay conejos en el medio, parece razonable que el número de encuentros o interacciones entre estas dos especies por unidad de tiempo sea conjuntamente proporcional a sus poblaciones x y y, es decir, proporcional al producto xy. Así,

cuando están presentes los conejos hay un suministro de alimento y, en consecuencia, los zorros se agregan al sistema en una proporción bxy, $b > 0$. Sumando esta última proporción a (4) se obtiene un modelo para la población de zorros:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy. \tag{5}$$

Por otro lado, si no hay zorros, entonces la población de conejos, con una suposición adicional de suministro ilimitado de alimento, crecería con una razón proporcional al número de conejos presentes en el tiempo t:

$$\frac{dy}{dt} = dy, \qquad d > 0. \tag{6}$$

Pero cuando están presentes los zorros, un modelo para la población de conejos es la ecuación (6) disminuida por cxy, $c > 0$; es decir, la razón a la que los conejos son comidos durante sus encuentros con los zorros:

$$\frac{dy}{dt} = dy - cxy. \tag{7}$$

Las ecuaciones (5) y (7) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax + bxy = x(-a + by) \\ \frac{dy}{dt} &= dy - cxy = y(d - cx), \end{aligned} \tag{8}$$

donde a, b, c y d son constantes positivas. Este famoso sistema de ecuaciones se conoce como **modelo presa-depredador de Lotka-Volterra**.

Excepto por dos soluciones constantes, $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ y $x(t) = d/c$, $y(t) = a/b$, el sistema no lineal (8) no se puede resolver en términos de funciones elementales. Sin embargo, es posible analizar estos sistemas en forma cuantitativa y cualitativa. Vea el capítulo 9, "Soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales", y el capítulo 10 "Sistemas autónomos planos."*

EJEMPLO 1 Modelo presa-depredador

Suponga que

$$\frac{dx}{dt} = -0.16x + 0.08xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 4.5y - 0.9xy$$

representa un modelo presa-depredador. Debido a que se está tratando con poblaciones, se tiene $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$. En la figura 3.3.2, que se obtuvo con la ayuda de un programa de solución numérica, se ilustran las curvas de población características de los depredadores y presa para este modelo superpuestas en los mismos ejes de coordenadas. Las condiciones iniciales que se utilizaron fueron $x(0) = 4$, $y(0) = 4$. La curva en color rojo representa la población $x(t)$ de los depredadores (zorros) y la curva en color azul es la población $y(t)$ de la presa (conejos). Observe que el modelo al parecer predice que ambas poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ son periódicas en el tiempo. Esto tiene sentido desde el punto de vista intuitivo porque conforme decrece el número de presas, la población de depredadores decrece en algún momento como resultado de un menor suministro de alimento; pero junto con un decrecimiento en el número de depredadores hay un incremento en el número de presas; esto a su vez da lugar a un mayor número de depredadores, que en última instancia origina otro decrecimiento en el número de presas. ■

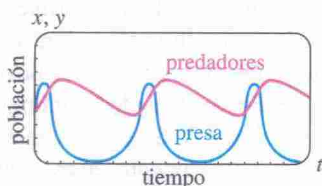


FIGURA 3.3.2 Parecen ser periódicas las poblaciones de depredadores (rojo) y presa (azul).

*Los capítulos 10 a 15 están en la versión ampliada de este libro, *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera*.

MODELOS DE COMPETENCIA Ahora suponga que dos especies de animales ocupan el mismo ecosistema, no como depredador y presa sino como competidores por los mismos recursos (como alimento y espacio vital) en el sistema. En ausencia de la otra, suponga que la razón a la que crece cada población está dada por

$$\frac{dx}{dt} = ax \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = cy, \tag{9}$$

respectivamente.

Como las dos especies compiten, otra suposición podría ser que cada una de estas razones se reduzca simplemente por la influencia o existencia, de la otra población. Así un modelo para las dos poblaciones está dado por el sistema lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - by \\ \frac{dy}{dt} &= cy - dx, \end{aligned} \tag{10}$$

donde a, b, c y d son constantes positivas.

Por otra parte, se podría suponer, como se hizo en (5), que cada razón de crecimiento en (9) debe ser reducida por una razón proporcional al número de interacciones entre las dos especies:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= cy - dxy. \end{aligned} \tag{11}$$

Examinando se encuentra que este sistema no lineal es similar al modelo depredador-presa de Lotka-Volterra. Por último, podría ser más real reemplazar las razones en (9), lo que indica que la población de cada especie en aislamiento crece de forma exponencial, con tasas que indican que cada población crece en forma logística (es decir, en un tiempo largo la población se acota):

$$\frac{dx}{dt} = a_1x - b_1x^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = a_2y - b_2y^2. \tag{12}$$

Cuando estas nuevas razones decrecen a razones proporcionales al número de interacciones, se obtiene otro modelo no lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x - b_1x^2 - c_1xy = x(a_1 - b_1x - c_1y) \\ \frac{dy}{dt} &= a_2y - b_2y^2 - c_2xy = y(a_2 - b_2y - c_2x), \end{aligned} \tag{13}$$

donde los coeficientes son positivos. Por supuesto, el sistema lineal (10) y los sistemas no lineales (11) y (13) se llaman **modelos de competencia**.

REDES Una red eléctrica que tiene más de una malla también da lugar a ecuaciones diferenciales simultáneas. Como se muestra en la figura 3.3.3, la corriente $i_1(t)$ se divide en las direcciones que se muestran en el punto B_1 llamado *punto de ramificación* de la red. Por la **primera ley de Kirchhoff** se puede escribir

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t). \tag{14}$$

Además, también se puede aplicar la **segunda ley de Kirchhoff** a cada malla. Para la malla $A_1B_1B_2A_2A_1$, suponiendo una caída de voltaje en cada parte del circuito, se obtiene

$$E(t) = i_1R_1 + L_1\frac{di_2}{dt} + i_2R_2. \tag{15}$$

De modo similar, para la malla $A_1B_1C_1C_2B_2A_2A_1$ tenemos que

$$E(t) = i_1R_1 + L_2\frac{di_3}{dt}. \tag{16}$$

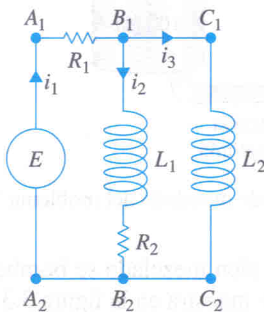


FIGURA 3.3.3 Red cuyo modelo está dado en (17).

Usando (14) para eliminar i_1 en (15) y (16) se obtienen dos ecuaciones lineales de primer orden para las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$:

$$\begin{aligned} L_1\frac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2)i_2 + R_1 i_3 &= E(t) \\ L_2\frac{di_3}{dt} + \qquad R_1 i_2 + R_1 i_3 &= E(t). \end{aligned} \tag{17}$$

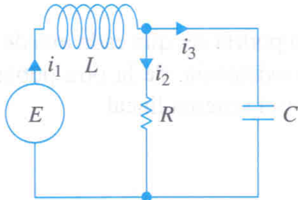


FIGURA 3.3.4 Red cuyo modelo son las ecuaciones (18).

Dejamos esto como un ejercicio (vea el problema 14) el mostrar que el sistema de ecuaciones diferenciales que describe las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ en la red formada por un resistor, un inductor y un capacitor que se muestra en la figura 3.3.4 es

$$\begin{aligned} L\frac{di_1}{dt} + Ri_2 \qquad &= E(t) \\ RC\frac{di_2}{dt} + \quad i_2 - i_1 &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

EJERCICIOS 3.3

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-4.

Series radiactivas

1. Hasta el momento no se han analizado métodos mediante los que se puedan resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, sistemas como (2) se pueden resolver sin otro conocimiento que el necesario para resolver una ecuación diferencial lineal. Encuentre una solución de (2) sujeto a las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

2. En el problema 1, suponga que el tiempo se mide en días, que las constantes de desintegración son $k_1 = -0.138629$ y $k_2 = -0.004951$, y que $x_0 = 20$. Utilice un programa de graficación para trazar las gráficas de las soluciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ en el mismo conjunto de ejes de coordenadas. Utilice las gráficas para aproximar las vidas medias de sustancias X y Y.

3. Utilice las gráficas del problema 2 para aproximar los tiempos cuando las cantidades $x(t)$ y $y(t)$ son las mismas, los tiempos cuando las cantidades $x(t)$ y $z(t)$ son las mismas y los tiempos cuando las cantidades $y(t)$ y $z(t)$ son las mismas. ¿Por qué, desde el punto de vista intuitivo, el tiempo determinado cuando las cantidades $y(t)$ y $z(t)$ son las mismas, tiene sentido?

4. Construya un modelo matemático para una serie radiactiva de cuatro elementos W, X, Y y Z, donde Z es un elemento estable.

Mezclas

5. Considere dos tanques A y B, en los que se bombea y se saca líquido en la misma proporción, como se describe mediante el sistema de ecuaciones (3). ¿Cuál es el sistema de ecuaciones diferenciales si, en lugar de agua pura, se bombea al tanque A una solución de salmuera que contiene dos libras de sal por galón?

6. Utilice la información que se proporciona en la figura 3.3.5 para construir un modelo matemático para la cantidad de libras de sal $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ al tiempo t en los tanques A, B y C, respectivamente.

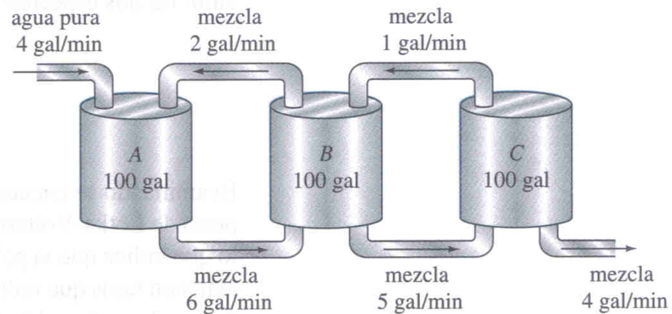


FIGURA 3.3.5 Tanques de mezclado del problema 6.

7. Dos tanques muy grandes A y B están parcialmente llenos con 100 galones de salmuera cada uno. Al inicio, se disuelven 100 libras de sal en la solución del tanque A y 50 libras de sal en la solución del tanque B. El sistema es cerrado ya que el líquido bien mezclado se bombea sólo entre los tanques, como se muestra en la figura 3.3.6.

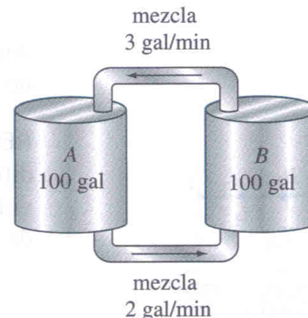


FIGURA 3.3.6 Tanques de mezclado del problema 7.

a) Utilice la información que aparece en la figura para construir un modelo matemático para el número de

libras de sal $x_1(t)$ y $x_2(t)$ al tiempo t en los tanques A y B, respectivamente.

b) Encuentre una relación entre las variables $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que se cumpla en el tiempo t. Explique por qué esta relación tiene sentido desde el punto de vista intuitivo. Use esta relación para ayudar a encontrar la cantidad de sal en el tanque B en $t = 30$ min.

8. Tres tanques grandes contienen salmuera, como se muestra en la figura 3.3.7. Con la información de la figura construya un modelo matemático para el número de libras de sal $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ al tiempo t en los tanques A, B y C, respectivamente. Sin resolver el sistema, prediga los valores límite de $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ conforme $t \to \infty$.

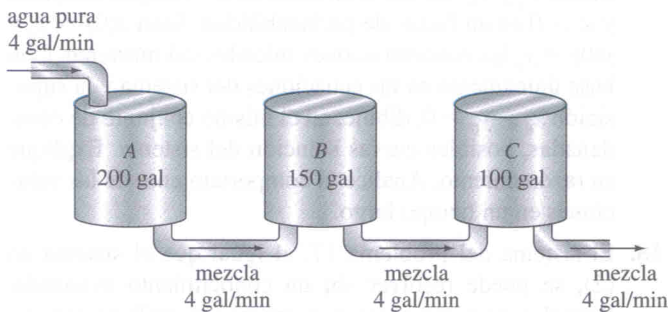


FIGURA 3.3.7 Tanques de mezclado del problema 8.

Modelos depredador–presa

9. Considere el modelo depredador-presa de Lotka-Volterra definido por

$$\frac{dx}{dt} = -0.1x + 0.02xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.2y - 0.025xy,$$

donde las poblaciones $x(t)$ (depredadores) y $y(t)$ (presa) se miden en miles. Suponga que $x(0) = 6$ y $y(0) = 6$. Utilice un programa de solución numérica para graficar $x(t)$ y $y(t)$. Use las gráficas para aproximar el tiempo $t > 0$ cuando las dos poblaciones son al principio iguales. Use las gráficas para aproximar el periodo de cada población.

Modelos de competencia

10. Considere el modelo de competencia definido por

$$\frac{dx}{dt} = x(2 - 0.4x - 0.3y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - 0.1y - 0.3x),$$

donde las poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ se miden en miles y t en años. Use un programa de solución numérica para analizar las poblaciones en un periodo largo para cada uno de los casos siguientes:

a) $x(0) = 1.5, \quad y(0) = 3.5$
b) $x(0) = 1, \quad y(0) = 1$
c) $x(0) = 2, \quad y(0) = 7$
d) $x(0) = 4.5, \quad y(0) = 0.5$

11. Considere el modelo de competencia definido por

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - 0.1x - 0.05y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1.7 - 0.1y - 0.15x),$$

donde las poblaciones $x(t)$ y $x(t)$ se miden en miles y t en años. Utilice un programa de solución numérica para analizar las poblaciones en un periodo largo para cada uno de los casos siguientes:

a) $x(0) = 1, \quad y(0) = 1$
b) $x(0) = 4, \quad y(0) = 10$
c) $x(0) = 9, \quad y(0) = 4$
d) $x(0) = 5.5, \quad y(0) = 3.5$

Redes

12. Demuestre que un sistema de ecuaciones diferenciales que describa las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ en la red eléctrica que se muestra en la figura 3.3.8 es

$$L\frac{di_2}{dt} + L\frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 = E(t)$$

$$-R_1\frac{di_2}{dt} + R_2\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C}i_3 = 0.$$

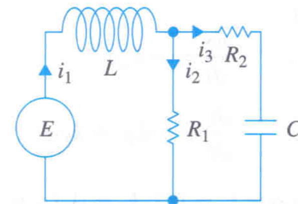


FIGURA 3.3.8 Red del problema 12.

13. Determine un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que describa las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ en la red eléctrica que se muestra en la figura 3.3.9.

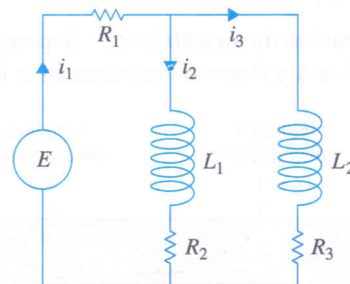


FIGURA 3.3.9 Red del problema 13.

14. Demuestre que el sistema lineal que se proporciona en (18) describe las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ en la red que se muestra en la figura 3.3.4. [*Sugerencia*: $dq/dt = i_3$.]

Modelos no lineales adicionales

15. Modelo SIR Una enfermedad contagiosa se propaga en una pequeña comunidad, con una población fija de n personas, por contacto entre individuos infectados y personas que son susceptibles a la enfermedad. Suponga al principio que todos son susceptibles a la enfermedad y que nadie sale de la comunidad mientras se propaga la epidemia. En el tiempo t, sean $s(t)$, $i(t)$ y $r(t)$, a su vez, el número de personas en la comunidad (medido en cientos) que son ***susceptibles*** a la enfermedad pero que aún no están infectadas, el número de personas que están ***infectadas*** con la enfermedad y el número de personas que se han ***recuperado*** de la enfermedad. Explique por qué el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 si$$
$$\frac{di}{dt} = -k_2 i + k_1 si$$
$$\frac{dr}{dt} = k_2 i,$$

donde k_1 (llamada la *razón de infección*) y k_2 (llamada la *razón de eliminación*) son constantes positivas, es un modelo matemático razonable, conocido comúnmente como **modelo SIR**, para la propagación de la epidemia en la comunidad. Asigne condiciones iniciales posibles relacionadas con este sistema de ecuaciones.

16. a) En el problema 15, explique por qué es suficiente analizar sólo

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 si$$
$$\frac{di}{dt} = -k_2 i + k_1 si.$$

b) Suponga que $k_1 = 0.2$, $k_2 = 0.7$ y $n = 10$. Elija varios valores de $i(0) = i_0$, $0 < i_0 < 10$. Use un programa de solución numérica para determinar lo que predice el modelo acerca de la epidemia en los dos casos $s_0 > k_2/k_1$ y $s_0 \le k_2/k_1$. En el caso de una epidemia, estime el número de personas que finalmente se infectan.

Problemas de proyecto

17. Concentración de un nutriente Suponga que los compartimientos A y B que se muestran en la figura 3.3.10 se llenan con líquidos y se separan mediante una membrana permeable. La figura es una representación seccional del exterior y el interior de una célula. Suponga también que un nutriente necesario para el crecimiento de la célula pasa por la membrana. Un modelo para las concentraciones $x(t)$ y $y(t)$ del nutriente en los compartimientos A y B, respectivamente, en el tiempo t se expresa mediante el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\kappa}{V_A}(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\kappa}{V_B}(x - y),$$

donde V_A y V_B son los volúmenes de los compartimientos, y $\kappa > 0$ es un factor de permeabilidad. Sean $x(0) = x_0$ y $y(0) = y_0$ las concentraciones iniciales del nutriente. Con base únicamente en las ecuaciones del sistema y la suposición $x_0 > y_0 > 0$, dibuje, en el mismo conjunto de coordenadas, posibles curvas solución del sistema. Explique su razonamiento. Analice el comportamiento de las soluciones en un tiempo largo.

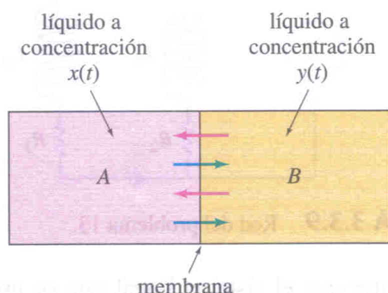


FIGURA 3.3.10 Flujo de nutrientes a través de una membrana del problema 17.

18. El sistema del problema 17, al igual que el sistema en (2), se puede resolver sin un conocimiento avanzado. Resuelva para $x(t)$ y $y(t)$ y compare sus gráficas con sus dibujos del problema 17. Determine los valores límite de $x(t)$ y $y(t)$ conforme $t \to \infty$. Explique por qué la respuesta de la última pregunta tiene sentido intuitivamente.

19. Con base sólo en la descripción física del problema de mezcla de la página 107 y la figura 3.3.1, analice la naturaleza de las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$. ¿Cuál es el comportamiento de cada función durante un tiempo largo? Dibuje las gráficas posibles de $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Compruebe sus conjeturas mediante un programa de solución numérica para obtener las curvas solución de (3) sujetas a las condiciones iniciales $x_1(0) = 25$, $x_2(0) = 0$.

20. Ley de Newton del enfriamiento/calentamiento Como se muestra en la figura 3.3.11, una pequeña barra metálica se coloca dentro del recipiente A y éste se coloca dentro de un recipiente B mucho más grande. A medida que se enfría la barra metálica, la temperatura ambiente $T_A(t)$ del medio dentro del recipiente A cambia de acuerdo con la ley de Newton del enfriamiento. Conforme se enfría el recipiente A, la temperatura en la parte media dentro del recipiente B no cambia

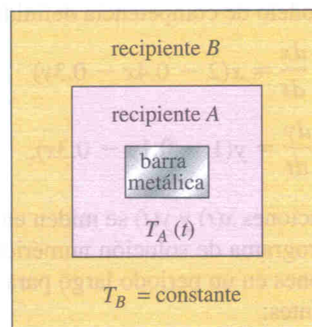


FIGURA 3.3.11 Recipiente dentro de un recipiente del problema 20.

de manera importante y se puede considerar una constante T_B. Construya un modelo matemático para las temperaturas $T(t)$ y $T_A(t)$, donde $T(t)$ es la temperatura de la barra metálica dentro del recipiente A. Como en los problemas 1 y 18, este modelo se puede resolver usando los conocimientos adquiridos. Encuentre una solución del sistema sujeto a las condiciones iniciales $T(0) = T_0$, $T_A(0) = T_1$.

Problema aportado

Dr. Michael Prophet, Dr. Doug Shaw, Profesores Asociados del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Iowa del Norte

21. Un problema de mezclas Un par de tanques están conectados como se muestra en la figura 3.3.12. Al tiempo $t = 0$, el tanque A contiene 500 litros de líquido, 7 de los cuales son de etanol. Comenzando en $t = 0$, se agregan 3 litros por minuto de una solución de etanol a 20%. Además se bombean 2 L/min del tanque B al tanque A. La mezcla resultante es continuamente mezclada y se bombean 5 L/min al tanque B. El contenido del tanque B es también continuamente mezclado. Además de los 2 litros que se regresan al tanque A, 3 L/min se descargan desde el sistema. Sean que $P(t)$ y $Q(t)$ denoten el número de litros de etanol en los tanques A y B al tiempo t. Queremos encontrar $P(t)$. Usando el principio de que

razón de cambio = razón de entrada de etanol – razón de salida de etanol,

obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dP}{dt} = 3(0.2) + 2\left(\frac{Q}{100}\right) - 5\left(\frac{P}{500}\right) = 0.6 + \frac{Q}{50} - \frac{P}{100} \qquad (19)$$

$$\frac{dQ}{dt} = 5\left(\frac{P}{500}\right) - 5\left(\frac{Q}{100}\right) = \frac{P}{100} - \frac{Q}{20}. \qquad (20)$$

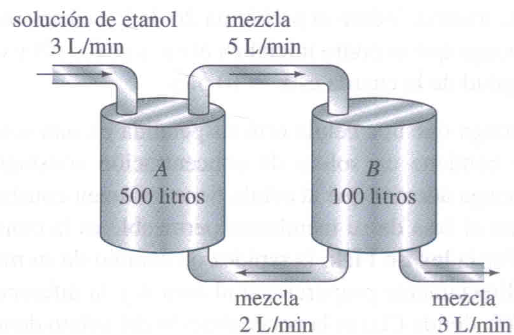


FIGURA 3.3.12 Tanque de mezclado del problema 21.

a) Analice cualitativamente el comportamiento del sistema. ¿Qué ocurre a corto plazo? ¿Qué ocurre a largo plazo?

b) Intente resolver este sistema. Cuando la ecuación (19) se deriva respecto al tiempo t, se obtiene

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{1}{50}\frac{dQ}{dt} - \frac{1}{100}\frac{dP}{dt}. = 3.$$

Sustituyendo (20) en esta ecuación y simplificando.

c) Muestre que cuando se determina Q de la ecuación (19) y se sustituye la respuesta en el inciso b), obtenemos

$$100\frac{d^2P}{dt^2} + 6\frac{dP}{dt} + \frac{3}{100}P = 3.$$

d) Está dado que $P(0) = 200$. Muestre que $P'(0) = -\frac{63}{50}$. Después resuelva la ecuación diferencial en el inciso c) sujeto a estas condiciones iniciales.

e) Sustituya la solución del inciso d) en la ecuación (19) y resuelva para $Q(t)$.

f) ¿Qué les pasa a $P(t)$ y $Q(t)$ conforme $t \to \infty$?

REPASO DEL CAPÍTULO 3

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-4.

Responda los problemas 1 a 4 sin consultar las respuestas del libro. Llene los espacios en blanco y responda verdadero o falso.

1. Si $P(t) = P_0e^{0.15t}$ da la población en un medio ambiente al tiempo t, entonces una ecuación diferencial que satisface $P(t)$ es _________.

2. Si la razón de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad $A(t)$ que queda en el tiempo t, entonces la vida media de la sustancia es necesariamente $T = -(\ln 2)/k$. La razón de decaimiento de la sustancia en el tiempo $t = T$ es un medio de la razón de decaimiento en $t = 0$. _________

3. En marzo de 1976 la población mundial llegó a cuatro mil millones. Una popular revista de noticias predijo que con una razón de crecimiento anual promedio de 1.8%, la población mundial sería de 8 mil millones en 45 años. ¿Cómo se compara este valor con el que se predice por el modelo en el que se supone que la razón de crecimiento en la población es proporcional a la población presente en el tiempo t?

4. A una habitación cuyo volumen es 8000 pies³ se bombea aire que contiene 0.06% de dióxido de carbono. Se introduce a la habitación un flujo de aire de 2000 pies³/min y se extrae el mismo flujo de aire circulado. Si hay una concentración inicial de 0.2% de dióxido de carbono en la habitación, determine la cantidad posterior en la habitación al tiempo t. ¿Cuál es la concentración a los 10 minutos? ¿Cuál es la concentración de dióxido de carbono de estado estable o de equilibrio?

5. Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{s^2 - y^2}}$$

de la tractriz. Véase el problema 26 de los ejercicios 1.3. Suponga que el punto inicial en el eje y es $(0, 10)$ y que la longitud de la cuerda es $x = 10$ pies.

6. Suponga que una célula está suspendida en una solución que contiene un soluto de concentración constante C_s. Suponga además que la célula tiene volumen constante V y que el área de su membrana permeable es la constante A. Por la **ley de Fick**, la rapidez de cambio de su masa m es directamente proporcional al área A y la diferencia $C_s - C(t)$, donde $C(t)$ es la concentración del soluto dentro de la célula al tiempo t. Encuentre $C(t)$ si $m = V \cdot C(t)$ y $C(0) = C_0$. Vea la figura 3.R.1.

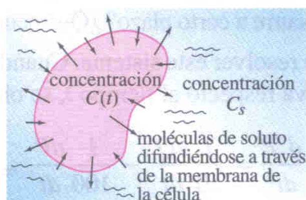


FIGURA 3.R.1 Célula del problema 6.

7. Suponga que conforme se enfría un cuerpo, la temperatura del medio circundante aumenta debido a que absorbe por completo el calor que pierde el cuerpo. Sean $T(t)$ y $Tm(t)$ las temperaturas del cuerpo y el medio al tiempo t, respectivamente. Si la temperatura inicial del cuerpo es T_1 y la temperatura inicial del medio de T_2, entonces se puede mostrar en este caso que la ley de Newton del enfriamiento es $dT/dt = k(T - T_m)$, $k < 0$, donde $T_m = T_2 + B(T_1 - T)$, $B > 0$ es una constante.

a) La ED anterior es autónoma. Utilice el concepto de esquema de fase de la sección 2.1 para determinar el valor límite de la temperatura $T(t)$ conforme $t \to \infty$. ¿Cuál es el valor límite de $T_m(t)$ conforme $t \to \infty$?

b) Compruebe sus respuestas del inciso a) resolviendo la ecuación diferencial.

c) Analice una interpretación física de sus respuestas en el inciso a).

8. De acuerdo con la **ley de Stefan de la radiación**, la temperatura absoluta T de un cuerpo que se enfría en un medio a temperatura absoluta constante T_m está dada como

$$\frac{dT}{dt} = k(T^4 - T_m^4),$$

donde k es una constante. La ley de Stefan se puede utilizar en un intervalo de temperatura mayor que la ley de Newton del enfriamiento.

a) Resuelva la ecuación diferencial.

b) Muestre que cuando $T - T_m$ es pequeña comparada con T_m entonces la ley de Newton del enfriamiento se aproxima a la ley de Stefan. [*Sugerencia*: Considere la serie binomial del lado derecho de la ED.]

9. Un circuito LR en serie tiene un inductor variable con la inductancia definida por

$$L(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{10}t, & 0 \le t < 10 \\ 0, & t \ge 10. \end{cases}$$

Encuentre la corriente $i(t)$ si la resistencia es 0.2 ohm, el voltaje aplicado es $E(t) = 4$ e $i(0) = 0$. Trace la gráfica de $i(t)$.

10. Un problema clásico en el cálculo de variaciones es encontrar la forma de una curva $\mathscr{C}$ tal que una cuenta, bajo la influencia de la gravedad, se deslice del punto $A(0, 0)$ al punto $B(x_1, y_1)$ en el menor tiempo. Vea la figura 3.R.2. Se puede demostrar que una ecuación no lineal para la forma $y(x)$ de la trayectoria es $y[1 + (y')^2] = k$, donde k es una constante. Primero resuelva para dx en términos de y y dy; y después utilice la sustitución $y = k\,\text{sen}^2\theta$ para obtener una forma paramétrica de la solución. La curva $\mathscr{C}$ resulta ser una cicloide.

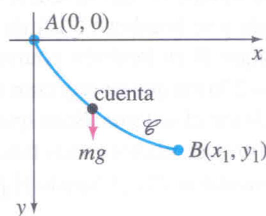


FIGURA 3.R.2 Cuenta deslizando del problema 10.

11. Un modelo para las poblaciones de dos especies de animales que interactúan es

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x(\alpha - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2 xy.$$

Resuelva para x y y en términos de t.

12. En un principio, dos tanques grandes A y B contienen cada uno 100 galones de salmuera. El líquido bien mezclado se bombea entre los recipientes como se muestra en la figura 3.R.3. Utilice la información de la figura para construir un modelo matemático para el número de libras de sal $x_1(t)$ y $x_2(t)$ al tiempo t en los recipientes A y B, respectivamente.

Cuando todas las curvas de una familia $G(x, y, c_1) = 0$ intersecan ortogonalmente todas las curvas de otra familia

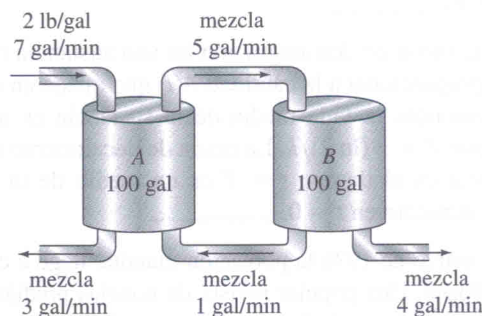


FIGURA 3.R.3 Recipientes de mezclado del problema 12.

$H(x, y, c_2) = 0$, se dice que las familias son **trayectorias ortogonales** entre sí. Vea la figura 3.R.4. Si $dy/dx = f(x, y)$ es la ecuación diferencial de una familia, entonces la ecuación diferencial para las trayectorias ortogonales de esta familia es $dy/dx = -1/f(x, y)$. En los problemas 13 y 14, encuentre la ecuación diferencial de la familia suministrada. Determine las trayectorias de esta familia. Utilice un programa de graficación para trazar las gráficas de ambas familias en el mismo conjunto de ejes coordenados.

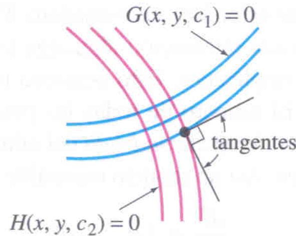


FIGURA 3.R.4 Trayectorias ortogonales.

13. $y = -x - 1 + c_1e^x$ **14.** $y = \dfrac{1}{x + c_1}$

Problema aportado

Dr. David Zeigler profesor asistente Departamento de Matemáticas y Estadística CSU Sacramento

15. Acuíferos y la ley de Darcy De acuerdo con el departamento de servicios de Sacramento en California, aproximadamente 15% del agua para Sacramento proviene de **acuíferos**. A diferencia de fuentes de agua tales como ríos o lagos que yacen sobre del suelo, un acuífero es una capa de un material poroso bajo el suelo que contiene agua. El agua puede residir en espacios vacíos entre rocas o entre las grietas de las rocas. Debido al material que está arriba, el agua está sujeta a una presión que la impulsa como un fluido en movimiento.

La ley de Darcy es una expresión generalizada para describir el flujo de un fluido a través de un medio poroso. Muestra que el flujo volumétrico de un fluido a través de un recipiente es una función del área de sección transversal, de la elevación y de la presión del fluido. La configuración que consideraremos en este problema es la denominada *problema para un flujo unidimensional*. Considere la columna de flujo como la que se muestra en la figura 3.R.5. Como lo indican las flechas, el flujo del fluido es de izquierda a derecha a través de un recipiente con sección transversal circular. El recipiente está lleno con un material poroso (por ejemplo piedras, arena o algodón) que permiten que el fluido fluya. A la entrada y a la salida del contenedor se tienen piezómetros que miden la carga hidráulica, esto es, la presión del agua por unidad de peso, al reportar la altura de la columna de agua. La diferencia en las alturas de agua en los piezómetros se denota por Δh. Para esta configuración se calculó experimentalmente mediante Darcy que

$$Q = AK\frac{\Delta h}{L}$$

donde la longitud se mide en metros (m) y el tiempo en segundos (s):

Q = flujo volumétrico (m^3/s)
A = área transversal del flujo, perpendicular a la dirección del flujo (m^2)
K = conductividad hidráulica (m/s)
L = longitud de la trayectoria de flujo (m)
Δh = diferencia de carga hidráulica (m)

Donde la carga hidráulica en un punto dado es la suma de la carga de presión y la elevación, el flujo volumétrico puede rescribirse como

$$Q = AK\frac{\Delta\left[\dfrac{p}{\rho g} + y\right]}{L},$$

donde

p = presión del agua (N/m^2)
ρ = densidad del agua (kg/m^3)
g = aceleración de la gravedad (m/s^2)
y = elevación (m)

Una forma más general de la ecuación resulta cuando el límite de Δh respecto a la dirección de flujo (x, como se muestra en la figura 3.R.5) se evalúa como la longitud de trayectoria del flujo $L \to 0$. Realizando este cálculo se obtiene

$$Q = -AK\frac{d}{dx}\left[\frac{p}{\rho g} + y\right],$$

donde el cambio en el signo indica el hecho de que la carga hidráulica disminuye siempre en la dirección del flujo. El flujo volumétrico por unidad de área se llama **flujo q de Darcy** y se define mediante la ecuación diferencial

$$q = \frac{Q}{A} = -K\frac{d}{dx}\left[\frac{p}{\rho g} + y\right], \qquad (1)$$

donde q se mide en m/s.

a) Suponga que la densidad del fluido ρ y el flujo de Darcy q son funciones de x. Despeje la presión p de la ecuación (1). Puede suponer que K y g son constantes.

b) Suponga que el flujo de Darcy es evaluado negativamente, es decir, $q < 0$. ¿Qué indica esto respecto del cociente p/ρ? En concreto, ¿el cociente entre la presión y la densidad aumenta o disminuye respecto a x? Suponga que la elevación y del cilindro es fija. ¿Qué puede inferirse acerca del cociente p/ρ si el flujo de Darcy es cero?

c) Suponga que la densidad del fluido ρ es constante. Despeje la presión $p(x)$ de la ecuación (1) cuando el flujo de Darcy es proporcional a la presión, es decir, $q = \alpha p$, donde α es una constante de proporcionalidad. Dibuje la familia de soluciones para la presión.

d) Ahora, si suponemos que la presión p es constante pero la densidad ρ es una función de x, entonces el flujo de Darcy es una función de x. Despeje la den-

sidad $\rho(x)$ de la ecuación (1). Despeje la densidad $\rho(x)$ de la ecuación (1) cuando el flujo de Darcy es proporcional a la densidad, $q = \beta\rho$, donde β es una constante de proporcionalidad.

e) Suponga que el flujo de Darcy es $q(x) = \text{sen}\, e^{-x}$ y la función densidad es

$$\rho(x) = \frac{1}{1 + \ln(2 + x)}.$$

Use un SAC para trazar la presión $p(x)$ sobre el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$. Suponga que $K/g = -1$ y que la presión en el extremo izquierdo del punto ($x = 0$) está normalizado a 1. Suponga que la elevación y es constante. Explique las implicaciones físicas de su resultado.

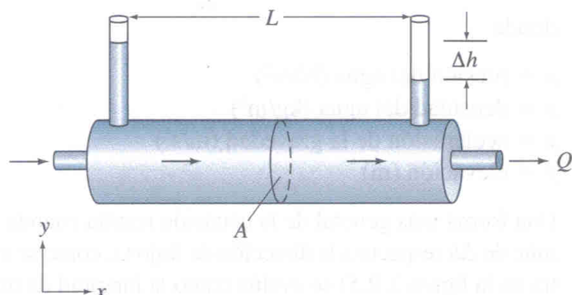


FIGURA 3.R.5 Flujo del problema 15.

Problema aportado

Dr. Michael Prophet y Dr. Doug Shaw profesores asociados del Departamento de Matemáticas Universidad de Iowa del Norte

16. Modelos de crecimiento de población Se pueden usar campos direccionales para obtener bastante información acerca de los modelos de población. En este problema puede usted construir campos direccionales a mano o utilizar un sistema algebraico de computación para crear algunos detalles. Al tiempo $t = 0$ una fina lámina de agua comienza a fluir sobre el vertedero concreto de una presa. Al mismo tiempo, 1000 algas son agregadas por el vertedero. Modelaremos a $P(t)$, como el número de algas (en miles) presentes después de t horas.

Modelo de crecimiento exponencial: Suponemos que la razón de cambio es proporcional a la población presente: $dP/dt = kP$. En este caso en particular tomamos $k = \frac{1}{12}$.

a) Construya un campo direccional para esta ecuación diferencial y dibuje la curva solución.

b) Resuelva la ecuación diferencial y trace la gráfica de la solución. Compare su gráfica con el dibujo del inciso a).

c) Describa las soluciones de equilibrio de esta ecuación diferencial autónoma.

d) De acuerdo con este modelo, ¿qué pasa cuando $t \to \infty$?

e) En nuestro modelo, $P(0) = 1$. Describa cómo un cambio de $P(0)$ afecta la solución.

f) Considere la solución que corresponde a $P(0) = 0$. ¿Cómo afectaría a la solución un pequeño cambio en $P(0)$?

Modelo de crecimiento logístico: Como vimos en el inciso d), el modelo de crecimiento exponencial que se acaba de presentar no es real para tiempos muy grandes t. ¿Qué limita la población de algas? Suponga que el agua al fluir proporciona una fuente de nutrientes estable y saca la basura. En este caso el mayor factor límite es el área del vertedero. Podemos modelarlo como: cada interacción alga-alga tensiona a los organismos implicados. Esto ocasiona una mortandad adicional. El número de todas las posibles interacciones es proporcional al *cuadrado* del número de organismos presentes. Así un modelo razonable sería

$$\frac{dP}{dt} = kP - mP^2,$$

donde k y m son las constantes positivas. En este caso particular tomamos $k = \frac{1}{12}$ y $m = \frac{1}{500}$.

g) Construya un campo direccional para esta ecuación diferencial y dibuje la curva solución.

h) Resuelva esta ecuación diferencial y trace la gráfica de la solución. Compare su gráfica con la que dibujó en el inciso g).

i) Describa las soluciones de equilibrio para esta ecuación diferencial autónoma.

j) De acuerdo con este modelo, ¿qué pasa conforme $t \to \infty$?

k) En nuestro modelo $P(0) = 1$. Describa cómo afectaría la solución un cambio en $P(0)$.

l) Considere la solución correspondiente a $P(0) = 0$. ¿Cómo afectaría la solución un pequeño cambio en $P(0)$?

m) Considere la solución correspondiente a $P(0) = k/m$. ¿Cómo afectaría la solución un pequeño cambio en $P(0)$?

Un modelo no autónomo: Suponga que el flujo de agua a través de un vertedero está decreciendo conforme pasa el tiempo por lo que también disminuye al paso del tiempo el hábitat del alga. Esto también aumenta el efecto de hacinamiento. Un modelo razonable ahora sería

$$\frac{dP}{dt} = kP - m(1 + nt)P^2,$$

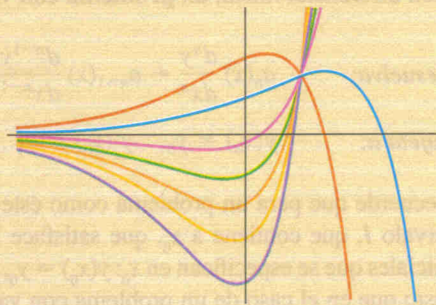
Donde n se determinaría como la razón con la cual el vertedero se está secando. En nuestro ejemplo, tomamos k y m como ya se consideraron y $n = \frac{1}{10}$.

n) Construya un campo direccional para esta ecuación diferencial y dibuje la curva solución.

o) Describa las soluciones constantes de esta ecuación diferencial no autónoma.

p) De acuerdo con este modelo, ¿qué pasa conforme $t \to \infty$? ¿Qué pasa si se cambia el valor de $P(0)$?

4 ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR



Ahora trataremos la solución de ecuaciones diferenciales de orden dos o superior. En las primeras siete secciones de este capítulo se analizan la teoría fundamental y cierta clase de ecuaciones *lineales*. El método de eliminación para resolver sistemas de ecuaciones lineales se introduce en la sección 4.8 porque este método simplemente desacopla un sistema en ecuaciones lineales de cada variable dependiente. El capítulo concluye con un breve análisis de ecuaciones *no lineales* de orden superior.

4.1 TEORÍA PRELIMINAR: ECUACIONES LINEALES

REPASO DE MATERIAL

- Lea nuevamente los *Comentarios* al final de la sección 1.1.
- Sección 2.3 (especialmente páginas 54 a 58).

INTRODUCCIÓN En el capítulo 2 vimos que se pueden resolver algunas ecuaciones diferenciales de primer orden si se reconocen como separables, exactas, homogéneas o quizás como ecuaciones de Bernoulli. Aunque las soluciones de estas ecuaciones estuvieran en la forma de una familia uniparamétrica, esta familia, con una excepción, no representa la solución de la ecuación diferencial. Sólo en el caso de las ED *lineales* de primer orden se pueden obtener soluciones generales considerando ciertas condiciones iniciales. Recuerde que una **solución general** es una familia de soluciones definida en algún intervalo I que contiene *todas* las soluciones de la ED que están definidas en I. Como el objetivo principal de este capítulo es encontrar soluciones generales de ED lineales de orden superior, primero necesitamos examinar un poco de la teoría de ecuaciones lineales.

4.1.1 PROBLEMAS CON VALORES INICIALES Y CON VALORES EN LA FRONTERA

PROBLEMA CON VALORES INICIALES En la sección 1.2 se definió un problema con valores iniciales para una ecuación diferencial de n-ésimo orden. Para una ecuación diferencial lineal, un **problema con valores iniciales de n-ésimo orden** es

$$\text{Resuelva:} \quad a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$
$$\text{Sujeta a:} \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \qquad (1)$$

Recuerde que para un problema como éste se busca una función definida en algún intervalo I, que contiene a x_0, que satisface la ecuación diferencial y las n condiciones iniciales que se especifican en x_0: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Ya hemos visto que en el caso de un problema con valores iniciales de segundo orden, una curva solución debe pasar por el punto (x_0, y_0) y tener pendiente y_1 en este punto.

EXISTENCIA Y UNICIDAD En la sección 1.2 se expresó un teorema que daba las condiciones con las que se garantizaba la existencia y unicidad de una solución de un problema con valores iniciales de primer orden. El teorema siguiente tiene condiciones suficientes para la existencia y unicidad de una solución única del problema en (1).

TEOREMA 4.1.1 Existencia de una solución única

Sean $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I, y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda x en este intervalo. Si $x = x_0$ es cualquier punto en este intervalo, entonces una solución $y(x)$ del problema con valores iniciales (1) existe en el intervalo y es única.

EJEMPLO 1 Solución única de un PVI

El problema con valores iniciales

$$3y''' + 5y'' - y' + 7y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0$$

tiene la solución trivial $y = 0$. Debido a que la ecuación de tercer orden es lineal con coeficientes constantes, se cumplen las condiciones del teorema 4.1.1. Por tanto $y = 0$ es la *única* solución en cualquier intervalo que contiene a $x = 1$. ■

EJEMPLO 2 Solución única de un PVI

Se debe comprobar que la función $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ es una solución del problema con valores iniciales

$$y'' - 4y = 12x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 1.$$

Ahora la ecuación diferencial es lineal; los coeficientes, así como $g(x) = 12x$, son continuos y $a_2(x) = 1 \neq 0$ en algún intervalo I que contenga a $x = 0$. Concluimos del teorema 4.1.1 que la función dada es la única solución en I. ■

Los requisitos en el teorema 4.1.1 de que $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ sean continuas y $a_n(x) \neq 0$ para toda x en I son importantes. En particular, si $a_n(x) = 0$ para algún x en el intervalo, entonces la solución de un problema lineal con valores iniciales podría no ser única o ni siquiera existir. Por ejemplo, se debe comprobar que la función $y = cx^2 + x + 3$ es una solución de problema con valores iniciales

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$ para alguna elección del parámetro c. En otras palabras, no hay solución única del problema. Aunque se satisface la mayoría de las condiciones del teorema 4.1.1, las dificultades obvias son que $a_2(x) = x^2$ es cero en $x = 0$ y que las condiciones iniciales también se imponen en $x = 0$.

PROBLEMA CON VALORES EN LA FRONTERA Otro tipo de problema consiste en resolver una ecuación diferencial lineal de orden dos o mayor en que la variable dependiente y o sus derivadas se especifican en *diferentes puntos*. Un problema tal como

$$\textit{Resuelva:} \quad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\textit{Sujeto a:} \quad y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1$$

se llama **problema con valores en la frontera (PVF)**. Los valores prescritos $y(a) = y_0$ y $y(b) = y_1$ se llaman **condiciones en la frontera**. Una solución del problema anterior es una función que satisface la ecuación diferencial en algún intervalo I, que contiene a a y b, cuya gráfica pasa por los puntos (a, y_0) y (b, y_1). Véase la figura 4.1.1.

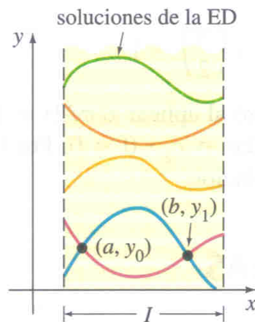


FIGURA 4.1.1 Curvas solución de un PVF que pasan a través de dos puntos.

Para una ecuación diferencial de segundo orden, otros pares de condiciones en la frontera podrían ser

$$y'(a) = y_0, \qquad y(b) = y_1$$
$$y(a) = y_0, \qquad y'(b) = y_1$$
$$y'(a) = y_0, \qquad y'(b) = y_1,$$

donde y_0 y y_1 denotan constantes arbitrarias. Estos pares de condiciones son sólo casos especiales de las condiciones en la frontera generales.

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1$$
$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2.$$

En el ejemplo siguiente se muestra que aun cuando se cumplen las condiciones del teorema 4.1.1, un problema con valores en la frontera puede tener varias soluciones (como se sugiere en la figura 4.1.1), una solución única o no tener ninguna solución.

EJEMPLO 3 Un PVF puede tener muchas, una o ninguna solución

En el ejemplo 4 de la sección 1.1 vimos que la familia de soluciones de dos parámetros de la ecuación diferencial $x'' + 16x = 0$ es

$$x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t. \tag{2}$$

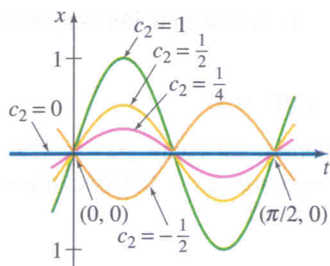


FIGURA 4.1.2 Algunas curvas solución de (3)

a) Suponga que ahora deseamos determinar la solución de la ecuación que satisface más condiciones en la frontera $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = 0$. Observe que la primera condición $0 = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0$ implica que $c_1 = 0$, por tanto $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$. Pero cuando $t = \pi/2$, $0 = c_2 \operatorname{sen} 2\pi$ se satisface para cualquier elección de c_2 ya que $\operatorname{sen} 2\pi = 0$. Por tanto el problema con valores en la frontera

$$x'' + 16x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{3}$$

tiene un número infinito de soluciones. En la figura 4.1.2 se muestran las gráficas de algunos de los miembros de la familia uniparamétrica $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$ que pasa por los dos puntos $(0, 0)$ y $(\pi/2, 0)$.

b) Si el problema con valores en la frontera en (3) se cambia a

$$x'' + 16x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0, \tag{4}$$

entonces $x(0) = 0$ aún requiere que $c_1 = 0$ en la solución (2). Pero aplicando $x(\pi/8) = 0$ a $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$ requiere que $0 = c_2 \operatorname{sen}(\pi/2) = c_2 \cdot 1$. Por tanto $x = 0$ es una solución de este nuevo problema con valores en la frontera. De hecho, se puede demostrar que $x = 0$ es la *única* solución de (4).

c) Por último, si se cambia el problema a

$$x'' + 16x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \tag{5}$$

se encuentra de nuevo de $x(0) = 0$ que $c_1 = 0$, pero al aplicar $x(\pi/2) = 1$ a $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$ conduce a la contradicción $1 = c_2 \operatorname{sen} 2\pi = c_2 \cdot 0 = 0$. Por tanto el problema con valores en la frontera (5) no tiene solución. ■

4.1.2 ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden de la forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{6}$$

se dice que es **homogénea**, mientras que una ecuación

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{7}$$

con $g(x)$ no igual a cero, se dice que es **no homogénea**. Por ejemplo, $2y'' + 3y' - 5y = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, mientras que $x^3y''' + 6y' + 10y = e^x$ es una ecuación diferencial lineal de tercer orden no homogénea. La palabra *homogénea* en este contexto no se refiere a los coeficientes que son funciones homogéneas, como en la sección 2.5.

Después veremos que para resolver una ecuación lineal no homogénea (7), primero se debe poder resolver la **ecuación homogénea asociada** (6).

Para evitar la repetición innecesaria en lo que resta de este libro, se harán, como algo natural, las siguientes suposiciones importantes cuando se establezcan

definiciones y teoremas acerca de las ecuaciones lineales (1). En algún intervalo común I,

■ Por favor recuerde estas dos suposiciones

- las funciones coeficientes $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $g(x)$ son continuas;
- $a_n(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo.

OPERADORES DIFERENCIALES En cálculo la derivación se denota con frecuencia con la letra D mayúscula, es decir, $dy/dx = Dy$. El símbolo D se llama **operador diferencial** porque convierte una función derivable en otra función. Por ejemplo, $D(\cos 4x) = -4 \operatorname{sen} 4x$ y $D(5x^3 - 6x^2) = 15x^2 - 12x$. Las derivadas de orden superior se expresan en términos de D de manera natural:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = D(Dy) = D^2y \quad \text{y, en general} \quad \frac{d^ny}{dx^n} = D^ny,$$

donde y representa una función suficientemente derivable. Las expresiones polinomiales en las que interviene D, tales como $D + 3$, $D^2 + 3D - 4$ y $5x^3D^3 - 6x^2D^2 + 4xD + 9$, son también operadores diferenciales. En general, se define un **operador diferencial de n-ésimo orden** u **operador polinomial** como

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x). \tag{8}$$

Como una consecuencia de dos propiedades básicas de la derivada, $D(cf(x)) = cDf(x)$, c es una constante y $D\{f(x) + g(x)\} = Df(x) + Dg(x)$, el operador diferencial L tiene una propiedad de linealidad; es decir, L operando sobre una combinación lineal de dos funciones derivables es lo mismo que la combinación lineal de L operando en cada una de las funciones. Simbólicamente esto se expresa como

$$L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha L(f(x)) + \beta L(g(x)), \tag{9}$$

donde α y β son constantes. Como resultado de (9) se dice que el operador diferencial de n-ésimo orden es un **operador lineal**.

ECUACIONES DIFERENCIALES Cualquier ecuación diferencial lineal puede expresarse en términos de la notación D. Por ejemplo, la ecuación diferencial $y'' + 5y' + 6y = 5x - 3$ se puede escribir como $D^2y + 5Dy + 6y = 5x - 3$ o $(D^2 + 5D + 6)y = 5x - 3$. Usando la ecuación (8), se pueden escribir las ecuaciones diferenciales lineales de n-énesimo orden (6) y (7) en forma compacta como

$$L(y) = 0 \qquad \text{y} \qquad L(y) = g(x),$$

respectivamente.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN En el siguiente teorema se ve que la suma o **superposición** de dos o más soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea es también una solución.

TEOREMA 4.1.2 Principio de superposición; ecuaciones homogéneas

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_k$ soluciones de la ecuación homogénea de n-ésimo orden (6) en un intervalo I. Entonces la combinación lineal

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x),$$

donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo.

DEMOSTRACIÓN Se demuestra el caso $k = 2$. Sea L el operador diferencial que se definió en (8) y sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Si se define $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, entonces por la linealidad de L se tiene que

$$L(y) = L\{c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\} = c_1\,L(y_1) + c_2\,L(y_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0. \quad \blacksquare$$

COROLARIOS DEL TEOREMA 4.1.2

A) Un múltiplo constante $y = c_1y_1(x)$ de una solución $y_1(x)$ de una ecuación diferencial lineal homogénea es también una solución.

B) Una ecuación diferencial lineal homogénea tiene siempre la solución trivial $y = 0$.

EJEMPLO 4 Superposición; ED homogénea

Las funciones $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 \ln x$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $x^3y''' - 2xy' + 4y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$. Por el principio de superposición, la combinación lineal

$$y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x$$

es también una solución de la ecuación en el intervalo. ■

La función $y = e^{7x}$ es una solución de $y'' - 9y' + 14y = 0$. Debido a que la ecuación diferencial es lineal y homogénea, el múltiplo constante $y = ce^{7x}$ es también una solución. Para varios valores de c se ve que $y = 9e^{7x}$, $y = 0$, $y = -\sqrt{5}e^{7x}$, . . . son todas soluciones de la ecuación.

DEPENDENCIA LINEAL E INDEPENDENCIA LINEAL Los dos conceptos son básicos para el estudio de ecuaciones diferenciales lineales.

DEFINICIÓN 4.1.1 Dependencia e independencia lineal

Se dice que un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es **linealmente dependiente** en un intervalo I si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todas cero, tales que

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0$$

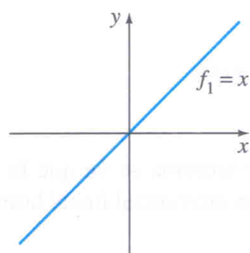
para toda x en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es **linealmente independiente**.

En otras palabras, un conjunto de funciones es linealmente independiente en un intervalo I si las únicas constantes para las que

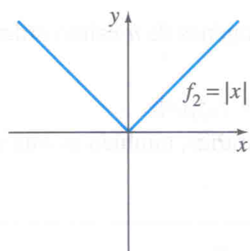
$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0$$

para toda x en el intervalo son $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Es fácil entender estas definiciones para un conjunto que consiste en dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Si el conjunto de funciones es linealmente dependiente en un intervalo, entonces existen constantes c_1 y c_2 que no son ambas cero de manera tal que, para toda x en el intervalo, $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = 0$. Por tanto, si suponemos que $c_1 \neq 0$, se deduce que $f_1(x) = (-c_2/c_1)f_2(x)$; es decir, *si un conjunto de dos funciones es linealmente dependiente, entonces una función es simplemente un múltiplo constante del otro.* A la inversa, si $f_1(x) = c_2f_2(x)$ para alguna constante c_2, entonces $(-1) \cdot f_1(x) + c_2f_2(x) = 0$ para toda x en el intervalo. Por tanto, el conjunto de funciones es linealmente dependiente porque al menos una de las constantes (en particular, $c_1 = -1$) no es cero. Se concluye que *un conjunto de dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ es linealmente independiente cuando ninguna función es un múltiplo constante de la otra* en el intervalo. Por ejemplo, el conjunto de funciones $f_1(x) = \operatorname{sen} 2x$, $f_2(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ es linealmente dependiente en $(-\infty, \infty)$ porque $f_1(x)$ es un múltiplo constante de $f_2(x)$. Recuerde de la fórmula del seno del doble de un ángulo que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$. Por otro lado, el conjunto de funciones $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |x|$ es linealmente independiente en $(-\infty, \infty)$. Al examinar la figura 4.1.3 usted debe convencerse de que ninguna función es un múltiplo constante de la otra en el intervalo.



a)



b)

FIGURA 4.1.3 El conjunto que consiste en f_1 y f_2 es linealmente independiente en $(-\infty, \infty)$.

Del análisis anterior se tiene que el cociente $f_2(x)/f_1(x)$ no es una constante en un intervalo en el que el conjunto $f_1(x), f_2(x)$ es linealmente independiente. Esto se usará en la siguiente sección.

EJEMPLO 5 Conjunto de funciones linealmente dependiente

El conjunto de funciones $f_1(x) = \cos^2 x$, $f_2(x) = \text{sen}^2 x$, $f_3(x) = \sec^2 x$, $f_4(x) = \tan^2 x$ es linealmente dependiente en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ porque

$$c_1 \cos^2 x + c_2 \text{sen}^2 x + c_3 \sec^2 x + c_4 \tan^2 x = 0$$

donde $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$. Aquí se usa $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$ y $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$. ■

Un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es linealmente dependiente en un intervalo si por lo menos una función se puede expresar como una combinación lineal de las otras funciones.

EJEMPLO 6 Conjunto de funciones linealmente dependientes

El conjunto de funciones $f_1(x) = \sqrt{x} + 5$, $f_2(x) = \sqrt{x} + 5x$, $f_3(x) = x - 1$, $f_4(x) = x^2$ es linealmente dependientes en el intervalo $(0, \infty)$ porque f_2 puede escribirse como una combinación lineal de f_1, f_3 y f_4. Observe que

$$f_2(x) = 1 \cdot f_1(x) + 5 \cdot f_3(x) + 0 \cdot f_4(x)$$

para toda x en el intervalo $(0, \infty)$. ■

SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES Estamos interesados principalmente en funciones linealmente independientes o con más precisión, soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal. Aunque se podría apelar siempre en forma directa a la definición 4.1.1, resulta que la cuestión de si el conjunto de n soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (6) es linealmente independiente se puede establecer en forma un poco mecánica usando un determinante.

DEFINICIÓN 4.1.2 Wronskiano

Suponga que cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ tiene al menos $n - 1$ derivadas. El determinante

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

donde las primas denotan derivadas, se llama el **Wronskiano** de las funciones.

TEOREMA 4.1.3 Criterio para soluciones linealmente independientes

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (6) en el intervalo I. El conjunto de soluciones es **linealmente independiente** en I si y sólo si $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ para toda x en el intervalo.

Se tiene del teorema 4.1.3 que cuando $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son n soluciones de (6) en un intervalo I, el Wronskiano $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es igual a cero o nunca es cero en el intervalo.

Al conjunto de n soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden se le da un nombre especial.

DEFINICIÓN 4.1.3 Conjunto fundamental de soluciones

Cualquier conjunto $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (6) en un intervalo I es un **conjunto fundamental de soluciones** en el intervalo.

La respuesta a la cuestión básica sobre la existencia de un conjunto fundamental de soluciones para una ecuación lineal está en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.1.4 Existencia de un conjunto fundamental

Existe un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (6) en un intervalo I.

Similar al hecho de que cualquier vector en tres dimensiones se puede expresar como una combinación lineal de los vectores *linealmente independientes* **i**, **j**, **k**, cualquier solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I se expresa como una combinación lineal de n soluciones linealmente independientes en I. En otras palabras, n soluciones linealmente independientes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son los bloques básicos para la solución general de la ecuación.

TEOREMA 4.1.5 Solución general; ecuaciones homogéneas

Sea $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (6) en el intervalo I. Entonces la **solución general** de la ecuación en el intervalo es

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x),$$

donde $c_i, i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

El teorema 4.1.5 establece que si $Y(x)$ es alguna solución de (6) en el intervalo, entonces siempre se pueden encontrar constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que

$$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x).$$

Demostraremos el caso cuando $n = 2$.

DEMOSTRACIÓN Sea Y una solución y y_1 y y_2 soluciones linealmente independientes de $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ en un intervalo I. Suponga que $x = t$ es un punto en I para el cual $W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0$. Suponga también que $Y(t) = k_1$ y $Y'(t) = k_2$. Si ahora examinamos las ecuaciones

$$C_1y_1(t) + C_2y_2(t) = k_1$$
$$C_1y_1'(t) + C_2y_2'(t) = k_2,$$

se tiene que podemos determinar C_1 y C_2 de manera única, a condición de que el determinante de los coeficientes satisfaga

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pero este determinante es simplemente el Wronskiano evaluado en $x = t$ y por suposición, $W \neq 0$. Si se define $G(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, se observa que $G(x)$ satisface la ecuación diferencial puesto que es una superposición de dos soluciones conocidas; $G(x)$ satisface las condiciones iniciales

$$G(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) = k_1 \quad \text{y} \quad G'(t) = C_1y_1'(t) + C_2y_2'(t) = k_2;$$

y $Y(x)$ satisface la *misma* ecuación lineal y las *mismas* condiciones iniciales. Debido a que la solución de este problema con valores iniciales lineal es única (teorema 4.1.1), se tiene $Y(x) = G(x)$ o $Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. ■

EJEMPLO 7 Solución general de una ED homogénea

Las funciones $y_1 = e^{3x}$ y $y_2 = e^{-3x}$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $y'' - 9y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Por inspección las soluciones son linealmente independientes en el eje x. Este hecho se corrobora al observar que el Wronskiano

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

para toda x. Se concluye que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones y por tanto, $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$ es la solución general de la ecuación en el intervalo. ■

EJEMPLO 8 Una solución obtenida de una solución general

La función $y = 4 \text{ senh } 3x - 5e^{3x}$ es una solución de la ecuación diferencial del ejemplo 7. (Compruebe esto.) Aplicando el teorema 4.1.5, debe ser posible obtener esta solución a partir de la solución general $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$. Observe que si se elige $c_1 = 2$ y $c_2 = -7$, entonces $y = 2e^{3x} - 7e^{-3x}$ puede rescribirse como

$$y = 2e^{3x} - 2e^{-3x} - 5e^{-3x} = 4\left(\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}\right) - 5e^{-3x}.$$

Esta última expresión se reconoce como $y = 4 \text{ senh } 3x - 5e^{-3x}$. ■

EJEMPLO 9 Solución general de una ED homogénea

Las funciones $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ y $y_3 = e^{3x}$ satisfacen la ecuación de tercer orden $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. Puesto que

$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0$$

para todo valor real de x, las funciones y_1, y_2 y y_3 forman un conjunto fundamental de soluciones en $(-\infty, \infty)$. Se concluye que $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ es la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo. ■

4.1.3 ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS

Cualquier función y_p libre de parámetros arbitrarios, que satisface (7) se dice que es una **solución particular** o **integral particular** de la ecuación. Por ejemplo, es una tarea directa demostrar que la función constante $y_p = 3$ es una solución particular de la ecuación no homogénea $y'' + 9y = 27$.

Ahora si $y_1, y_2, \ldots, y_k$ son soluciones de (6) en un intervalo I y y_p es cualquier solución particular de (7) en I, entonces la combinación lineal

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_k y_k(x) + y_p \qquad (10)$$

es también una solución de la ecuación no homogénea (7). Si piensa al respecto, esto tiene sentido, porque la combinación lineal $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ky_k(x)$ se transforma en 0 por el operador $L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0$, mientras que y_p se convierte en $g(x)$. Si se usa $k = n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación de n-ésimo orden (6), entonces la expresión en (10) se convierte en la solución general de (7).

TEOREMA 4.1.6 Solución general; ecuaciones no homogéneas

Sea y_p cualquier solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden (7) en un intervalo I, y sea $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada (6) en I. Entonces la **solución general** de la ecuación en el intervalo es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p,$$

donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

DEMOSTRACIÓN Sea L el operador diferencial definido en (8) y sean $Y(x)$ y $y_p(x)$ soluciones particulares de la ecuación no homogénea $L(y) = g(x)$. Si se define $u(x) = Y(x) - y_p(x)$, entonces por la linealidad de L se tiene

$$L(u) = L\{Y(x) - y_p(x)\} = L(Y(x)) - L(y_p(x)) = g(x) - g(x) = 0.$$

Esto demuestra que $u(x)$ es una solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Así por el teorema 4.1.5, $u(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$, y así

$$Y(x) - y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

o

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x).$$ ■

FUNCIÓN COMPLEMENTARIA Vemos en el teorema 4.1.6 que la solución general de una ecuación lineal no homogénea está compuesta por la suma de dos funciones:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x) = y_c(x) + y_p(x).$$

La combinación lineal $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$, que es la solución general de (6), se llama **función complementaria** para la ecuación (7). En otras palabras, para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea, primero se resuelve la ecuación homogénea asociada y luego se encuentra una solución particular de la ecuación no homogénea. La solución general de la ecuación no homogénea es entonces

$$\begin{aligned} y &= \textit{función complementaria} + \textit{cualquier solución particular} \\ &= y_c + y_p. \end{aligned}$$

EJEMPLO 10 Solución general de una ED no homogénea

Por sustitución, se demuestra con facilidad que la función $y_p = -\frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$ es una solución particular de la ecuación no homogénea

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x. \qquad (11)$$

Para escribir la solución general de (11), también se debe poder resolver la ecuación homogénea asociada

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Pero en el ejemplo 9 vimos que la solución general de esta última ecuación en el intervalo $(-\infty, \infty)$ fue $y_c = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$. Por tanto la solución general de (11) en el intervalo es

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} - \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x.$$ ■

OTRO PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN El último teorema de este análisis se usará en la sección 4.4 cuando se considera un método para encontrar soluciones particulares de ecuaciones no homogéneas.

TEOREMA 4.1.7 Principio de superposición; ecuaciones no homogéneas

Sean $y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots, y_{p_k}$ k soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden (7) en un intervalo I que corresponde, a su vez, a k funciones diferentes $g_1, g_2, \ldots, g_k$. Es decir, se supone que y_{p_i} denota una solución particular de la ecuación diferencial correspondiente

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x), \quad (12)$$

donde $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces

$$y_p = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_k}(x) \quad (13)$$

es una solución particular de

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$
$$= g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x). \quad (14)$$

DEMOSTRACIÓN Se demuestra el caso $k = 2$. Sea L el operador diferencial definido en (8) y sean $y_{p_1}(x)$ y $y_{p_2}(x)$ soluciones particulares de las ecuaciones no homogéneas $L(y) = g_1(x)$ y $L(y) = g_2(x)$, respectivamente. Si definimos $y_p = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$, queremos demostrar que y_p es una solución particular de $L(y) = g_1(x) + g_2(x)$. Nuevamente se deduce el resultado por la linealidad del operador L:

$$L(y_p) = L\{y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)\} = L(y_{p_1}(x)) + L(y_{p_2}(x)) = g_1(x) + g_2(x).$$ ■

EJEMPLO 11 Superposición, ED no homogénea

Usted debe comprobar que

$y_{p_1} = -4x^2$ es una solución particular de $y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8$,

$y_{p_2} = e^{2x}$ es una solución particular de $y'' - 3y' + 4y = 2e^{2x}$,

$y_{p_3} = xe^x$ es una solución particular de $y'' - 3y' + 4y = 2xe^x - e^x$.

Se tiene de (13) del teorema 4.1.7 que la superposición de y_{p_1}, y_{p_2}, y y_{p_3},

$$y = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = -4x^2 + e^{2x} + xe^x,$$

es una solución de

$$y'' - 3y' + 4y = \underbrace{-16x^2 + 24x - 8}_{g_1(x)} + \underbrace{2e^{2x}}_{g_2(x)} + \underbrace{2xe^x - e^x}_{g_3(x)}.$$ ■

NOTA Si las y_{p_i} son soluciones particulares de (12) para $i = 1,2, \ldots , k$, entonces la combinación lineal

$$y_p = c_1 y_{p_1} + c_2 y_{p_2} + \cdots + c_k y_{p_k},$$

donde las c_i son constantes, es también una solución particular de (14) cuando el miembro del lado derecho de la ecuación es la combinación lineal

$$c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \cdots + c_k g_k(x).$$

Antes de que empecemos a resolver realmente ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas, se necesita un poco más de la teoría, que se presenta en la siguiente sección.

COMENTARIOS

Esta observación es una continuación del breve análisis de sistemas dinámicos que se presentó al final de la sección 1.3.

Un sistema dinámico cuya regla o modelo matemático es una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

se dice que es un **sistema lineal** de n-ésimo orden. Las n funciones dependientes del tiempo $y(t), y'(t), \ldots , y^{(n-1)}(t)$ son las **variables de estado** del sistema. Recuerde que sus valores en el tiempo t dan el **estado del sistema**. La función g tiene varios nombres: **función de entrada**, **función de fuerza** o **función de excitación**. Una solución $y(t)$ de la ecuación diferencial se llama **salida** o **respuesta del sistema**. Bajo las condiciones establecidas en el teorema 4.1.1, la salida o respuesta $y(t)$ se determina de manera única por la entrada y el estado del sistema prescritos en el tiempo t_0; es decir, por las condiciones iniciales $y(t_0), y'(t_0), \ldots , y^{(n-1)}(t_0)$.

Para que un sistema dinámico sea un sistema lineal es necesario que se cumpla en el sistema el principio de superposición (teorema 4.1.7); es decir, la respuesta del sistema a una superposición de entradas es una superposición de salidas. Ya se analizaron algunos de los sistemas lineales simples en la sección 3.1 (ecuaciones lineales de primer orden); en la sección 5.1 se examinan sistemas lineales en los que los modelos matemáticos son ecuaciones diferenciales de segundo orden.

EJERCICIOS 4.1

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-4.

4.1.1 PROBLEMAS CON VALORES INICIALES Y CON VALORES EN LA FRONTERA

En los problemas 1 a 4 la familia de funciones que se proporciona es la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo que se indica. Encuentre un miembro de la familia que sea una solución del problema con valores iniciales.

1. $y = c_1e^x + c_2e^{-x}, (-\infty, \infty)$;
 $y'' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

2. $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}, (-\infty, \infty)$;
 $y'' - 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

3. $y = c_1x + c_2x \ln x, (0, \infty)$;
 $x^2y'' - xy' + y = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = -1$

4. $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x, (-\infty, \infty)$;
 $y''' + y' = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 2, \quad y''(\pi) = -1$

5. Dado que $y = c_1 + c_2x^2$ es una familia de dos parámetros de soluciones de $xy'' - y' = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, demuestre que no se pueden encontrar las constantes c_1 y c_2 tales que un miembro de la familia satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Explique por qué esto no viola el teorema 4.1.1.

6. Encuentre dos miembros de la familia de soluciones del problema 5 que satisfagan las condiciones iniciales $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

7. Como $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$ es la solución general de $x'' + \omega^2x = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, demuestre que una solución que satisface las condiciones iniciales $x(0) = x_0, x'(0) = x_1$ está dada por

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{x_1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t.$$

8. Use la solución general de $x'' + \omega^2 x = 0$ que se da en el problema 7 para demostrar que una solución que satisface las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$ es la solución dada en el problema 7 cambiada por una cantidad t_0:

$$x(t) = x_0 \cos \omega(t - t_0) + \frac{x_1}{\omega} \operatorname{sen} \omega(t - t_0).$$

En los problemas 9 y 10 encuentre un intervalo centrado en $x = 0$ para el cual el problema con valores iniciales dado tiene una solución única.

9. $(x - 2)y'' + 3y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

10. $y'' + (\tan x)y = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

11. **a)** Utilice la familia del problema 1 para encontrar una solución de $y'' - y = 0$ que satisfaga las condiciones en la frontera $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

b) La ED del inciso a) tiene la solución general alternativa $y = c_3 \cosh x + c_4 \operatorname{senh} x$ en $(-\infty, \infty)$. Use esta familia para encontrar una solución que satisfaga las condiciones en la frontera del inciso a).

c) Demuestre que las soluciones de los incisos a) y b) son equivalentes.

12. Use la familia del problema 5 para encontrar una solución de $xy'' - y' = 0$ que satisfaga las condiciones en la frontera $y(0) = 1$, $y'(1) = 6$.

En los problemas 13 y 14 la familia de dos parámetros dada es una solución de la ecuación diferencial que se indica en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Determine si se puede encontrar un miembro de la familia que satisfaga las condiciones en la frontera.

13. $y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \operatorname{sen} x$; $y'' - 2y' + 2y = 0$

a) $y(0) = 1$, $y'(\pi) = 0$ **b)** $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$

c) $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ **d)** $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

14. $y = c_1 x^2 + c_2 x^4 + 3$; $x^2 y'' - 5xy' + 8y = 24$

a) $y(-1) = 0$, $y(1) = 4$ **b)** $y(0) = 1$, $y(1) = 2$

c) $y(0) = 3$, $y(1) = 0$ **d)** $y(1) = 3$, $y(2) = 15$

4.1.2 ECUACIONES HOMOGÉNEAS

En los problemas 15 a 22 determine si el conjunto de funciones es linealmente independiente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

15. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = 4x - 3x^2$

16. $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = e^x$

17. $f_1(x) = 5$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = \operatorname{sen}^2 x$

18. $f_1(x) = \cos 2x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = \cos^2 x$

19. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = x + 3$

20. $f_1(x) = 2 + x$, $f_2(x) = 2 + |x|$

21. $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$

22. $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = \operatorname{senh} x$

En los problemas 23 a 30 compruebe que las funciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo que se indica. Forme la solución general.

23. $y'' - y' - 12y = 0$; $e^{-3x}, e^{4x}, (-\infty, \infty)$

24. $y'' - 4y = 0$; $\cosh 2x, \operatorname{senh} 2x, (-\infty, \infty)$

25. $y'' - 2y' + 5y = 0$; $e^x \cos 2x, e^x \operatorname{sen} 2x, (-\infty, \infty)$

26. $4y'' - 4y' + y = 0$; $e^{x/2}, xe^{x/2}, (-\infty, \infty)$

27. $x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$; $x^3, x^4, (0, \infty)$

28. $x^2 y'' + xy' + y = 0$; $\cos(\ln x), \operatorname{sen}(\ln x), (0, \infty)$

29. $x^3 y''' + 6x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0$; $x, x^{-2}, x^{-2} \ln x, (0, \infty)$

30. $y^{(4)} + y'' = 0$; $1, x, \cos x, \operatorname{sen} x, (-\infty, \infty)$

4.1.3 ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS

En los problemas 31 a 34 compruebe que dada la familia de soluciones de dos parámetros, se trata de la solución general de la ecuación diferencial no homogénea en el intervalo indicado.

31. $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$;
$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x} + 6e^x, (-\infty, \infty)$

32. $y'' + y = \sec x$;
$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + (\cos x) \ln(\cos x)$, $(-\pi/2, \pi/2)$

33. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12$;
$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + x^2 e^{2x} + x - 2, (-\infty, \infty)$

34. $2x^2 y'' + 5xy' + y = x^2 - x$;
$y = c_1 x^{-1/2} + c_2 x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x, (0, \infty)$

35. **a)** Compruebe que $y_{p_1} = 3e^{2x}$ y $y_{p_2} = x^2 + 3x$ son, respectivamente, soluciones particulares de

$$y'' - 6y' + 5y = -9e^{2x}$$

y

$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16.$$

b) Use el inciso a) para encontrar soluciones particulares de

$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16 - 9e^{2x}$$

y

$$y'' - 6y' + 5y = -10x^2 - 6x + 32 + e^{2x}.$$

36. **a)** Por inspección encuentre una solución particular de

$$y'' + 2y = 10.$$

b) Por inspección encuentre una solución particular de

$$y'' + 2y = -4x.$$

c) Encuentre una solución particular de $y'' + 2y = -4x + 10$.

d) Determine una solución particular de $y'' + 2y = 8x + 5$.

Problemas para analizar

37. Sea $n = 1, 2, 3, \ldots$. Analice cómo pueden utilizarse las observaciones $D^n x^{n-1} = 0$ y $D^n x^n = n!$ para encontrar soluciones generales de las ecuaciones diferenciales dadas.

a) $y'' = 0$ **b)** $y''' = 0$ **c)** $y^{(4)} = 0$

d) $y'' = 2$ **e)** $y''' = 6$ **f)** $y^{(4)} = 24$

38. Suponga que $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$ son dos soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea. Explique por qué $y_3 = \cosh x$ y $y_4 = \operatorname{senh} x$ son también soluciones de la ecuación.

39. **a)** Compruebe que $y_1 = x^3$ y $y_2 = |x|^3$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

b) Demuestre que $W(y_1, y_2) = 0$ para todo número real x. ¿Este resultado viola el teorema 4.1.3? Explique.

c) Compruebe que $Y_1 = x^3$ y $Y_2 = x^2$ son también soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial del inciso a) en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

d) Determine una solución de la ecuación diferencial que satisfaga $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

e) Por el principio de superposición, teorema 4.1.2, ambas combinaciones lineales $y = c_1y_1 + c_2y_2$ y $Y = c_1Y_1 + c_2Y_2$ son soluciones de la ecuación diferencial. Analice si una, ambas o ninguna de las combinaciones lineales es una solución general de la ecuación diferencial en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

40. ¿El conjunto de funciones $f_1(x) = e^{x+2}$, $f_2(x) = e^{x-3}$ es linealmente dependiente o independiente en $(-\infty, \infty)$? Explique.

41. Suponga que $y_1, y_2, \ldots, y_k$ son k soluciones linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes. Por el teorema 4.1.2 se tiene que $y_{k+1} = 0$ es también una solución de la ecuación diferencial. ¿Es el conjunto de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}$ linealmente dependiente o independiente en $(-\infty,\infty)$? Explique.

42. Suponga que $y_1, y_2, \ldots, y_k$ son k soluciones no triviales de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes y que $k = n + 1$. ¿Es el conjunto de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_k$ linealmente dependiente o independiente en $(-\infty, \infty)$? Explique.

4.2 REDUCCIÓN DE ORDEN

REPASO DE MATERIAL

- Sección 2.5 (utilizando una sustitución).
- Sección 4.1.

INTRODUCCIÓN En la sección anterior vimos que la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{1}$$

es una combinación lineal $y = c_1y_1 + c_2y_2$, donde y_1 y y_2 son soluciones que constituyen un conjunto linealmente independiente en cierto intervalo I. Al comienzo de la siguiente sección se analiza un método para determinar estas soluciones cuando los coeficientes de la ED en (1) son constantes. Este método, que es un ejercicio directo en álgebra, falla en algunos casos y sólo produce una solución simple y_1 de la ED. En estos casos se puede construir una segunda solución y_2 de una ecuación homogénea (1) (aun cuando los coeficientes en (1) son variables) siempre que se conozca una solución no trivial y_1 de la ED. La idea básica que se describe en esta sección es que la *ecuación* (1) *se puede reducir a una ED lineal de primer orden por medio de una sustitución* en la que interviene la solución conocida y_1. Una segunda solución y_2 de (1) es evidente después de resolver la ED de primer orden.

REDUCCIÓN DE ORDEN Suponga que y_1 denota una solución no trivial de (1) y que y_1 se define en un intervalo I. Se busca una segunda solución y_2 tal que y_1 y y_2 sean un conjunto linealmente independiente en I. Recuerde de la sección 4.1 que si y_1 y y_2 son linealmente independientes, entonces su cociente y_2/y_1 no es constante en I, es decir, $y_2(x)/y_1(x) = u(x)$ o $y_2(x) = u(x)y_1(x)$. La función $u(x)$ se determina al sustituir $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ en la ecuación diferencial dada. Este método se llama **reducción de orden** porque debemos resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden para encontrar a u.

EJEMPLO 1 Una segunda solución por reducción de orden

Dado que $y_1 = e^x$ es una solución de $y'' - y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, use reducción de orden para determinar una segunda solución y_2.

SOLUCIÓN Si $y = u(x)y_1(x) = u(x)e^x$, entonces aplicando la regla del producto se obtiene

$$y' = ue^x + e^x u', \quad y'' = ue^x + 2e^x u' + e^x u'',$$

por tanto

$$y'' - y = e^x(u'' + 2u') = 0.$$

Puesto que $e^x \neq 0$, la última ecuación requiere que $u'' + 2u' = 0$. Si se hace la sustitución $w = u'$, esta ecuación lineal de segundo orden en u se convierte en $w' + 2w = 0$, que es una ecuación lineal de primer orden en w. Si se usa el factor integrante e^{2x}, se puede escribir $\dfrac{d}{dx}[e^{2x}w] = 0$. Después de integrar, se obtiene $w = c_1e^{-2x}$ o $u' = c_1e^{-2x}$. Al integrar de nuevo se obtiene $u = -\frac{1}{2}c_1e^{-2x} + c_2$. Así

$$y = u(x)e^x = -\frac{c_1}{2}e^{-x} + c_2e^x. \tag{2}$$

Haciendo $c_2 = 0$ y $c_1 = -2$, se obtiene la segunda solución deseada, $y_2 = e^{-x}$. Puesto que $W(e^x, e^{-x}) \neq 0$ para toda x, las soluciones son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$. ■

Puesto que se ha demostrado que $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$ son soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal de segundo orden, la expresión en (2) es en realidad la solución general de $y'' - y = 0$ en $(-\infty, \infty)$.

CASO GENERAL Suponga que se divide entre $a_2(x)$ para escribir la ecuación (1) en la **forma estándar**

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{3}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en algún intervalo I. Supongamos además que $y_1(x)$ es una solución conocida de (3) en I y que $y_1(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo. Si se define $y = u(x)y_1(x)$, se tiene que

$$y' = uy_1' + y_1u', \quad y'' = uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u''$$

$$y'' + Py' + Qy = u\underbrace{[y_1'' + Py_1' + Qy_1]}_{\text{cero}} + y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0.$$

Esto implica que se debe tener

$$y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0 \quad \text{o} \quad y_1w' + (2y_1' + Py_1)w = 0, \tag{4}$$

donde hacemos que $w = u'$. Observe que la última ecuación en (4) es tanto lineal como separable. Separando las variables e integrando, se obtiene

$$\frac{dw}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1}dx + P\,dx = 0$$

$$\ln|wy_1^2| = -\int P\,dx + c \qquad \text{o} \qquad wy_1^2 = c_1e^{-\int P\,dx}.$$

Despejamos a w de la última ecuación, usamos $w = u'$ e integrando nuevamente:

$$u = c_1\int \frac{e^{-\int P\,dx}}{y_1^2}\,dx + c_2.$$

Eligiendo $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, se encuentra de $y = u(x)y_1(x)$ que una segunda solución de la ecuación (3) es

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx. \tag{5}$$

Un buen ejercicio de derivación es comprobar que la función $y_2(x)$ que se define en (5) satisface la ecuación (3) y que y_1 y y_2 son linealmente independientes en algún intervalo en el que $y_1(x)$ no es cero.

EJEMPLO 2 Una segunda solución por la fórmula (5)

La función $y_1 = x^2$ es una solución de $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo $(0, \infty)$.

SOLUCIÓN De la forma estándar de la ecuación,

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0,$$

encontramos de (5)

$$y_2 = x^2 \int \frac{e^{3\int dx/x}}{x^4}\,dx \qquad \leftarrow e^{3\int dx/x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

$$= x^2 \int \frac{dx}{x} = x^2 \ln x.$$

La solución general en el intervalo $(0, \infty)$ está dada por $y = c_1y_1 + c_2y_2$; es decir, $y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x$. ■

COMENTARIOS

i) La deducción y uso de la fórmula (5) se ha mostrado aquí porque esta fórmula aparece de nuevo en la siguiente sección y en las secciones 4.7 y 6.2. La ecuación (5) se usa simplemente para ahorrar tiempo en obtener un resultado deseado. Su profesor le indicará si debe memorizar la ecuación (5) o si debe conocer los primeros principios de la reducción de orden.

ii) La reducción de orden se puede usar para encontrar la solución general de una ecuación no homogénea $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$ siempre que se conozca una solución y_1 de la ecuación homogénea asociada. Vea los problemas 17 a 20 en los ejercicios 4.2.

EJERCICIOS 4.2

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-4.

En los problemas 1 a 16 la función indicada $y_1(x)$ es una solución de la ecuación diferencial dada. Use la reducción de orden o la fórmula (5), como se indica, para encontrar una segunda solución $y_2(x)$.

1. $y'' - 4y' + 4y = 0; \quad y_1 = e^{2x}$
2. $y'' + 2y' + y = 0; \quad y_1 = xe^{-x}$
3. $y'' + 16y = 0; \quad y_1 = \cos 4x$
4. $y'' + 9y = 0; \quad y_1 = \operatorname{sen} 3x$
5. $y'' - y = 0; \quad y_1 = \cosh x$
6. $y'' - 25y = 0; \quad y_1 = e^{5x}$
7. $9y'' - 12y' + 4y = 0; \quad y_1 = e^{2x/3}$
8. $6y'' + y' - y = 0; \quad y_1 = e^{x/3}$
9. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0; \quad y_1 = x^4$
10. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0; \quad y_1 = x^2$
11. $xy'' + y' = 0; \quad y_1 = \ln x$
12. $4x^2y'' + y = 0; \quad y_1 = x^{1/2} \ln x$
13. $x^2y'' - xy' + 2y = 0; \quad y_1 = x \operatorname{sen}(\ln x)$
14. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0; \quad y_1 = x^2 \cos(\ln x)$

15. $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0;\quad y_1 = x + 1$

16. $(1 - x^2)y'' + 2xy' = 0;\quad y_1 = 1$

En los problemas 17 al 20 la función que se indica $y_1(x)$ es una solución de la ecuación homogénea asociada. Use el método de reducción de orden para determinar una segunda solución $y_2(x)$ de la ecuación homogénea y una solución particular de la ecuación no homogénea dada.

17. $y'' - 4y = 2;\quad y_1 = e^{-2x}$

18. $y'' + y' = 1;\quad y_1 = 1$

19. $y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x};\quad y_1 = e^x$

20. $y'' - 4y' + 3y = x;\quad y_1 = e^x$

Problemas para analizar

21. **a)** Proporcione una demostración convincente de que la ecuación de segundo orden $ay'' + by' + cy = 0$, a, b, y c constantes, tiene siempre cuando menos una solución de la forma $y_1 = e^{m_1 x}$, m_1 es una constante.

b) Explique por qué la ecuación diferencial que se proporciona en el inciso a) debe tener una segunda solución de la forma $y_2 = e^{m_2 x}$ o de la forma $y_2 = xe^{m_1 x}$, m_1 y m_2 son constantes.

c) Analice de nuevo los problemas 1 al 8. ¿Puede explicar por qué los enunciados de los incisos a) y b) anteriores no se contradicen con las respuestas de los problemas 3 al 5?

22. Compruebe que $y_1(x) = x$ es una solución de $xy'' - xy' + y = 0$. Utilice la reducción de orden para encontrar una segunda solución $y_2(x)$ en la forma de una serie infinita. Estime un intervalo de definición para $y_2(x)$.

Tarea para el laboratorio de computación

23. **a)** Compruebe que $y_1(x) = e^x$ es una solución de

$$xy'' - (x + 10)y' + 10y = 0.$$

b) Use la ecuación (5) para determinar una segunda solución $y_2(x)$. Usando un SAC realice la integración que se requiere.

c) Explique, usando el corolario (A) del teorema 4.1.2, por qué la segunda solución puede escribirse en forma compacta como

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!} x^n.$$

4.3 ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

REPASO DE MATERIAL

- Repase el problema 27 de los ejercicios 1.1 y del teorema 4.1.5.
- Repase el álgebra de solución de ecuaciones polinomiales.

INTRODUCCIÓN Como un medio para motivar el análisis en esta sección se tratan nuevamente las ecuaciones diferenciales de primer orden más específicamente, las ecuaciones lineales, *homogéneas* $ay' + by = 0$, donde los coeficientes $a \neq 0$ y b son constantes. Este tipo de ecuación se resuelve ya sea por variables separables o con ayuda de un factor integrante, pero hay otro método de solución, uno que sólo utiliza álgebra. Antes de mostrar este método alternativo, hacemos una observación: despejando y' de la ecuación $ay' + by = 0$ se obtiene $y' = ky$, donde k es una constante. Esta observación revela la naturaleza de la solución desconocida y; la única función elemental no trivial cuya derivada es una constante múltiple de sí misma es la función exponencial e^{mx}. Ahora el nuevo método de solución: si sustituimos $y = e^{mx}$ y $y' = me^{mx}$ en $ay' + by = 0$, se obtiene

$$ame^{mx} + be^{mx} = 0 \quad \text{o} \quad e^{mx}(am + b) = 0.$$

Como e^{mx} nunca es cero para valores reales de x, la última ecuación se satisface sólo cuando m es una solución o raíz de la ecuación polinomial de primer grado $am + b = 0$. Para este único valor de m, $y = e^{mx}$ es una solución de la ED. Para mostrar esto, considere la ecuación de coeficientes constantes $2y' + 5y = 0$. No es necesario realizar la derivación y la sustitución de $y = e^{mx}$ en la ED; sólo se tiene que formar la ecuación $2m + 5 = 0$ y despejar m. De $m = -\frac{5}{2}$ se concluye que $y = e^{-5x/2}$ es una solución de $2y' + 5y = 0$, y su solución general en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es $y = c_1 e^{-5x/2}$.

En esta sección veremos que el procedimiento anterior genera soluciones exponenciales para las ED lineales homogéneas de orden superior,

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{1}$$

donde los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales y $a_n \neq 0$.

ECUACIÓN AUXILIAR Se empieza por considerar el caso especial de la ecuación de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{2}$$

donde a, b y c son constantes. Si se intenta encontrar una solución de la forma $y = e^{mx}$, entonces después de sustituir $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2e^{mx}$, la ecuación (2) se convierte en

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \quad \text{o} \quad e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

Como en la introducción se argumenta que debido a que $e^{mx} \neq 0$ para toda x, es obvio que la única forma en que $y = e^{mx}$ puede satisfacer la ecuación diferencial (2) es cuando se elige m como una raíz de la ecuación cuadrática

$$am^2 + bm + c = 0. \tag{3}$$

Esta última ecuación se llama **ecuación auxiliar** de la ecuación diferencial (2). Como las dos raíces de (3) son $m_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ y $m_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$, habrá tres formas de la solución general de (2) que corresponden a los tres casos:

- m_1 y m_2 reales y distintas $(b^2 - 4ac > 0)$,
- m_1 y m_2 reales e iguales $(b^2 - 4ac = 0)$, y
- m_1 y m_2 números conjugados complejos $(b^2 - 4ac < 0)$.

Analicemos cada uno de estos casos.

CASO 1: RAÍCES REALES Y DISTINTAS Bajo la suposición de que la ecuación auxiliar (3) tiene dos raíces reales desiguales m_1 y m_2, encontramos dos soluciones, $y_1 = e^{m_1x}$ y $y_2 = e^{m_2x}$. Vemos que estas funciones son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ y, por tanto, forman un conjunto fundamental. Se deduce que la solución general de (2) en este intervalo es

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}. \tag{4}$$

CASO II: RAÍCES REALES REPETIDAS Cuando $m_1 = m_2$, necesariamente se obtiene sólo una solución exponencial, $y_1 = e^{m_1x}$. De la fórmula cuadrática se encuentra que $m_1 = -b/2a$ puesto que la única forma en que se tiene que $m_1 = m_2$ es tener $b^2 - 4ac = 0$. Tenemos de (5) en la sección 4.2 que una segunda solución de la ecuación es

$$y_2 = e^{m_1x}\int \frac{e^{2m_1x}}{e^{2m_1x}}\,dx = e^{m_1x}\int dx = xe^{m_1x}. \tag{5}$$

En (5) hemos usado el hecho de que $-b/a = 2m_1$. La solución general es entonces

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x}. \tag{6}$$

CASO III: RAÍCES COMPLEJAS CONJUGADAS Si m_1 y m_2 son complejas, entonces se puede escribir $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, donde α y $\beta > 0$ son reales $i^2 = -1$. De manera formal, no hay diferencia entre este caso y el caso I y, por tanto,

$$y = C_1e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Sin embargo, en la práctica se prefiere trabajar con funciones reales en lugar de exponenciales complejas. Con este fin se usa la **fórmula de Euler:**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta,$$

donde θ es cualquier número real.* Se tiene de esta fórmula que

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\,\operatorname{sen}\beta x \quad \text{y} \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\,\operatorname{sen}\beta x, \tag{7}$$

*Una deducción formal de la fórmula de Euler se obtiene de la serie de Maclaurin $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ sustituyendo $x = i\theta$, con $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, . . . y después separando la serie en las partes real e imaginaria. Así se establece la plausibilidad, por lo que podemos adoptar a $\cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta$ como la *definición* de $e^{i\theta}$.

donde se usaron $\cos(-\beta x) = \cos \beta x$ y $\operatorname{sen}(-\beta x) = -\operatorname{sen} \beta x$. Observe que si primero se suma y luego se restan las dos ecuaciones en (7), se obtiene, respectivamente,

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x \quad \text{y} \quad e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i \operatorname{sen}\beta x.$$

Puesto que $y = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$ es una solución de (2) para alguna elección de las constantes C_1 y C_2, las elecciones $C_1 = C_2 = 1$ y $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ dan, a su vez, dos soluciones:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} + e^{(\alpha - i\beta)x} \qquad \text{y} \qquad y_2 = e^{(\alpha + i\beta)x} - e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

Pero $\qquad y_1 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x$

y $\qquad y_2 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x.$

Por tanto, del corolario A) del teorema 4.1.2, los dos últimos resultados muestran que $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ son soluciones reales de (2). Además, estas soluciones forman un conjunto fundamental en $(-\infty, \infty)$. Por tanto, la solución general es

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\operatorname{sen}\beta x). \tag{8}$$

EJEMPLO 1 ED de segundo orden

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $2y'' - 5y' - 3y = 0$ **b)** $y'' - 10y' + 25y = 0$ **c)** $y'' + 4y' + 7y = 0$

SOLUCIÓN Se dan las ecuaciones auxiliares, las raíces y las soluciones generales correspondientes.

a) $2m^2 - 5m - 3 = (2m + 1)(m - 3) = 0, \quad m_1 = -\frac{1}{2}, \quad m_2 = 3$

De (4), $y = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{3x}$.

b) $m^2 - 10m + 25 = (m - 5)^2 = 0, \quad m_1 = m_2 = 5$

De (6), $y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$.

c) $m^2 + 4m + 7 = 0, \; m_1 = -2 + \sqrt{3}i, \quad m_2 = -2 - \sqrt{3}i$

De (8) con $\alpha = -2$, $\beta = \sqrt{3}$, $y = e^{-2x}\left(c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\operatorname{sen}\sqrt{3}x\right)$. ■

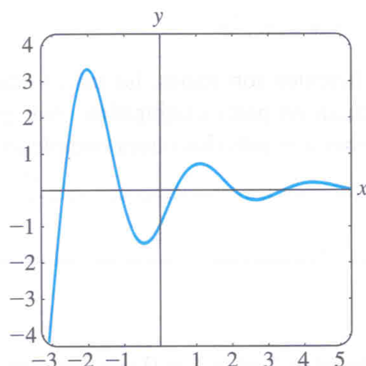


FIGURA 4.3.1 Curva solución del PVI del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Un problema con valores iniciales

Resuelva $4y'' + 4y' + 17y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.

SOLUCIÓN Usando la fórmula cuadrática tenemos que las raíces de la ecuación auxiliar $4m^2 + 4m + 17 = 0$ son $m_1 = -\frac{1}{2} + 2i$ y $m_2 = -\frac{1}{2} - 2i$. Por tanto, de la ecuación (8) se tiene que $y = e^{-x/2}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$. Aplicando la condición $y(0) = -1$, se observa de $e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0) = -1$ que $c_1 = -1$. Derivando $y = e^{-x/2}(-\cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$ y después usando $y'(0) = 2$, se obtiene $2c_2 + \frac{1}{2} = 2$ o $c_2 = \frac{3}{4}$. Por tanto, la solución del PVI es $y = e^{-x/2}(-\cos 2x + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2x)$. En la figura 4.3.1 vemos que la solución es oscilatoria, pero $y \to 0$ conforme $x \to \infty$ y $|y| \to \infty$ conforme $x \to -\infty$. ■

DOS ECUACIONES QUE MERECEN CONOCERSE Las dos ecuaciones diferenciales

$$y'' + k^2 y = 0 \quad \text{y} \quad y'' - k^2 y = 0,$$

donde k es real, son importantes en matemáticas aplicadas. Para $y'' + k^2y = 0$, la ecuación auxiliar $m^2 + k^2 = 0$ tienen raíces imaginarias $m_1 = ki$ y $m_2 = -ki$. Con $\alpha = 0$ y $\beta = k$ en (8) se ve que la solución general de la ED es

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \operatorname{sen} kx. \tag{9}$$

Por otra parte, la ecuación auxiliar $m^2 - k^2 = 0$ para $y'' - k^2y = 0$ tiene raíces reales distintas $m_1 = k$ y $m_2 = -k$, y así por la ecuación (4) la solución general de la ED es

$$y = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}. \tag{10}$$

Observe que si se elige $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ y $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{2}$ en (10), se obtienen las soluciones particulares $y = \frac{1}{2}(e^{kx} + e^{-kx}) = \cosh kx$ y $y = \frac{1}{2}(e^{kx} - e^{-kx}) = \operatorname{senh} kx$. Puesto que $\cosh kx$ y $\operatorname{senh} kx$ son linealmente independientes en algún intervalo del eje x, una forma alternativa para la solución general de $y'' - k^2y = 0$ es

$$y = c_1 \cosh kx + c_2 \operatorname{senh} kx. \tag{11}$$

Vea los problemas 41 y 42 de los ejercicios 4.3.

ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR En general, para resolver una ecuación diferencial de n-ésimo orden (1) donde a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales, se debe resolver una ecuación polinomial de n-ésimo grado

$$a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0. \tag{12}$$

Si todas las raíces de (12) son reales y distintas, entonces la solución general de (1) es

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \cdots + c_ne^{m_nx}.$$

Es un poco difícil resumir los análogos de los casos II y III porque las raíces de una ecuación auxiliar de grado mayor que dos ocurren en muchas combinaciones. Por ejemplo, una ecuación de quinto grado podría tener cinco raíces reales distintas, o tres raíces reales distintas y dos complejas, o una real y cuatro complejas, o cinco raíces reales pero iguales, o cinco raíces reales pero dos de ellas iguales, etc. Cuando m_1 es una raíz de multiplicidad k de una ecuación auxiliar de n-ésimo grado (es decir, k raíces son iguales a m_1), es posible demostrar que las soluciones linealmente independientes son

$$e^{m_1x}, \quad xe^{m_1x}, \quad x^2e^{m_1x}, \ldots, \quad x^{k-1}e^{m_1x}$$

y la solución general debe contener la combinación lineal

$$c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x} + c_3x^2e^{m_1x} + \cdots + c_kx^{k-1}e^{m_1x}.$$

Por último, se debe recordar que cuando los coeficientes son reales, las raíces complejas de una ecuación auxiliar siempre se presentan en pares conjugados. Así, por ejemplo, una ecuación polinomial cúbica puede tener a lo más dos raíces complejas.

EJEMPLO 3 ED de tercer orden

Resuelva $y''' + 3y'' - 4y = 0$.

SOLUCIÓN Debe ser evidente de la inspección de $m^3 + 3m^2 - 4 = 0$ que una raíz es $m_1 = 1$, por tanto, $m - 1$ es un factor de $m^3 + 3m^2 - 4$. Dividiendo se encuentra que

$$m^3 + 3m^2 - 4 = (m - 1)(m^2 + 4m + 4) = (m - 1)(m + 2)^2,$$

así las raíces son $m_2 = m_3 = -2$. Así, la solución general de la ED es $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3xe^{-2x}$. ■

EJEMPLO 4 ED de cuarto orden

Resuelva $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar $m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2 = 0$ tiene raíces $m_1 = m_3 = i$ y $m_2 = m_4 = -i$. Así, del caso II la solución es

$$y = C_1e^{ix} + C_2e^{-ix} + C_3xe^{ix} + C_4xe^{-ix}.$$

Por la fórmula de Euler el grupo $C_1e^{ix} + C_2e^{-ix}$ se puede rescribir como

$$c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

después de redefinir de nuevo las constantes. De manera similar, $x(C_3e^{ix} + C_4e^{-ix})$ se puede expresar como $x(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x)$. Por tanto, la solución general es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3x \cos x + c_4x \operatorname{sen} x.$$

■

El ejemplo 4 ilustra un caso especial cuando la ecuación auxiliar tiene raíces repetidas complejas. En general, si $m_1 = \alpha + i\beta, \beta > 0$ es una raíz compleja de multiplicidad k de una ecuación auxiliar con coeficientes reales, entonces su conjugada $m_2 = \alpha - i\beta$ es también una raíz de multiplicidad k. De las $2k$ soluciones con valores complejos

$$e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad xe^{(\alpha+i\beta)x}, \quad x^2e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad \ldots, \quad x^{k-1}e^{(\alpha+i\beta)x},$$
$$e^{(\alpha-i\beta)x}, \quad xe^{(\alpha-i\beta)x}, \quad x^2e^{(\alpha-i\beta)x}, \quad \ldots, \quad x^{k-1}e^{(\alpha-i\beta)x},$$

concluimos, con la ayuda de la fórmula de Euler, que la solución general de la ecuación diferencial correspondiente debe tener una combinación lineal de las $2k$ soluciones reales linealmente independientes.

$$e^{\alpha x}\cos \beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos \beta x, \quad x^2e^{\alpha x}\cos \beta x, \quad \ldots, \quad x^{k-1}e^{\alpha x}\cos \beta x,$$
$$e^{\alpha x}\operatorname{sen} \beta x, \quad xe^{\alpha x}\operatorname{sen} \beta x, \quad x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen} \beta x, \quad \ldots, \quad x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen} \beta x.$$

En el ejemplo 4 identificamos $k = 2$, $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

Por supuesto, el aspecto más difícil de resolver ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes es determinar las raíces de ecuaciones auxiliares de grado mayor que dos. Por ejemplo, para resolver $3y''' + 5y'' + 10y' - 4y = 0$, debemos resolver $3m^3 + 5m^2 + 10m - 4 = 0$. Algo que se puede intentar es probar la ecuación auxiliar para raíces racionales. Recuerde que si $m_1 = p/q$ es una raíz racional (en su mínima expresión) de una ecuación auxiliar $a_nm^n + \cdots + a_1m + a_0 = 0$ con coeficientes enteros, entonces p es un factor de a_0 y q es un factor de a_n. Para la ecuación auxiliar cúbica específica, todos los factores de $a_0 = -4$ y $a_n = 3$ son p: $\pm1, \pm2, \pm4$ y q: $\pm1, \pm3$ por lo que las posibles raíces racionales son p/q: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$. Entonces se puede probar cada uno de estos números, digamos, por división sintética. De esta forma se descubre la raíz $m_1 = \frac{1}{3}$ y la factorización

$$3m^3 + 5m^2 + 10m - 4 = \left(m - \tfrac{1}{3}\right)(3m^2 + 6m + 12).$$

De la fórmula cuadrática se obtienen las otras raíces $m_2 = -1 + \sqrt{3}i$ y $m_3 -1 - \sqrt{3}i$. Por tanto, la solución general de $3y''' + 5y'' + 10y' - 4y = 0$ es $y = c_1e^{x/3} + e^{-x}(c_2 \cos \sqrt{3}x + c_3 \operatorname{sen} \sqrt{3}x)$.

USO DE COMPUTADORAS Determinar las raíces o aproximar las raíces de ecuaciones auxiliares es un problema de rutina con una calculadora apropiada o con un paquete de cómputo. Las ecuaciones polinomiales (en una variable) de grado menor que cinco se resuelven por medio de fórmulas algebraicas usando las instrucciones *solve* en *Mathematica* y *Maple*. Para ecuaciones polinomiales de grado cinco o mayor podría ser necesario recurrir a comandos numéricos tales como **NSolve** y **FindRoot** en *Mathematica*. Debido a su capacidad para resolver ecuaciones polinomiales, no es sorprendente que estos sistemas alge-

braicos para computadora también puedan, usando sus comandos *dsolve*, dar soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.

En el libro clásico *Differential Equations* de Ralph Palmer Agnew* (que el autor usó cuando era estudiante), se expresa el siguiente enunciado:

No es razonable esperar que los alumnos de este curso tengan la capacidad y el equipo de cómputo necesario para resolver de manera eficaz ecuaciones tales como

$$4.317\frac{d^4y}{dx^4} + 2.179\frac{d^3y}{dx^3} + 1.416\frac{d^2y}{dx^2} + 1.295\frac{dy}{dx} + 3.169y = 0. \tag{13}$$

Aunque es debatible si en todos estos años ha mejorado la capacidad para realizar cálculos, es indiscutible que la tecnología sí lo ha hecho. Si se tiene acceso a un sistema algebraico para computadora, se podría ahora considerar razonable la ecuación (13). Después de simplificar y efectuar algunas sustituciones en el resultado, *Mathematica* genera la solución general (aproximada)

$$y = c_1e^{-0.728852x}\cos(0.618605x) + c_2e^{-0.728852x}\,\text{sen}(0.618605x)$$
$$+ c_3e^{0.476478x}\cos(0.759081x) + c_4e^{0.476478x}\,\text{sen}(0.759081x).$$

Por último, si se le presenta un problema con valores iniciales que consiste en, digamos, una ecuación de cuarto orden, entonces para ajustar la solución general de la ED a las cuatro condiciones iniciales, se deben resolver cuatro ecuaciones lineales con las cuatro incógnitas (c_1, c_2, c_3 y c_4 en la solución general). Si se emplea un SAC para resolver el sistema se puede ahorrar mucho tiempo. Véanse los problemas 59 y 60 del ejercicio 4.3 y el problema 35 en Repaso del capítulo 4.

*McGraw-Hill, Nueva York, 1960.

EJERCICIOS 4.3

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-4.

En los problemas 1 a 14, obtenga la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden dada.

1. $4y'' + y' = 0$

2. $y'' - 36y = 0$

3. $y'' - y' - 6y = 0$

4. $y'' - 3y' + 2y = 0$

5. $y'' + 8y' + 16y = 0$

6. $y'' - 10y' + 25y = 0$

7. $12y'' - 5y' - 2y = 0$

8. $y'' + 4y' - y = 0$

9. $y'' + 9y = 0$

10. $3y'' + y = 0$

11. $y'' - 4y' + 5y = 0$

12. $2y'' + 2y' + y = 0$

13. $3y'' + 2y' + y = 0$

14. $2y'' - 3y' + 4y = 0$

En los problemas 15 a 28 encuentre la solución general de la ecuación diferencial de orden superior dada.

15. $y''' - 4y'' - 5y' = 0$

16. $y''' - y = 0$

17. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$

18. $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$

19. $\dfrac{d^3u}{dt^3} + \dfrac{d^2u}{dt^2} - 2u = 0$

20. $\dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$

21. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

22. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

23. $y^{(4)} + y''' + y'' = 0$

24. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

25. $16\dfrac{d^4y}{dx^4} + 24\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$

26. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 7\dfrac{d^2y}{dx^2} - 18y = 0$

27. $\dfrac{d^5u}{dr^5} + 5\dfrac{d^4u}{dr^4} - 2\dfrac{d^3u}{dr^3} - 10\dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{du}{dr} + 5u = 0$

28. $2\dfrac{d^5x}{ds^5} - 7\dfrac{d^4x}{ds^4} + 12\dfrac{d^3x}{ds^3} + 8\dfrac{d^2x}{ds^2} = 0$

En los problemas 29 a 36 resuelva el problema con valores iniciales

29. $y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = -2$

30. $\dfrac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0, y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2$

31. $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} - 5y = 0, \quad y(1) = 0, y'(1) = 2$

32. $4y'' - 4y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 5$

33. $y'' + y' + 2y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$

34. $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 5, y'(0) = 10$

35. $y''' + 12y'' + 36y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -7$

36. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1$

En los problemas 37 a 40 resuelva el problema con valores en la frontera dado.

37. $y'' - 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = 1, y(1) = 0$

38. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0$

39. $y'' + y = 0, \quad y'(0) = 0, y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

40. $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, y(\pi) = 1$

En los problemas 41 y 42 resuelva el problema dado usando primero la forma de la solución general dada en (10). Resuelva de nuevo esta vez usando la fórmula dada en (11).

41. $y'' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 5$

42. $y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, y'(1) = 0$

En los problemas 43 a 48 cada figura representa la gráfica de una solución particular de una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y'' - 3y' - 4y = 0$ b) $y'' + 4y = 0$

c) $y'' + 2y' + y = 0$ d) $y'' + y = 0$

e) $y'' + 2y' + 2y = 0$ f) $y'' - 3y' + 2y = 0$

Relacione una curva solución con una de las ecuaciones diferenciales. Explique su razonamiento.

43.

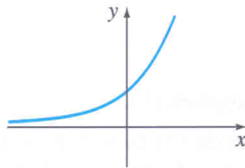


FIGURA 4.3.2 Gráfica del problema 43.

44.

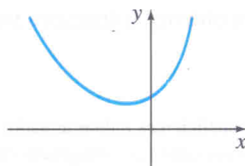


FIGURA 4.3.3 Gráfica del problema 44.

45.

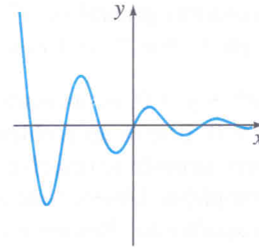


FIGURA 4.3.4 Gráfica del problema 45.

46.

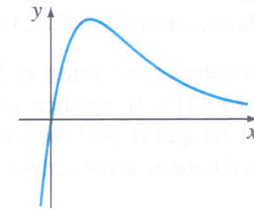


FIGURA 4.3.5 Gráfica del problema 46.

47.

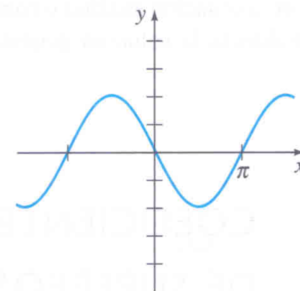


FIGURA 4.3.6 Gráfica del problema 47.

48.

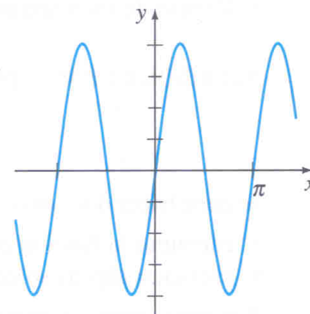


FIGURA 4.3.7 Gráfica del problema 48.

Problemas para analizar

49. Las raíces de una ecuación cúbica auxiliar son $m_1 = 4$ y $m_2 = m_3 = -5$. ¿Cuál es la ecuación diferencial lineal homogénea correspondiente? Analice: ¿su respuesta es única?

50. Dos raíces de una ecuación auxiliar cúbica con coeficientes reales son $m_1 = -\frac{1}{2}$ y $m_2 = 3 + i$. ¿Cuál es la ecuación diferencial lineal homogénea correspondiente?

51. Determine la solución general de $y''' + 6y'' + y' - 34y = 0$ si se sabe que $y_1 = e^{-4x}\cos x$ es una solución.

52. Para resolver $y^{(4)} + y = 0$, es necesario encontrar las raíces de $m^4 + 1 = 0$. Este es un problema trivial si se utiliza un SAC, pero también se resuelve a mano trabajando con números complejos. Observe que $m^4 + 1 = (m^2 + 1)^2 - 2m^2$. ¿Cómo ayuda esto? Resuelva la ecuación diferencial.

53. Compruebe que $y = \operatorname{senh} x - 2\cos(x + \pi/6)$ es una solución particular de $y^{(4)} - y = 0$. Reconcilie esta solución particular con la solución general de la ED.

54. Considere el problema con valores en la frontera $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$. Analice: ¿es posible determinar valores de λ tal que el problema tenga **a)** soluciones triviales?, **b)** ¿soluciones no triviales?

Tarea para el laboratorio de computación

En los problemas 55 a 58 use una computadora ya sea como ayuda para resolver la ecuación auxiliar o como un medio para obtener de forma directa la solución general de la ecuación diferencial dada. Si utiliza un SAC para obtener la solución general, simplifique el resultado y si es necesario, escriba la solución en términos de funciones reales.

55. $y''' - 6y'' + 2y' + y = 0$

56. $6.11y''' + 8.59y'' + 7.93y' + 0.778y = 0$

57. $3.15y^{(4)} - 5.34y'' + 6.33y' - 2.03y = 0$

58. $y^{(4)} + 2y'' - y' + 2y = 0$

En los problemas 59 y 60 utilice un SAC como ayuda para resolver la ecuación auxiliar. Forme la solución general de la ecuación diferencial. Después utilice un SAC como ayuda para resolver el sistema de ecuaciones para los coeficientes c_i, $i = 1, 2, 3, 4$ que resulta cuando se aplican las condiciones iniciales a la solución general.

59. $2y^{(4)} + 3y''' - 16y'' + 15y' - 4y = 0,$
$y(0) = -2,\ y'(0) = 6,\ y''(0) = 3,\ y'''(0) = \frac{1}{2}$

60. $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0,$
$y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = y'''(0) = 1$

4.4 COEFICIENTES INDETERMINADOS: MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN*

REPASO DE MATERIAL

- Repaso de los teoremas 4.1.6 y 4.1.7 (sección 4.1).

INTRODUCCIÓN Para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x), \tag{1}$$

se debe hacer dos cosas:

- encontrar la función complementaria y_c y
- encontrar alguna solución particular y_p de la ecuación no homogénea (1).

Entonces, como se explicó en la sección 4.1, la solución general de (1) es $y = y_c + y_p$. La función complementaria y_c es la solución general de la ED homogénea asociada de (1), es decir,

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

En la sección 4.3 vimos cómo resolver esta clase de ecuaciones cuando los coeficientes eran constantes. Así, el objetivo en esta sección es desarrollar un método para obtener soluciones particulares.

*__Nota para el profesor:__ En esta sección el método de coeficientes indeterminados se desarrolla desde el punto de vista del principio de superposición para ecuaciones no homogéneas (teorema 4.7.1). En la sección 4.5 se presentará un método totalmente diferente que utiliza el concepto de operadores diferenciales anuladores. Elija el que convenga.

MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS La primera de las dos formas que se consideran para obtener una solución particular y_p de una ED lineal no homogénea se llama **método de coeficientes indeterminados**. La idea fundamental detrás de este método es una conjetura acerca de la forma de y_p, en realidad una intuición educada, motivada por las clases de funciones que forman la función de entrada $g(x)$. El método general se limita a ED lineales como (1) donde

- los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes y
- $g(x)$ es una constante k, una función polinomial, una función exponencial $e^{\alpha x}$, una función seno o coseno sen βx o cos βx o sumas finitas y productos de estas funciones.

NOTA Estrictamente hablando, $g(x) = k$ (constante) es una función polinomial. Puesto que probablemente una función constante no es lo primero en que se piensa cuando se consideran funciones polinomiales, para enfatizar continuaremos con la redundancia "funciones constantes, polinomios, . . . ".

Las siguientes funciones son algunos ejemplos de los tipos de entradas $g(x)$ que son apropiadas para esta descripción:

$$g(x) = 10, \quad g(x) = x^2 - 5x, \quad g(x) = 15x - 6 + 8e^{-x},$$

$$g(x) = \operatorname{sen} 3x - 5x \cos 2x, \quad g(x) = xe^x \operatorname{sen} x + (3x^2 - 1)e^{-4x}.$$

Es decir, $g(x)$ es una combinación lineal de funciones de la clase

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad P(x)\, e^{\alpha x}, \quad P(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \quad \text{y} \quad P(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

donde n es un entero no negativo y α y β son números reales. El método de coeficientes indeterminados no es aplicable a ecuaciones de la forma (1) cuando

$$g(x) = \ln x, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \tan x, \quad g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x,$$

etcétera. Las ecuaciones diferenciales en las que la entrada $g(x)$ es una función de esta última clase se consideran en la sección 4.6.

El conjunto de funciones que consiste en constantes, polinomios, exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos tiene la notable propiedad de que las derivadas de sus sumas y productos son de nuevo sumas y productos de constantes, polinomios, exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos. Debido a que la combinación lineal de derivadas $a_n y_p^{(n)} + a_{n-1} y_p^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_p' + a_0 y_p$ debe ser idéntica a $g(x)$, parece razonable suponer que y_p *tiene la misma forma que* $g(x)$.

En los dos ejemplos siguientes se ilustra el método básico.

EJEMPLO 1 Solución general usando coeficientes indeterminados

Resuelva $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$ (2)

SOLUCIÓN **Paso 1.** Se resuelve primero la ecuación homogénea asociada $y'' + 4y' - 2y = 0$. De la fórmula cuadrática se encuentra que las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 + 4m - 2 = 0$ son $m_1 = -2 - \sqrt{6}$ y $m_2 = -2 + \sqrt{6}$. Por tanto, la función complementaria es

$$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}.$$

Paso 2. Ahora, debido a que la función $g(x)$ es un polinomio cuadrático, supongamos una solución particular que también es de la forma de un polinomio cuadrático:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Se busca determinar coeficientes *específicos* A, B y C para los cuales y_p es una solución de (2). Sustituyendo y_p y las derivadas

$$y_p' = 2Ax + B \quad \text{y} \quad y_p'' = 2A$$

en la ecuación diferencial (2), se obtiene

$$y_p'' + 4y_p' - 2y_p = 2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 2x^2 - 3x + 6.$$

Como se supone que la última ecuación es una identidad, los coeficientes de los exponentes semejantes a x deben ser iguales:

igual

$$\boxed{-2A}\, x^2 + \boxed{8A - 2B}\, x + \boxed{2A + 4B - 2C} = 2x^2 - 3x + 6$$

Es decir, $\quad -2A = 2, \quad 8A - 2B = -3, \quad 2A + 4B - 2C = 6.$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen los valores $A = -1$, $B = -\frac{5}{2}$ y $C = -9$. Así, una solución particular es

$$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$

Paso 3. La solución general de la ecuación dada es

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_1 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$ ■

EJEMPLO 2 **Solución particular usando coeficientes indeterminados**

Encuentre una solución particular de $y'' - y' + y = 2 \text{ sen } 3x$.

SOLUCIÓN Una primera suposición natural para una solución particular sería A sen $3x$. Pero debido a que las derivadas sucesivas de sen $3x$ producen sen $3x$ y cos $3x$, se puede suponer una solución particular que incluye ambos términos:

$$y_p = A \cos 3x + B \text{ sen } 3x.$$

Derivando y_p y sustituyendo los resultados en la ecuación diferencial, se obtiene, después de reagrupar,

$$y_p'' - y_p' + y_p = (-8A - 3B) \cos 3x + (3A - 8B) \text{ sen } 3x = 2 \text{ sen } 3x$$

o

igual

$$\boxed{-8A - 3B} \cos 3x + \boxed{3A - 8B} \text{ sen } 3x = 0 \cos 3x + 2 \text{ sen } 3x.$$

Del sistema de ecuaciones resultante,

$$-8A - 3B = 0, \qquad 3A - 8B = 2,$$

se obtiene $A = \frac{6}{73}$ y $B = -\frac{16}{73}$. Una solución particular de la ecuación es

$$y_p = \frac{6}{73} \cos 3x - \frac{16}{73} \text{ sen } 3x.$$ ■

Como se mencionó, la forma que se supone para la solución particular y_p es una intuición educada; no es una intuición a ciegas. Esta intuición educada debe considerar no sólo los tipos de funciones que forman a $g(x)$ sino también, como se verá en el ejemplo 4, las funciones que conforman la función complementaria y_c.

EJEMPLO 3 Formando y_p por superposición

Resuelva $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$. (3)

SOLUCIÓN **Paso 1.** Primero, se encuentra que la solución de la ecuación homogénea asociada $y'' - 2y' - 3y = 0$ es $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$.

Paso 2. A continuación, la presencia de $4x - 5$ en $g(x)$ indica que la solución particular incluye un polinomio lineal. Además, debido a que la derivada del producto xe^{2x} produce $2xe^{2x}$ y e^{2x}, se supone también que la solución particular incluye tanto a xe^{2x} como a e^{2x}. En otras palabras, g es la suma de dos clases básicas de funciones:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = polinomio + exponenciales.$$

Por lo que, el principio de superposición para ecuaciones no homogéneas (teorema 4.1.7) indica que se busca una solución particular

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

donde $y_{p_1} = Ax + B$ y $y_{p_2} = Cxe^{2x} + Ee^{2x}$. Sustituyendo

$$y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + Ee^{2x}$$

en la ecuación (3) y agrupando términos semejantes, se obtiene

$$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = -3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3E)e^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x}. \quad (4)$$

De esta identidad obtenemos las cuatro expresiones

$$-3A = 4, \qquad -2A - 3B = -5, \qquad -3C = 6, \qquad 2C - 3E = 0.$$

La última ecuación en este sistema es resultado de la interpretación de que el coeficiente de e^{2x} en el miembro derecho de (4) es cero. Resolviendo, se encuentra que $A = -\frac{4}{3}$, $B = \frac{23}{9}$ $C, = -2$ y $E = -\frac{4}{3}$. Por tanto,

$$y_p = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

Paso 3. La solución general de la ecuación es

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - \left(2x + \frac{4}{3}\right)e^{2x}.$$ ■

En vista del principio de superposición (teorema 4.1.7) se puede aproximar también el ejemplo 3 desde el punto de vista de resolver dos problemas más simples. Se debe comprobar que sustituyendo

$$y_{p_1} = Ax + B \quad \text{en} \quad y'' - 2y' - 3y = 4x - 5$$

y $$y_{p_2} = Cxe^{2x} + Ee^{2x} \quad \text{en} \quad y'' - 2y' - 3y = 6xe^{2x}$$

se obtiene, a su vez, $y_{p_1} = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9}$ y $y_{p_2} = -(2x + \frac{4}{3})e^{2x}$. Entonces, una solución particular de (3) es $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$.

En el siguiente ejemplo se ilustra que algunas veces la suposición "obvia" para la forma de y_p no es una suposición correcta.

EJEMPLO 4 Una falla imprevista del método

Encuentre una solución particular de $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

SOLUCIÓN Derivando e^x no se obtienen nuevas funciones. Así, si se procede como se hizo en los ejemplos anteriores, se puede suponer razonablemente que una solución particular de la forma $y_p = Ae^x$. Pero sustituir esta expresión en la ecuación diferencial

da como resultado la expresión contradictoria $0 = 8e^x$, por lo que claramente se hizo la conjetura equivocada para y_p.

La dificultad aquí es evidente al examinar la función complementaria $y_c = c_1e^x + c_2e^{4x}$. Observe que la suposición Ae^x ya está presente en y_c. Esto significa que e^x es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada y un múltiplo constante Ae^x cuando se sustituye en la ecuación diferencial necesariamente da cero.

¿Entonces cuál debe ser la forma de y_p? Inspirados en el caso II de la sección 4.3, vemos que sí se puede encontrar una solución particular de la forma

$$y_p = Axe^x.$$

Sustituyendo $y_p' = Axe^x + Ae^x$ y $y_p'' = Axe^x + 2Ae^x$ en la ecuación diferencial y simplificando, se obtiene

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p = -3Ae^x = 8e^x.$$

De la última igualdad se ve que el valor de A ahora se determina como $A = -\frac{8}{3}$. Por tanto, una solución particular de la ecuación dada es $y_p = -\frac{8}{3}xe^x$. ■

La diferencia en los procedimientos usados en los ejemplos 1 a 3 y en el ejemplo 4 indica que se consideran dos casos. El primer caso refleja la situación en los ejemplos 1 a 3.

CASO I Ninguna función de la solución particular supuesta es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

En la tabla 4.1 se muestran algunos ejemplos específicos de $g(x)$ en (1) junto con la forma correspondiente de la solución particular. Por supuesto, se da por sentado que ninguna función de la solución particular supuesta y_p se duplica por una función en la función complementaria y_c.

TABLA 4.1 Soluciones particulares de prueba

$g(x)$	Forma de y_p
1. 1 (cualquier constante)	A
2. $5x + 7$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
5. $\operatorname{sen} 4x$	$A\cos 4x + B\operatorname{sen} 4x$
6. $\cos 4x$	$A\cos 4x + B\operatorname{sen} 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. $e^{3x}\operatorname{sen} 4x$	$Ae^{3x}\cos 4x + Be^{3x}\operatorname{sen} 4x$
11. $5x^2\operatorname{sen} 4x$	$(Ax^2 + Bx + C)\cos 4x + (Ex^2 + Fx + G)\operatorname{sen} 4x$
12. $xe^{3x}\cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x}\cos 4x + (Cx + E)e^{3x}\operatorname{sen} 4x$

EJEMPLO 5 Formas de soluciones particulares. Caso I

Determine la forma de una solución particular de

a) $y'' - 8y' + 25y = 5x^3e^{-x} - 7e^{-x}$ **b)** $y'' + 4y = x\cos x$

SOLUCIÓN **a)** Se puede escribir $g(x) = (5x^3 - 7)e^{-x}$. Usando el elemento 9 de la tabla como modelo, suponemos una solución particular de la forma

$$y_p = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + E)e^{-x}.$$

Observe que no hay duplicación entre los términos en y_p y los términos en la función complementaria $y_c = e^{4x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$.

b) La función $g(x) = x \cos x$ es similar al elemento 11 de la tabla 4.1 excepto, por supuesto, que se usa un polinomio lineal en vez de uno cuadrático y $\cos x$ y $\text{sen}\, x$ en lugar de $\cos 4x$ y $\text{sen}\, 4x$ en la forma de y_p:

$$y_p = (Ax + B)\cos x + (Cx + E)\,\text{sen}\,x.$$

Nuevamente observe que no hay duplicación de términos entre y_p y $y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \,\text{sen}\, 2x$. ■

Si $g(x)$ consiste en una suma de, digamos, m términos de la clase listada en la tabla, entonces (como en el ejemplo 3) la suposición para una solución particular y_p consiste en la suma de las formas de prueba $y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots, y_{p_m}$ correspondientes a estos términos:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m}.$$

El enunciado anterior se puede escribir de otra forma:

Regla de forma para el caso I *La forma de y_p es una combinación lineal de las funciones linealmente independientes que se generan mediante derivadas sucesivas de $g(x)$.*

EJEMPLO 6 Formación de y_p por superposición. Caso I

Determine la forma de una solución particular de

$$y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5\,\text{sen}\,2x + 7xe^{6x}.$$

SOLUCIÓN

Se supone que a $3x^2$ le corresponde $\qquad y_{p_1} = Ax^2 + Bx + C.$

Se considera que a $-5\,\text{sen}\,2x$ le corresponde $\qquad y_{p_2} = E\cos 2x + F\,\text{sen}\,2x.$

Se supone que a $7xe^{6x}$ le corresponde $\qquad y_{p_3} = (Gx + H)e^{6x}.$

Entonces la presunción para la solución particular es

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = Ax^2 + Bx + C + E\cos 2x + F\,\text{sen}\,2x + (Gx + H)e^{6x}.$$

En esta suposición ningún término duplica un término de $y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{7x}$. ■

CASO II Una función en la solución particular supuesta también es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

El siguiente ejemplo es similar al ejemplo 4.

EJEMPLO 7 Solución particular. Caso II

Encuentre una solución particular de $y'' - 2y' + y = e^x$.

SOLUCIÓN La función complementaria es $y_c = c_1e^x + c_2xe^x$. Como en el ejemplo 4, la suposición $y_p = Ae^x$ falla, puesto que es evidente de y_c que e^x es una solución de la ecuación homogénea asociada $y'' - 2y' + y = 0$. Además, no es posible encontrar una solución particular de la forma $y_p = Axe^x$, ya que el término xe^x también se duplica en y_c. A continuación se prueba

$$y_p = Ax^2e^x.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial dada se obtiene $2Ae^x = e^x$, así $A = \frac{1}{2}$. Así una solución particular es $y_p = \frac{1}{2}x^2e^x$. ■

Nuevamente suponga que $g(x)$ consiste en m términos de la clase que se proporciona en la tabla 4.1 y suponga además que la presunción usual para una solución particular es

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m},$$

donde las y_{p_i}, $i = 1, 2, \ldots, m$ son las formas de solución particular de prueba correspondientes a estos términos. Bajo las circunstancias descritas en el caso II, se puede formar la siguiente regla general.

Regla de multiplicación para el caso II *Si alguna y_{p_i} contiene términos que duplican los términos de y_c, entonces esa y_{p_i} se debe multiplicar por x^n, donde n es el entero positivo más pequeño que elimina esa duplicación.*

EJEMPLO 8 Un problema con valores iniciales

Resuelva $y'' + y = 4x + 10 \operatorname{sen} x$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 2$.

SOLUCIÓN La solución de la ecuación homogénea asociada $y'' + y = 0$ es $y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$. Debido a que $g(x) = 4x + 10 \operatorname{sen} x$ es la suma de un polinomio lineal y una función seno, la suposición normal para y_p, de las entradas 2 y 5 de la tabla 4.1, sería la suma de $y_{p_1} = Ax + B$ y $y_{p_2} = C \cos x + E \operatorname{sen} x$:

$$y_p = Ax + B + C \cos x + E \operatorname{sen} x. \tag{5}$$

Pero hay una duplicación obvia de los términos $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ en esta forma supuesta y dos términos de la función complementaria. Esta duplicación se elimina simplemente multiplicando y_{p_2} por x. En lugar de (5) ahora se usa

$$y_p = Ax + B + Cx \cos x + Ex \operatorname{sen} x. \tag{6}$$

Derivando esta expresión y sustituyendo los resultados en la ecuación diferencial, se obtiene

$$y_p'' + y_p = Ax + B - 2C \operatorname{sen} x + 2E \cos x = 4x + 10 \operatorname{sen} x,$$

y por tanto $A = 4$, $B = 0$, $-2C = 10$, y $2E = 0$. Las soluciones del sistema son inmediatas: $A = 4$, $B = 0$, $C = -5$, y $E = 0$. Por tanto de la ecuación (6) se obtiene $y_p = 4x - 5x \cos x$. La solución general de la ecuación es

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 4x - 5x \cos x.$$

Ahora se aplican las condiciones iniciales prescritas a la solución general de la ecuación. Primero, $y(\pi) = c_1 \cos \pi + c_2 \operatorname{sen} \pi + 4\pi - 5\pi \cos \pi = 0$ produce $c_1 = 9\pi$ puesto que $\cos \pi = -1$ y $\operatorname{sen} \pi = 0$. Ahora, de la derivada

$$y' = -9\pi \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + 4 + 5x \operatorname{sen} x - 5 \cos x$$

y

$$y'(\pi) = -9\pi \operatorname{sen} \pi + c_2 \cos \pi + 4 + 5\pi \operatorname{sen} \pi - 5 \cos \pi = 2$$

encontramos $c_2 = 7$. La solución del problema con valores iniciales es entonces

$$y = 9\pi \cos x + 7 \operatorname{sen} x + 4x - 5x \cos x.$$

■

EJEMPLO 9 Uso de la regla de multiplicación

Resuelva $y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$.

SOLUCIÓN La función complementaria es $y_c = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$. Y así, con base en los elementos 3 y 7 de la tabla 4.1, la suposición usual para una solución particular sería

$$y_p = \underbrace{Ax^2 + Bx + C}_{y_{p_1}} + \underbrace{Ee^{3x}}_{y_{p_2}}.$$

La inspección de estas funciones muestra que un término en y_{p_2} se duplica en y_c. Si multiplicamos y_{p_2} por x, se nota que el término xe^{3x} aún es parte de y_c. Pero multiplicando y_{p_2} por x^2 se eliminan las duplicaciones. Así la forma operativa de una solución particular es

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Ex^2e^{3x}.$$

Derivando esta última forma y sustituyendo en la ecuación diferencial, agrupando términos semejantes se obtiene

$$y_p'' - 6y_p' + 9y_p = 9Ax^2 + (-12A + 9B)x + 2A - 6B + 9C + 2Ee^{3x} = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}.$$

De esta identidad se tiene que $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{8}{9}$, $C = \frac{2}{3}$ y $E = -6$. Por tanto la solución general $y = y_c + y_p$ es $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{3} - 6x^2e^{3x}$. ■

EJEMPLO 10 ED de tercer orden. Caso I

Resuelva $y''' + y'' = e^x \cos x$.

SOLUCIÓN De la ecuación característica $m^3 + m^2 = 0$ encontramos que $m_1 = m_2 = 0$ y $m_3 = -1$. Así la función complementaria de la ecuación es $y_c = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}$. Con $g(x) = e^x \cos x$, se ve de la entrada 10 de la tabla 4.1 que se debe suponer

$$y_p = Ae^x \cos x + Be^x \operatorname{sen} x.$$

Debido a que no hay funciones en y_p que dupliquen las funciones de la solución complementaria, procedemos de la manera usual. De

$$y_p''' + y_p'' = (-2A + 4B)e^x \cos x + (-4A - 2B)e^x \operatorname{sen} x = e^x \cos x$$

se obtiene $-2A + 4B = 1$ y $-4A - 2B = 0$. De este sistema se obtiene $A = -\frac{1}{10}$ y $B = \frac{1}{5}$, así que una solución particular es $y_p = -\frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x \operatorname{sen} x$. La solución general de la ecuación es

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} - \frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x \operatorname{sen} x.$$ ■

EJEMPLO 11 ED de cuarto orden. Caso II

Determine la forma de una solución particular de $y^{(4)} + y''' = 1 - x^2e^{-x}$.

SOLUCIÓN Comparando $y_c = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x}$ con la suposición normal para una solución particular

$$y_p = \underbrace{A}_{y_{p_1}} + \underbrace{Bx^2e^{-x} + Cxe^{-x} + Ee^{-x}}_{y_{p_2}},$$

vemos que las duplicaciones entre y_c y y_p se eliminan cuando y_{p_1}, se multiplica por x^3 y y_{p_2} se multiplica por x. Así la suposición correcta para una solución particular es $y_p = Ax^3 + Bx^3e^{-x} + Cx^2e^{-x} + Exe^{-x}$. ■

COMENTARIOS

i) En los problemas 27 a 36 de los ejercicios 4.4 se pide resolver problemas con valores iniciales y en los problemas 37 a 40 se pide resolver problemas con valores en la frontera. Como se muestra en el ejemplo 8, asegúrese de aplicar las condiciones iniciales o condiciones en la frontera a la solución general $y = y_c + y_p$. Los estudiantes con frecuencia cometen el error de aplicar estas condiciones sólo a la función complementaria y_c porque ésta es la parte de la solución que contiene las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

ii) De la "Regla de la forma para el caso I" de la página 145 de esta sección, se ve por qué el método de coeficientes indeterminados no es muy adecuado para ED lineales no homogéneas cuando la función de entrada $g(x)$ es algo distinta de uno de los cuatro tipos básicos resaltados en color azul en la página 141. Por ejemplo, si $P(x)$ es un polinomio, entonces la derivación continua de $P(x)e^{\alpha x}$ sen βx genera un conjunto independiente que contiene sólo un número *finito* de funciones, todas del mismo tipo, en particular, un polinomio multiplicado por $e^{\alpha x}$ sen βx o un polinomio multiplicado por $e^{\alpha x}$ cos βx. Por otro lado, la derivación sucesiva de funciones de entrada como $g(x) = \ln x$ o $g(x) = \tan^{-1} x$ genera un conjunto independiente que contiene un número *infinito* de funciones:

$$\textit{derivadas de } \ln x\text{: } \frac{1}{x}, \frac{-1}{x^2}, \frac{2}{x^3}, \ldots,$$

$$\textit{derivadas de } \tan^{-1} x\text{: } \frac{1}{1+x^2}, \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}, \ldots .$$

EJERCICIOS 4.4

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-5.

En los problemas 1 a 26 resuelva la ecuación diferencial dada usando coeficientes indeterminados.

1. $y'' + 3y' + 2y = 6$
2. $4y'' + 9y = 15$
3. $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$
4. $y'' + y' - 6y = 2x$
5. $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$
6. $y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$
7. $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$
8. $4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$
9. $y'' - y' = -3$
10. $y'' + 2y' = 2x + 5 - e^{-2x}$
11. $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{x/2}$
12. $y'' - 16y = 2e^{4x}$
13. $y'' + 4y = 3 \text{ sen } 2x$
14. $y'' - 4y = (x^2 - 3) \text{ sen } 2x$
15. $y'' + y = 2x \text{ sen } x$
16. $y'' - 5y' = 2x^3 - 4x^2 - x + 6$
17. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$
18. $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}(\cos x - 3 \text{ sen } x)$
19. $y'' + 2y' + y = \text{sen } x + 3 \cos 2x$
20. $y'' + 2y' - 24y = 16 - (x + 2)e^{4x}$
21. $y''' - 6y'' = 3 - \cos x$
22. $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x}$
23. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^x$
24. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 5 - e^x + e^{2x}$
25. $y^{(4)} + 2y'' + y = (x - 1)^2$
26. $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$

En los problemas 27 a 36 resuelva el problema con valores iniciales dado.

27. $y'' + 4y = -2, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}, y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2$
28. $2y'' + 3y' - 2y = 14x^2 - 4x - 11, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$
29. $5y'' + y' = -6x, \quad y(0) = 0, y'(0) = -10$
30. $y'' + 4y' + 4y = (3 + x)e^{-2x}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 5$
31. $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}, \quad y(0) = -3, y'(0) = 1$

32. $y'' - y = \cosh x, \quad y(0) = 2, y'(0) = 12$

33. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \omega t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 0$

34. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 0$

35. $y''' - 2y'' + y' = 2 - 24e^x + 40e^{5x}, \quad y(0) = \frac{1}{2},$
$y'(0) = \frac{5}{2}, y''(0) = -\frac{9}{2}$

36. $y''' + 8y = 2x - 5 + 8e^{-2x}, \quad y(0) = -5, y'(0) = 3,$
$y''(0) = -4$

En los problemas 37 a 40 resuelva el problema con valores en la frontera dado.

37. $y'' + y = x^2 + 1, \quad y(0) = 5, y(1) = 0$

38. $y'' - 2y' + 2y = 2x - 2, \quad y(0) = 0, y(\pi) = \pi$

39. $y'' + 3y = 6x, \quad y(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0$

40. $y'' + 3y = 6x, \quad y(0) + y'(0) = 0, y(1) = 0$

En los problemas 41 y 42 resuelva el problema con valores iniciales dado en el que la función de entrada $g(x)$ es discontinua. [*Sugerencia*: Resuelva cada problema en dos intervalos y después encuentre una solución tal que y y y' sean continuas en $x = \pi/2$ (problema 41) y en $x = \pi$ (problema 42).]

41. $y'' + 4y = g(x), \quad y(0) = 1, y'(0) = 2,$ donde

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ 0, & x > \pi/2 \end{cases}$$

42. $y'' - 2y' + 10y = g(x), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0,$ donde

$$g(x) = \begin{cases} 20, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

Problemas para analizar

43. Considere la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = e^{kx}$, donde a, b, c y k son constantes. La ecuación auxiliar de la ecuación homogénea asociada es $am^2 + bm + c = 0$.

a) Si k no es una raíz de la ecuación auxiliar, demuestre que se puede encontrar una solución particular de la forma $y_p = Ae^{kx}$, donde $A = 1/(ak^2 + bk + c)$.

b) Si k es una raíz de la ecuación auxiliar de multiplicidad uno, muestre que se puede encontrar una solución particular de la forma $y_p = Axe^{kx}$, donde $A = 1/(2ak + b)$. Explique cómo se sabe que $k \neq -b/2a$.

c) Si k es una raíz de la ecuación auxiliar de multiplicidad dos, demuestre que podemos encontrar una solución particular de la forma $y = Ax^2e^{kx}$, donde $A = 1/(2a)$.

44. Explique cómo se puede usar el método de esta sección para encontrar una solución particular de $y'' + y = \operatorname{sen} x \cos 2x$. Lleve a cabo su idea.

45. Sin resolver, relacione una curva solución de $y'' + y = f(x)$ que se muestra en la figura con una de las siguientes funciones:

i) $f(x) = 1$, *ii)* $f(x) = e^{-x}$,
iii) $f(x) = e^x$, *iv)* $f(x) = \operatorname{sen} 2x$,
v) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$, *vi)* $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Analice brevemente su razonamiento.

a)

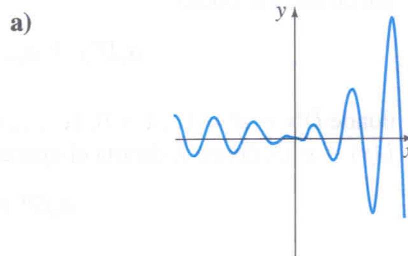


FIGURA 4.4.1 Curva solución.

b)

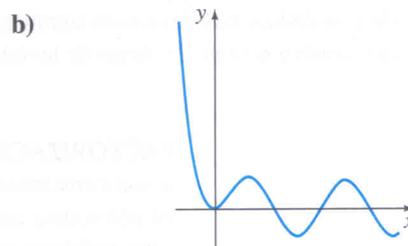


FIGURA 4.4.2 Curva solución.

c)

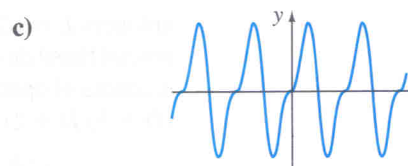


FIGURA 4.4.3 Curva solución.

d)

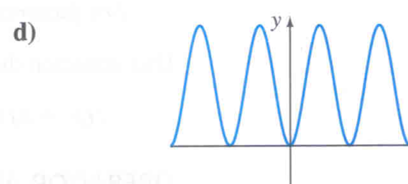


FIGURA 4.4.4 Curva solución.

Tarea para el laboratorio de computación

En los problemas 46 y 47 determine una solución particular de la ecuación diferencial dada. Use un SAC como ayuda para realizar las derivadas, simplificaciones y álgebra.

46. $y'' - 4y' + 8y = (2x^2 - 3x)e^{2x} \cos 2x + (10x^2 - x - 1)e^{2x} \operatorname{sen} 2x$

47. $y^{(4)} + 2y'' + y = 2 \cos x - 3x \operatorname{sen} x$

4.5 COEFICIENTES INDETERMINADOS: MÉTODO DEL ANULADOR

REPASO DE MATERIAL

- Repaso de teoremas 4.1.6 y 4.1.7 (sección 4.1).

INTRODUCCIÓN En la sección 4.1 vimos que una ecuación diferencial de n-ésimo orden se puede escribir como

$$a_nD^ny + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_1Dy + a_0y = g(x), \tag{1}$$

donde $D^ky = d^ky/dx^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Cuando es adecuado, la ecuación (1) también se escribe como $L(y) = g(x)$, donde L denota el operador diferencial o polinomial, lineal de n-ésimo orden

$$a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0. \tag{2}$$

La notación de operador no sólo es una abreviatura útil, sino que en un nivel muy práctico la aplicación de operadores diferenciales permite justificar las reglas un poco abrumadoras para determinar la forma de solución particular y_p presentada en la sección anterior. En esta sección no hay reglas especiales; la forma de y_p se deduce casi de manera automática una vez que se encuentra un operador diferencial lineal adecuado que *anula* a $g(x)$ en (1). Antes de investigar cómo se realiza esto, es necesario analizar dos conceptos.

FACTORIZACIÓN DE OPERADORES Cuando los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales, un operador diferencial lineal (1) se puede factorizar siempre el polinomio característico $a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1m + a_0$ sea factorizable. En otras palabras, si r_1 es una raíz de la ecuación auxiliar

$$a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1m + a_0 = 0,$$

entonces $L = (D - r_1)\,P(D)$, donde la expresión polinomial $P(D)$ es un operador diferencial lineal de orden $n - 1$. Por ejemplo, si se trata a D como una cantidad algebraica, entonces el operador $D^2 + 5D + 6$ se puede factorizar como $(D + 2)(D + 3)$ o como $(D + 3)(D + 2)$. Así si una función $y = f(x)$ tiene una segunda derivada, entonces

$$(D^2 + 5D + 6)y = (D + 2)(D + 3)y = (D + 3)(D + 2)y.$$

Esto muestra una propiedad general:

Los factores de un operador diferencial con coeficientes constantes conmutan.

Una ecuación diferencial tal como $y'' + 4y' + 4y = 0$ se escribe como

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0 \quad \text{o} \quad (D + 2)(D + 2)y = 0 \quad \text{o} \quad (D + 2)^2y = 0.$$

OPERADOR ANULADOR Si L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes y f es una función suficientemente derivable tal que

$$L(f(x)) = 0,$$

entonces se dice que L es un **anulador** de la función. Por ejemplo, D anula una función constante $y = k$ puesto que $Dk = 0$. El operador diferencial D^2 anula la función $y = x$ puesto que la primera y la segunda derivada de x son 1 y 0, respectivamente. De manera similar, $D^3x^2 = 0$, etcétera.

El operador diferencial D^n anula cada una de las funciones

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad \ldots, \quad x^{n-1}. \tag{3}$$

Como una consecuencia inmediata de (3) y el hecho de que la derivación se puede hacer término a término, un polinomio

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} \tag{4}$$

se anula al encontrar un operador que aniquile la potencia más alta de x.

Las funciones que se anulan por un operador diferencial lineal de n-ésimo orden L son simplemente aquellas funciones que se obtienen de la solución general de la ecuación diferencial homogénea $L(y) = 0$.

El operador diferencial $(D - \alpha)^n$ anula cada una de las funciones

$$e^{\alpha x}, \quad xe^{\alpha x}, \quad x^2e^{\alpha x}, \quad \ldots, \quad x^{n-1}e^{\alpha x}. \tag{5}$$

Para ver esto, observe que la ecuación auxiliar de la ecuación homogénea $(D - \alpha)^n\, y = 0$ es $(m - \alpha)^n = 0$. Puesto que α es una raíz de multiplicidad n, la solución general es

$$y = c_1e^{\alpha x} + c_2xe^{\alpha x} + \cdots + c_nx^{n-1}e^{\alpha x}. \tag{6}$$

EJEMPLO 1 Operadores anuladores

Encuentre un operador diferencial que anule la función dada.

a) $1 - 5x^2 + 8x^3$ **b)** e^{-3x} **c)** $4e^{2x} - 10xe^{2x}$

SOLUCIÓN **a)** De (3) se sabe que $D^4x^3 = 0$, así de (4) se tiene que

$$D^4(1 - 5x^2 + 8x^3) = 0.$$

b) De (5), con $\alpha = -3$ y $n = 1$, vemos que

$$(D + 3)e^{-3x} = 0.$$

c) De (5) y (6), con $\alpha = 2$ y $n = 2$, se tiene que

$$(D - 2)^2(4e^{2x} - 10xe^{2x}) = 0.$$

■

Cuando α y β, $\beta > 0$ son números reales, la fórmula cuadrática revela que $[m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2)]^n = 0$ tiene raíces complejas $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, ambas de multiplicidad n. Del análisis al final de la sección 4.3, se tiene el siguiente resultado.

El operador diferencial $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n$ anula cada una de las funciones

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \ldots, \quad x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ &e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \quad xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \quad x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \quad \ldots, \quad x^{n-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x. \end{aligned} \tag{7}$$

EJEMPLO 2 Operador anulador

Encuentre un operador diferencial que anule $5e^{-x}\cos 2x - 9e^{-x}\operatorname{sen} 2x$.

SOLUCIÓN La inspección de las funciones $e^{-x}\cos 2x$ y $e^{-x}\operatorname{sen} 2x$ muestra que $\alpha = -1$ y $\beta = 2$. Por tanto, de la ecuación (7) se concluye que $D^2 + 2D + 5$ anulará *cualquier* función que sea combinación lineal de estas funciones tales como $5e^{-x}\cos 2x - 9e^{-x}\operatorname{sen} 2x$. ■

Cuando $\alpha = 0$ y $n = 1$, un caso especial de (7) es

$$(D^2 + \beta^2)\begin{cases}\cos \beta x \\ \operatorname{sen} \beta x\end{cases} = 0. \tag{8}$$

Por ejemplo $D^2 + 16$ anulará cualquier combinación lineal de sen $4x$ y cos $4x$.

Con frecuencia estamos interesados en anular la suma de dos o más funciones. Como acabamos de ver en los ejemplos 1 y 2, si L es un operador diferencial lineal tal que $L(y_1) = 0$ y $L(y_2) = 0$, entonces L anulará la combinación lineal $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Esta es una consecuencia directa del teorema 4.1.2. Supongamos ahora que L_1 y L_2 son operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes tales que L_1 anula a $y_1(x)$ y L_2 anula a $y_2(x)$, pero $L_1(y_2) \neq 0$ y $L_2(y_1) \neq 0$. Entonces el *producto* de los operadores diferenciales L_1L_2 anula la suma $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Esto se puede demostrar fácilmente, usando la linealidad y el hecho de que $L_1L_2 = L_2L_1$:

$$\begin{aligned} L_1L_2(y_1 + y_2) &= L_1L_2(y_1) + L_1L_2(y_2) \\ &= L_2L_1(y_1) + L_1L_2(y_2) \\ &= L_2[\underbrace{L_1(y_1)}_{\text{cero}}] + L_1[\underbrace{L_2(y_2)}_{\text{cero}}] = 0. \end{aligned}$$

Por ejemplo, sabemos de (3) que D^2 anula a $7 - x$ y de (8) que $D^2 + 16$ anula a sen $4x$. Por tanto el producto de operadores $D^2(D^2 + 16)$ anulará la combinación lineal $7 - x + 6$ sen $4x$.

NOTA El operador diferencial que anula una función no es único. Vimos en el inciso b) del ejemplo 1 que $D + 3$ anula a e^{-3x}, pero también a los operadores diferenciales de orden superior siempre y cuando $D + 3$ sea uno de los factores del operador. Por ejemplo $(D + 3)(D + 1)$, $(D + 3)^2$ y $D^3(D + 3)$ todos anulan a e^{-3x}. (Compruebe esto.) Como algo natural, cuando se busca un anulador diferencial para una función $y = f(x)$, se quiere que el operador de *mínimo orden posible* haga el trabajo.

COEFICIENTES INDETERMINADOS Lo anterior lleva al punto del análisis previo. Suponga que $L(y) = g(x)$ es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y que la entrada $g(x)$ consiste en sumas y productos finitos de las funciones listadas en (3), (5) y (7), es decir, $g(x)$ es una combinación lineal de funciones de la forma

$$k \text{ (constante)}, \quad x^m, \quad x^m e^{\alpha x}, \quad x^m e^{\alpha x}\cos \beta x, \quad \text{y} \quad x^m e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,$$

donde m es un entero no negativo y α y β son números reales. Ahora se sabe que una función tal como $g(x)$ puede ser anulada por un operador diferencial L_1 de menor orden, que es producto de los operadores D^n, $(D - \alpha)^n$ y $(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2)^n$. Al aplicar L_1 a ambos lados de la ecuación $L(y) = g(x)$ se obtiene $L_1L(y) = L_1(g(x)) = 0$. Al resolver la ecuación *homogénea de orden superior* $L_1L(y) = 0$, se descubre la *forma* de una solución particular y_p para la ecuación original *no homogénea* $L(y) = g(x)$. Entonces sustituimos esta forma supuesta en $L(y) = g(x)$ para encontrar una solución particular explícita. Este procedimiento para determinar y_p, llamado **método de los coeficientes indeterminados**, se ilustra a continuación en varios ejemplos.

Antes de proceder, recuerde que la solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea $L(y) = g(x)$ es $y = y_c + y_p$ donde y_c es la función complementaria, es decir, la solución general de la ecuación homogénea asociada $L(y) = 0$. La solución general de cada ecuación $L(y) = g(x)$ se define en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 3 Solución general usando coeficientes indeterminados

Resuelva $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$. (9)

SOLUCIÓN **Paso 1.** Primero, resolvemos la ecuación homogénea $y'' + 3y' + 2y = 0$. Entonces, de la ecuación auxiliar $m^2 + 3m + 2 = (m + 1)(m + 2) = 0$ se encuentra $m_1 = -1$ y $m_2 = -2$ y así, la función complementaria es

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}.$$

Paso 2. Ahora, puesto que $4x^2$ se anula con el operador diferencial D^3, se ve que $D^3(D^2 + 3D + 2)y = 4D^3x^2$ es lo mismo que

$$D^3(D^2 + 3D + 2)y = 0. \tag{10}$$

La ecuación auxiliar de la ecuación de quinto orden en (10),

$$m^3(m^2 + 3m + 2) = 0 \quad \text{o} \quad m^3(m + 1)(m + 2) = 0,$$

tiene raíces $m_1 = m_2 = m_3 = 0, m_4 = -1$, y $m_5 = -2$. Así que su solución general debe ser

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \boxed{c_4e^{-x} + c_5e^{-2x}} \tag{11}$$

Los términos del cuadro sombreado en (11) constituyen la función complementaria de la ecuación original (9). Se puede argumentar que una solución particular y_p, de (9) también debe satisfacer la ecuación (10). Esto significa que los términos restantes en (11) deben tener la forma básica de y_p:

$$y_p = A + Bx + Cx^2, \tag{12}$$

donde, por conveniencia, hemos remplazado c_1, c_2 y c_3 por A, B y C, respectivamente. Para que (12) sea una solución particular de (9), es necesario encontrar coeficientes específicos A, B y C. Derivando la ecuación (12), se tiene que

$$y_p' = B + 2Cx, \qquad y_p'' = 2C,$$

y sustituyendo esto en la ecuación (9) se obtiene

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 2C + 3B + 6Cx + 2A + 2Bx + 2Cx^2 = 4x^2.$$

Como se supone que la última ecuación es una identidad los coeficientes de potencias semejantes de x deben ser iguales:

equal

$$\boxed{2C}\,x^2 + \boxed{2B + 6C}\,x + \boxed{2A + 3B + 2C} = 4x^2 + 0x + 0.$$

Es decir $\quad 2C = 4, \quad 2B + 6C = 0, \quad 2A + 3B + 2C = 0.$ (13)

Resolviendo las ecuaciones de (13) se obtiene $A = 7$, $B = -6$ y $C = 2$. Por tanto $y_p = 7 - 6x + 2x^2$.

Paso 3. La solución general de la ecuación en (9) es $y = y_c + y_p$ o

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + 7 - 6x + 2x^2.$$

■

EJEMPLO 4 Solución general usando coeficientes indeterminados

Resuelva $y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4 \operatorname{sen} x.$ (14)

SOLUCIÓN **Paso 1.** La ecuación auxiliar para la ecuación homogénea asociada $y'' - 3y' = 0$ es $m^2 - 3m = m(m-3) = 0$, y por tanto, $y_c = c_1 + c_2e^{3x}$.

Paso 2. Ahora, puesto que $(D-3)e^{3x} = 0$ y $(D^2+1) \operatorname{sen} x = 0$, se aplica el operador diferencial $(D-3)(D^2+1)$ a ambos lados de la ecuación (14):

$$(D-3)(D^2+1)(D^2-3D)y = 0. \qquad (15)$$

La ecuación auxiliar de (15) es:

$$(m-3)(m^2+1)(m^2-3m) = 0 \quad \text{o} \quad m(m-3)^2(m^2+1) = 0.$$

Así $$y = \boxed{c_1 + c_2e^{3x}} + c_3xe^{3x} + c_4\cos x + c_5 \operatorname{sen} x.$$

Una vez que se excluye la combinación lineal de términos dentro del cuadro que corresponde a y_c se obtiene la forma de y_p:

$$y_p = Axe^{3x} + B\cos x + C \operatorname{sen} x.$$

Sustituyendo y_p en (14) y simplificando, se obtiene

$$y_p'' - 3y_p' = 3Ae^{3x} + (-B - 3C)\cos x + (3B - C)\operatorname{sen} x = 8e^{3x} + 4 \operatorname{sen} x.$$

Igualando los coeficientes se obtiene que $3A = 8$, $-B - 3C = 0$ y $3B - C = 4$. Se encuentra que $A = \frac{8}{3}$, $B = \frac{6}{5}$, y $C = -\frac{2}{5}$ y por tanto,

$$y_p = \frac{8}{3}xe^{3x} + \frac{6}{5}\cos x - \frac{2}{5}\operatorname{sen} x.$$

Paso 3. Entonces la solución general de (14) es

$$y = c_1 + c_2e^{3x} + \frac{8}{3}xe^{3x} + \frac{6}{5}\cos x - \frac{2}{5}\operatorname{sen} x.$$ ■

EJEMPLO 5 Solución general usando coeficientes indeterminados

Resuelva $y'' + y = x\cos x - \cos x.$ (16)

SOLUCIÓN La función complementaria es $y_c = c_1\cos x + c_2 \operatorname{sen} x$. Ahora al comparar $\cos x$ y $x\cos x$ con las funciones del primer renglón de (7), vemos que $\alpha = 0$ y $n = 1$ y así $(D^2+1)^2$ es un anulador para el miembro derecho de la ecuación en (16). Aplicando este operador a la ecuación diferencial se obtiene

$$(D^2+1)^2(D^2+1)y = 0 \quad \text{o} \quad (D^2+1)^3y = 0.$$

Puesto que i y $-i$ son raíces complejas de multiplicidad 3 de la última ecuación auxiliar, se concluye que

$$y = \boxed{c_1\cos x + c_2 \operatorname{sen} x} + c_3x\cos x + c_4x \operatorname{sen} x + c_5x^2\cos x + c_6x^2 \operatorname{sen} x.$$

Sustituyendo

$$y_p = Ax\cos x + Bx \operatorname{sen} x + Cx^2\cos x + Ex^2 \operatorname{sen} x$$

en (16) y simplificando:

$$\begin{aligned} y_p'' + y_p &= 4Ex\cos x - 4Cx \operatorname{sen} x + (2B + 2C)\cos x + (-2A + 2E)\operatorname{sen} x \\ &= x\cos x - \cos x. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes se obtienen las ecuaciones $4E = 1$, $-4C = 0$, $2B + 2C = -1$, y $-2A + 2E = 0$, de las que encontramos $A = \frac{1}{4}$ $B = -\frac{1}{2}$, $C = 0$ y $E = \frac{1}{4}$. Por tanto la solución general de (16) es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{4} x \cos x - \frac{1}{2} x \operatorname{sen} x + \frac{1}{4} x^2 \operatorname{sen} x.$$ ■

EJEMPLO 6 Forma de una solución particular

Determine la forma de una solución particular para

$$y'' - 2y' + y = 10e^{-2x} \cos x. \tag{17}$$

SOLUCIÓN La función complementaria de la ecuación dada es $y_c = c_1e^x + c_2xe^x$.

Ahora de (7), con $\alpha = -2$, $\beta = 1$ y $n = 1$, se sabe que

$$(D^2 + 4D + 5)e^{-2x} \cos x = 0.$$

Aplicando el operador $D^2 + 4D + 5$ a (17), se obtiene

$$(D^2 + 4D + 5)(D^2 - 2D + 1)y = 0. \tag{18}$$

Puesto que las raíces de la ecuación auxiliar de (18) son $-2 - i$, $-2 + i$, 1 y 1, vemos de

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x} \cos x + c_4e^{-2x} \operatorname{sen} x$$

que una solución particular de (17) se puede encontrar con la forma

$$y_p = Ae^{-2x} \cos x + Be^{-2x} \operatorname{sen} x.$$ ■

EJEMPLO 7 Forma de una solución particular

Determine la forma de una solución particular para

$$y''' - 4y'' + 4y' = 5x^2 - 6x + 4x^2e^{2x} + 3e^{5x}. \tag{19}$$

SOLUCIÓN Observe que

$$D^3(5x^2 - 6x) = 0, \quad (D - 2)^3x^2e^{2x} = 0 \quad \text{y} \quad (D - 5)e^{5x} = 0.$$

Por tanto, $D^3(D - 2)^3(D - 5)$ aplicado a (19), se obtiene

$$D^3(D - 2)^3(D - 5)(D^3 - 4D^2 + 4D)y = 0$$

o

$$D^4(D - 2)^5(D - 5)y = 0.$$

Las raíces de la ecuación auxiliar para la última ecuación diferencial son 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2 y 5. Por tanto,

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5e^{2x} + c_6xe^{2x} + c_7x^2e^{2x} + c_8x^3e^{2x} + c_9x^4e^{2x} + c_{10}e^{5x}. \tag{20}$$

Debido a que la combinación lineal $c_1 + c_5e^{2x} + c_6xe^{2x}$ corresponde a la función complementaria de (19), los términos restantes en (20) dan la forma de una solución particular de la ecuación diferencial:

$$y_p = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Ex^2e^{2x} + Fx^3e^{2x} + Gx^4e^{2x} + He^{5x}.$$ ■

RESUMEN DEL MÉTODO Por conveniencia se resume el método de coeficientes indeterminados como sigue.

COEFICIENTES INDETERMINADOS: MÉTODO DEL ANULADOR

La ecuación diferencial $L(y) = g(x)$ tiene coeficientes constantes y la función $g(x)$ consiste en sumas y productos finitos de constantes, polinomios, funciones exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos.

i) Encuentre la función complementaria y_c para la ecuación homogénea $L(y) = 0$.

ii) Opere ambos lados de la ecuación no homogénea $L(y) = g(x)$ con un operador diferencial L_1 que anula la función $g(x)$.

iii) Determine la solución general de la ecuación diferencial homogénea de orden superior $L_1L(y) = 0$.

iv) Elimine de la solución del paso *iii)* los términos que se duplican en la solución complementaria y_c encontrada en el paso *i)*. Forme una combinación lineal y_p de los términos restantes. Esta es la forma de una solución particular de $L(y) = g(x)$.

v) Sustituya y_p encontrada en el paso *iv)* en $L(y) = g(x)$. Iguale los coeficientes de las distintas funciones en cada lado de la igualdad y resuelva el sistema resultante de ecuaciones para determinar los coeficientes desconocidos de y_p.

vi) Con la solución particular encontrada en el paso *v)*, forme la solución general $y = y_c + y_p$ de la ecuación diferencial dada.

COMENTARIOS

El método de coeficientes indeterminados no es aplicable a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables ni tampoco es aplicable a ecuaciones lineales con coeficientes constantes cuando $g(x)$ es una función tal que

$$g(x) = \ln x, \qquad g(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \tan x, \qquad g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x,$$

etcétera. Las ecuaciones diferenciales en las que la entrada $g(x)$ es una función de esta última clase se consideran en la siguiente sección.

EJERCICIOS 4.5

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-5.

En los problemas 1 a 10 escriba la ecuación diferencial en la forma $L(y) = g(x)$, donde L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes. Si es posible, factorice L.

1. $9y'' - 4y = \operatorname{sen} x$
2. $y'' - 5y = x^2 - 2x$
3. $y'' - 4y' - 12y = x - 6$
4. $2y'' - 3y' - 2y = 1$
5. $y''' + 10y'' + 25y' = e^x$
6. $y''' + 4y' = e^x \cos 2x$
7. $y''' + 2y'' - 13y' + 10y = xe^{-x}$
8. $y''' + 4y'' + 3y' = x^2 \cos x - 3x$
9. $y^{(4)} + 8y' = 4$
10. $y^{(4)} - 8y'' + 16y = (x^3 - 2x)e^{4x}$

En los problemas 11 a 14 compruebe que el operador diferencial anula las funciones indicadas.

11. D^4; $y = 10x^3 - 2x$
12. $2D - 1$; $y = 4e^{x/2}$
13. $(D - 2)(D + 5)$; $y = e^{2x} + 3e^{-5x}$
14. $D^2 + 64$; $y = 2 \cos 8x - 5 \operatorname{sen} 8x$

En los problemas 15 a 26 determine el operador diferencial lineal que anula la función dada.

15. $1 + 6x - 2x^3$
16. $x^3(1 - 5x)$
17. $1 + 7e^{2x}$
18. $x + 3xe^{6x}$
19. $\cos 2x$
20. $1 + \operatorname{sen} x$
21. $13x + 9x^2 - \operatorname{sen} 4x$
22. $8x - \operatorname{sen} x + 10 \cos 5x$
23. $e^{-x} + 2xe^x - x^2e^x$
24. $(2 - e^x)^2$
25. $3 + e^x \cos 2x$
26. $e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{2x} \cos x$

En los problemas 27 a 34 determine las funciones linealmente independientes que anulan el operador diferencial dado.

27. D^5

28. $D^2 + 4D$

29. $(D - 6)(2D + 3)$

30. $D^2 - 9D - 36$

31. $D^2 + 5$

32. $D^2 - 6D + 10$

33. $D^3 - 10D^2 + 25D$

34. $D^2(D - 5)(D - 7)$

En los problemas 35 a 64 resuelva la ecuación diferencial dada usando coeficientes indeterminados.

35. $y'' - 9y = 54$

36. $2y'' - 7y' + 5y = -29$

37. $y'' + y' = 3$

38. $y''' + 2y'' + y' = 10$

39. $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$

40. $y'' + 3y' = 4x - 5$

41. $y''' + y'' = 8x^2$

42. $y'' - 2y' + y = x^3 + 4x$

43. $y'' - y' - 12y = e^{4x}$

44. $y'' + 2y' + 2y = 5e^{6x}$

45. $y'' - 2y' - 3y = 4e^x - 9$

46. $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x} + 2x$

47. $y'' + 25y = 6 \operatorname{sen} x$

48. $y'' + 4y = 4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x - 8$

49. $y'' + 6y' + 9y = -xe^{4x}$

50. $y'' + 3y' - 10y = x(e^x + 1)$

51. $y'' - y = x^2 e^x + 5$

52. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}$

53. $y'' - 2y' + 5y = e^x \operatorname{sen} x$

54. $y'' + y' + \frac{1}{4}y = e^x(\operatorname{sen} 3x - \cos 3x)$

55. $y'' + 25y = 20 \operatorname{sen} 5x$

56. $y'' + y = 4 \cos x - \operatorname{sen} x$

57. $y'' + y' + y = x \operatorname{sen} x$

58. $y'' + 4y = \cos^2 x$

59. $y''' + 8y'' = -6x^2 + 9x + 2$

60. $y''' - y'' + y' - y = xe^x - e^{-x} + 7$

61. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$

62. $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$

63. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x + 1$

64. $y^{(4)} - 4y'' = 5x^2 - e^{2x}$

En los problemas 65 a 72 resuelva el problema con valores iniciales.

65. $y'' - 64y = 16, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

66. $y'' + y' = x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

67. $y'' - 5y' = x - 2, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2$

68. $y'' + 5y' - 6y = 10e^{2x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$

69. $y'' + y = 8 \cos 2x - 4 \operatorname{sen} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

70. $y''' - 2y'' + y' = xe^x + 5, \quad y(0) = 2, y'(0) = 2, y''(0) = -1$

71. $y'' - 4y' + 8y = x^3, \quad y(0) = 2, y'(0) = 4$

72. $y^{(4)} - y''' = x + e^x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 0$

Problemas para analizar

73. Suponga que L es un operador diferencial lineal que se factoriza pero que tiene coeficientes variables. ¿Conmutan los factores de L? Defienda su respuesta.

4.6 VARIACIÓN DE PARÁMETROS

REPASO DE MATERIAL

- La variación de parámetros se introdujo por primera vez en la sección 2.3 y se usó de nuevo en la sección 4.2. Se recomienda dar un repaso a estas secciones.

INTRODUCCIÓN El procedimiento que se utiliza para encontrar una solución particular y_p de una ecuación diferencial lineal de primer orden en un intervalo es también aplicable a una ED de orden superior. Para adaptar el método de **variación de parámetros** a una ecuación diferencial de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \tag{1}$$

comenzamos por escribir la ecuación en su forma estándar

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{2}$$

dividiendo entre el coeficiente principal $a_2(x)$. La ecuación (2) es la análoga de segundo orden de la forma estándar de una ecuación lineal de primer orden: $dy/dx + P(x)y = f(x)$. En (2) se supone que $P(x)$, $Q(x)$ y $f(x)$ son continuas en algún intervalo común I. Como ya hemos visto en la sección 4.3, no hay dificultad para obtener la función complementaria y_c, la solución general de la ecuación homogénea asociada de (2), cuando los coeficientes son constantes.

SUPOSICIONES Correspondiendo con la suposición $y_p = u_1(x)y_1(x)$ que se usó en la sección 2.3 para encontrar una solución particular y_p de $dy/dx + P(x)y = f(x)$, para la ecuación lineal de segundo orden (2) se busca una solución de la forma

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x), \tag{3}$$

donde y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones en I de la forma homogénea asociada de (1). Usando la regla del producto para derivar dos veces a y_p, se obtiene

$$y'_p = u_1y'_1 + y_1u'_1 + u_2y'_2 + y_2u'_2$$

$$y''_p = u_1y''_1 + y'_1u'_1 + y_1u''_1 + u'_1y'_1 + u_2y''_2 + y'_2u'_2 + y_2u''_2 + u'_2y'_2.$$

Sustituyendo la ecuación (3) y las derivadas anteriores en (2) y agrupando términos se obtiene

$$\begin{aligned}
y''_p + P(x)y'_p + Q(x)y_p &= u_1[\overbrace{y''_1 + Py'_1 + Qy_1}^{\text{cero}}] + u_2[\overbrace{y''_2 + Py'_2 + Qy_2}^{\text{cero}}] + y_1u''_1 + u'_1y'_1 \\
&\quad + y_2u''_2 + u'_2y'_2 + P[y_1u'_1 + y_2u'_2] + y'_1u'_1 + y'_2u'_2 \\
&= \frac{d}{dx}[y_1u'_1] + \frac{d}{dx}[y_2u'_2] + P[y_1u'_1 + y_2u'_2] + y'_1u'_1 + y'_2u'_2 \\
&= \frac{d}{dx}[y_1u'_1 + y_2u'_2] + P[y_1u'_1 + y_2u'_2] + y'_1u'_1 + y'_2u'_2 = f(x).
\end{aligned} \tag{4}$$

Como se busca determinar dos funciones desconocidas u_1 y u_2, la razón impone que son necesarias dos ecuaciones. Estas ecuaciones se obtienen con la suposición adicional de que las funciones u_1 y u_2 satisfacen $y_1u'_1 + y_2u'_2 = 0$. Esta suposición en azul no se presenta por sorpresa, sino que es resultado de los dos primeros términos de (4) puesto que si se requiere que $y_1u'_1 + y_2u'_2 = 0$, entonces (4) se reduce a $y'_1u'_1 + y'_2u'_2 = f(x)$. Ahora tenemos nuestras dos ecuaciones deseadas, a pesar de que sean dos ecuaciones para determinar las derivadas u'_1 y u'_2. Por la regla de Cramer, la solución del sistema

$$y_1u'_1 + y_2u'_2 = 0$$

$$y'_1u'_1 + y'_2u'_2 = f(x)$$

puede expresarse en términos de determinantes:

$$u'_1 = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2f(x)}{W} \quad \text{y} \quad u'_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1f(x)}{W}, \tag{5}$$

donde
$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Las funciones u_1 y u_2 se encuentran integrando los resultados de (5). El determinante W se reconoce como el Wronskiano de y_1 y y_2. Por la independencia lineal de y_1 y y_2 en I, se sabe que $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ para toda x en el intervalo.

RESUMEN DEL MÉTODO Normalmente, no es buena idea memorizar fórmulas en lugar de entender un procedimiento. Sin embargo, el procedimiento anterior es demasiado largo y complicado para usarse cada vez que se desee resolver una ecuación diferencial. En este caso resulta más eficaz usar simplemente las fórmulas de (5). Así que para resolver $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$, primero se encuentra la función complementaria $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ y luego se calcula el Wronskiano $W(y_1(x), y_2(x))$. Dividiendo entre a_2, se escribe la ecuación en la forma estándar $y'' + Py' + Qy = f(x)$ para determinar $f(x)$. Se encuentra u_1 y u_2 integrando $u'_1 = W_1/W$ y $u'_2 = W_2/W$, donde W_1 y W_2 se definen como en (6). Una solución particular es $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$. Entonces la solución general de la ecuación es $y = y_c + y_p$.

EJEMPLO 1 Solución general usando variación de parámetros

Resuelva $y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{2x}$.

SOLUCIÓN De la ecuación auxiliar $m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 = 0$ se tiene $y_c = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$. Con las identificaciones $y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = xe^{2x}$, a continuación se calcula el Wronskiano:

$$W(e^{2x}, xe^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}.$$

Puesto que la ecuación diferencial dada ya está en la forma (2) (es decir, el coeficiente de y'' es 1), identificamos $f(x) = (x + 1)e^{2x}$. De (6), obtenemos

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ (x+1)e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = -(x+1)xe^{4x}, \qquad W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x+1)e^{2x} \end{vmatrix} = (x+1)e^{4x},$$

y así de (5)

$$u_1' = -\frac{(x+1)xe^{4x}}{e^{4x}} = -x^2 - x, \qquad u_2' = \frac{(x+1)e^{4x}}{e^{4x}} = x + 1.$$

Se tiene que $u_1 = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ y $u_2 = \frac{1}{2}x^2 + x$. Por tanto

$$y_p = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)xe^{2x} = \frac{1}{6}x^3e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$$

y

$$y = y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}.$$ ■

EJEMPLO 2 Solución general usando variación de parámetros

Resuelva $4y'' + 36y = \csc 3x$.

SOLUCIÓN Primero se escribe la ecuación en la forma estándar (2) dividiendo entre 4:

$$y'' + 9y = \frac{1}{4}\csc 3x.$$

Debido a que las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 + 9 = 0$ son $m_1 = 3i$ y $m_2 = -3i$, la función complementaria es $y_c = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$. Usando $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \operatorname{sen} 3x$, y $f(x) = \frac{1}{4}\csc 3x$, obtenemos

$$W(\cos 3x, \operatorname{sen} 3x) = \begin{vmatrix} \cos 3x & \operatorname{sen} 3x \\ -3\operatorname{sen} 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 3x \\ \frac{1}{4}\csc 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}, \qquad W_2 = \begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\operatorname{sen} 3x & \frac{1}{4}\csc 3x \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}.$$

Integrando $$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{1}{12} \quad \text{y} \quad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{12}\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}$$

Se obtiene $u_1 = -\frac{1}{12}x$ y $u_2 = \frac{1}{36}\ln|\operatorname{sen} 3x|$. Así una solución particular es

$$y_p = -\frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}(\operatorname{sen} 3x)\ln|\operatorname{sen} 3x|.$$

La solución general de la ecuación es

$$y = y_c + y_p = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}(\operatorname{sen} 3x)\ln|\operatorname{sen} 3x|. \qquad (7)$$ ■

La ecuación (7) representa la solución general de la ecuación diferencial en, digamos, el intervalo $(0, \pi/6)$.

CONSTANTES DE INTEGRACIÓN Cuando se calculan las integrales indefinidas de u'_1 y u'_2, no es necesario introducir algunas constantes. Esto es porque

$$\begin{aligned} y = y_c + y_p &= c_1y_1 + c_2y_2 + (u_1 + a_1)y_1 + (u_2 + b_1)y_2 \\ &= (c_1 + a_1)y_1 + (c_2 + b_1)y_2 + u_1y_1 + u_2y_2 \\ &= C_1y_1 + C_2y_2 + u_1y_1 + u_2y_2. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Solución general usando variación de parámetros

Resuelva $y'' - y = \dfrac{1}{x}$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar $m^2 - 1 = 0$ produce $m_1 = -1$ y $m_2 = 1$. Por tanto $y_c = c_1e^x + c_2e^{-x}$. Ahora $W(e^x, e^{-x}) = -2$, y

$$u'_1 = -\frac{e^{-x}(1/x)}{-2}, \qquad u_1 = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt,$$

$$u'_2 = \frac{e^{x}(1/x)}{-2}, \qquad u_2 = -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}\,dt.$$

Puesto que las integrales anteriores son no elementales, nos vemos obligados a escribir

$$y_p = \frac{1}{2}e^x\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \frac{1}{2}e^{-x}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}\,dt,$$

y por tanto $$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}e^x\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \frac{1}{2}e^{-x}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}\,dt. \quad (8)$$ ■

En el ejemplo 3 se puede integrar en algún intervalo $[x_0, x]$ que no contenga al origen.

ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR El método que se describió para ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden se puede generalizar a ecuaciones lineales de n-ésimo orden que se han escrito en forma estándar

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = f(x). \tag{9}$$

Si $y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ es la función complementaria para (9), entonces una solución particular es

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x),$$

donde los u'_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ se determinan por las n ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1u'_1 + \quad y_2u'_2 + \cdots + \quad y_nu'_n &= 0 \\ y'_1u'_1 + \quad y'_2u'_2 + \cdots + \quad y'_nu'_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \;\vdots \\ y_1^{(n-1)}u'_1 + y_2^{(n-1)}u'_2 + \cdots + y_n^{(n-1)}u'_n &= f(x). \end{aligned} \tag{10}$$

Las primeras $n - 1$ ecuaciones de este sistema, al igual que $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$ en (4), son suposiciones que se hacen para simplificar la ecuación resultante después de que $y_p = u_1(x)y_1(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x)$ se sustituye en (9). En este caso usando la regla de Cramer se obtiene

$$u_k' = \frac{W_k}{W}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

donde W es el Wronskiano de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ y W_k es el determinante que se obtiene al remplazar la k-ésima columna del Wronskiano por la columna formada por el lado derecho de (10), es decir, la columna que consta de $(0, 0, \ldots, f(x))$. Cuando $n = 2$, se obtiene la ecuación (5). Cuando $n = 3$, la solución particular $y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3$, donde y_1, y_2 y y_3 constituyen un conjunto linealmente independiente de soluciones de la ED homogénea asociada y u_1, u_2 y u_3 se determinan a partir de

$$u_1' = \frac{W_1}{W}, \qquad u_2' = \frac{W_2}{W}, \qquad u_3' = \frac{W_3}{W}, \tag{11}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ f(x) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & f(x) & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & f(x) \end{vmatrix}, \quad \text{y} \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}.$$

Véanse los problemas 25 y 26 de los ejercicios 4.6.

COMENTARIOS

i) La variación de parámetros tiene una ventaja particular sobre el método de coeficientes indeterminados en cuanto a que *siempre* produce una solución particular y_p, siempre y cuando se pueda resolver la ecuación homogénea asociada. Este método no se limita a una función $f(x)$ que es una combinación de las cuatro clases que se listan en la página 141. Como se verá en la siguiente sección, la variación de parámetros, a diferencia de los coeficientes indeterminados, es aplicable a ED lineales con coeficientes variables.

ii) En los problemas siguientes, no dude en simplificar la forma de y_p. Dependiendo de cómo se encuentren las antiderivadas de u'_1 y u'_2, es posible que no se obtenga la misma y_p que se da en la sección de respuestas. Por ejemplo, en el problema 3 de los ejercicios 4.6 tanto $y_p = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\cos x$ como $y_p = \frac{1}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\cos x$ son respuestas válidas. En cualquier caso la solución general $y = y_c + y_p$ se simplifica a $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\cos x$. ¿Por qué?

EJERCICIOS 4.6

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-5.

En los problemas 1 a 18 resuelva cada ecuación diferencial por medio de variación de parámetros.

1. $y'' + y = \sec x$

2. $y'' + y = \tan x$

3. $y'' + y = \operatorname{sen} x$

4. $y'' + y = \sec\theta\tan\theta$

5. $y'' + y = \cos^2 x$

6. $y'' + y = \sec^2 x$

7. $y'' - y = \cosh x$

8. $y'' - y = \operatorname{senh} 2x$

9. $y'' - 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$

10. $y'' - 9y = \dfrac{9x}{e^{3x}}$

11. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^x}$

12. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

13. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen} e^x$

14. $y'' - 2y' + y = e^t \arctan t$

15. $y'' + 2y' + y = e^{-t}\ln t$

16. $2y'' + 2y' + y = 4\sqrt{x}$

17. $3y'' - 6y' + 6y = e^x \sec x$

18. $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1 - x^2}$

En los problemas 19 a 22 resuelva cada ecuación diferencial mediante variación de parámetros, sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

19. $4y'' - y = xe^{x/2}$

20. $2y'' + y' - y = x + 1$

21. $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$

22. $y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x}$

En los problemas 23 y 24 las funciones que se indican son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea asociada en $(0, \infty)$. Determine la solución general de la ecuación homogénea.

23. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}$;

$y_1 = x^{-1/2}\cos x$, $y_2 = x^{-1/2}\,\mathrm{sen}\,x$

24. $x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x)$;

$y_1 = \cos(\ln x)$, $y_2 = \mathrm{sen}(\ln x)$

En los problemas 25 y 26 resuelva la ecuación diferencial de tercer orden usando variación de parámetros.

25. $y''' + y' = \tan x$

26. $y''' + 4y' = \sec 2x$

Problemas para analizar

En los problemas 27 y 28 analice cómo pueden combinarse los métodos de coeficientes indeterminados y variación de parámetros para resolver la ecuación diferencial. Lleve a cabo sus ideas.

27. $3y'' - 6y' + 30y = 15\,\mathrm{sen}\,x + e^x \tan 3x$

28. $y'' - 2y' + y = 4x^2 - 3 + x^{-1}e^x$

29. ¿Cuáles son los intervalos de definición de las soluciones generales en los problemas 1, 7, 9 y 18? Analice por qué el intervalo de definición de la solución del problema 24 *no* es $(0, \infty)$.

30. Encuentre la solución general de $x^4y'' + x^3y' - 4x^2y = 1$ dado que $y_1 = x^2$ es una solución de la ecuación homogénea asociada.

31. Suponga que $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, donde u_1 y u_2 están definidas por (5) es una solución particular de (2) en un intervalo I para el que P, Q y f son continuas. Demuestre que y_p se puede escribir como

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} G(x, t)f(t)\,dt, \qquad (12)$$

donde x y x_0 están en I,

$$G(x, t) = \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)}, \qquad (13)$$

y $W(t) = W(y_1(t), y_2(t))$ es el Wronskiano. La función $G(x, t)$ en (13) se llama la **función de Green** para la ecuación diferencial (2).

32. Use (13) para construir la función de Green para la ecuación diferencial del ejemplo 3. Exprese la solución general dada en (8) en términos de la solución particular (12).

33. Compruebe que (12) es una solución del problema con valores iniciales

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = f(x), \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

en el intervalo I. [*Sugerencia*: Busque la regla de Leibniz para derivar bajo un signo de integral.]

34. Use los resultados de los problemas 31 y 33 y la función de Green encontrada del problema 32 para encontrar una solución del problema con valores iniciales

$$y'' - y = e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

usando (12). Evalúe la integral.

4.7 ECUACIÓN DE CAUCHY-EULER

REPASO DE MATERIAL

- Repase el concepto de la ecuación auxiliar en la sección 4.3.

INTRODUCCIÓN La relativa facilidad con que pudimos encontrar soluciones explícitas de ecuaciones lineales de orden superior con coeficientes constantes en las secciones anteriores, en general no se realiza en ecuaciones lineales con coeficientes variables. En el capítulo 6 veremos que cuando una ED lineal tiene coeficientes variables, lo mejor que podemos esperar, *usualmente*, es encontrar una solución en forma de serie infinita. Sin embargo, el tipo de ecuación diferencial que consideramos en esta sección es una excepción a esta regla; esta es una ecuación lineal con coeficientes variables cuya solución general siempre se puede expresar en términos de potencias de x, senos, cosenos y funciones logarítmicas. Además este método de solución es bastante similar al de las ecuaciones con coeficientes constantes en los que se debe resolver una ecuación auxiliar.

ECUACIÓN DE CAUCHY-EULER Una ecuación diferencial lineal de la forma

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x),$$

donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son constantes, se conoce como **ecuación de Cauchy-Euler**. La característica observable de este tipo de ecuación es que el grado $k = n, n-1, \ldots, 1, 0$ de los coeficientes monomiales x^k coincide con el orden k de la derivación $d^k y/dx^k$:

mismo mismo

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots .$$

Al igual que en la sección 4.3, iniciamos el análisis con un examen detallado de las formas de las soluciones generales de la ecuación homogénea de segundo orden

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0.$$

La solución de ecuaciones de orden superior se deduce de manera análoga. También, podemos resolver la ecuación no homogénea $ax^2 y'' + bxy' + cy = g(x)$ por variación de parámetros, una vez que se ha determinado la función complementaria y_c.

NOTA El coeficiente ax^2 de y'' es cero en $x = 0$. Por lo que, para garantizar que los resultados fundamentales del teorema 4.1.1 sean aplicables a la ecuación de Cauchy-Euler, centramos nuestra atención en encontrar soluciones generales definidas en el intervalo $(0, \infty)$. Las soluciones en el intervalo $(-\infty, 0)$ se obtienen al sustituir $t = -x$ en la ecuación diferencial. Véanse los problemas 37 y 38 de los ejercicios 4.7.

MÉTODO DE SOLUCIÓN Se prueba una solución de la forma $y = x^m$, donde m es un valor que se debe determinar. Análogo a lo que sucede cuando se sustituye e^{mx} en una ecuación lineal con coeficientes constantes, cuando se sustituye x^m, cada término de una ecuación de Cauchy-Euler se convierte en un polinomio en m veces x^m, puesto que

$$a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = a_k x^k m(m-1)(m-2) \cdots (m-k+1)x^{m-k} = a_k m(m-1)(m-2) \cdots (m-k+1)x^m.$$

Por ejemplo, cuando sustituimos $y = x^m$, la ecuación de segundo orden se transforma en

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m = (am(m-1) + bm + c)x^m.$$

Así $y = x^m$ es una solución de la ecuación diferencial siempre que m sea una solución de la **ecuación auxiliar**

$$am(m-1) + bm + c = 0 \quad \text{o} \quad am^2 + (b-a)m + c = 0. \tag{1}$$

Hay tres casos distintos a considerar que dependen de si las raíces de esta ecuación cuadrática son reales y distintas, reales e iguales o complejas. En el último caso las raíces aparecen como un par conjugado.

CASO I: RAÍCES REALES Y DISTINTAS Sean m_1 y m_2 las raíces reales de (1), tales que $m_1 \neq m_2$. Entonces $y_1 = x^{m_1}$ y $y_2 = x^{m_2}$ forman un conjunto fundamental de soluciones. Por tanto, la solución general es

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}. \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Raíces distintas

Resuelva $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0.$

SOLUCIÓN En lugar de memorizar la ecuación (1), algunas veces es preferible suponer $y = x^m$ como la solución para entender el origen y la diferencia entre esta nueva forma de ecuación auxiliar y la obtenida en la sección 4.3. Derive dos veces,

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2},$$

y sustituyendo esto en la ecuación diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2 \cdot m(m-1)x^{m-2} - 2x \cdot mx^{m-1} - 4x^m$$
$$= x^m(m(m-1) - 2m - 4) = x^m(m^2 - 3m - 4) = 0$$

si $m^2 - 3m - 4 = 0$. Ahora $(m+1)(m-4) = 0$ implica que $m_1 = -1$, $m_2 = 4$, así que $y = c_1x^{-1} + c_2x^4$. ■

CASO II: RAÍCES REALES REPETIDAS Si las raíces de (l) son repetidas (es decir, $m_1 = m_2$), entonces se obtiene sólo una solución particular, $y = x^{m_1}$. Cuando las raíces de la ecuación cuadrática $am^2 + (b-a)m + c = 0$ son iguales, el discriminante de los coeficientes necesariamente es cero. De la fórmula cuadrática se deduce que las raíces deben ser $m_1 = -(b-a)/2a$.

Ahora se puede construir una segunda solución y_2, con la ecuación (5) de la sección 4.2. Primero se escribe la ecuación de Cauchy-Euler en la forma estándar

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{b}{ax}\frac{dy}{dx} + \frac{c}{ax^2}y = 0$$

y haciendo las identificaciones $P(x) = b/ax$ y $\int(b/ax)\,dx = (b/a)\ln x$. Así

$$y_2 = x^{m_1}\int \frac{e^{-(b/a)\ln x}}{x^{2m_1}}\,dx$$

$$= x^{m_1}\int x^{-b/a} \cdot x^{-2m_1}\,dx \qquad \leftarrow e^{-(b/a)\ln x} = e^{\ln x^{-b/a}} = x^{-b/a}$$

$$= x^{m_1}\int x^{-b/a} \cdot x^{(b-a)/a}\,dx \qquad \leftarrow -2m_1 = (b-a)/a$$

$$= x^{m_1}\int \frac{dx}{x} = x^{m_1}\ln x.$$

La solución general es entonces

$$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_1}\ln x. \tag{3}$$

EJEMPLO 2 Raíces repetidas

Resuelva $4x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8x\dfrac{dy}{dx} + y = 0.$

SOLUCIÓN Sustituyendo $y = x^m$ se obtiene

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = x^m(4m(m-1) + 8m + 1) = x^m(4m^2 + 4m + 1) = 0$$

donde $4m^2 + 4m + 1 = 0$ o $(2m + 1)^2 = 0$. Puesto que $m_1 = -\frac{1}{2}$, la solución general es $y = c_1x^{-1/2} + c_2x^{-1/2}\ln x$. ■

Para ecuaciones de orden superior, si m_1 es una raíz de multiplicidad k, entonces se puede demostrar que

$$x^{m_1}, \quad x^{m_1}\ln x, \quad x^{m_1}(\ln x)^2, \ldots, \quad x^{m_1}(\ln x)^{k-1}$$

son k soluciones linealmente independientes. En correspondencia, la solución general de la ecuación diferencial debe contener una combinación lineal de estas k soluciones.

CASO III: RAÍCES COMPLEJAS CONJUGADAS Si las raíces de (1) son el par conjugado $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$, donde α y $\beta > 0$ son reales, entonces una solución es

$$y = C_1x^{\alpha+i\beta} + C_2x^{\alpha-i\beta}.$$

Pero cuando las raíces de la ecuación auxiliar son complejas, como en el caso de las ecuaciones con coeficientes constantes, se desea escribir la solución sólo en términos de funciones reales. Observemos la identidad

$$x^{i\beta} = (e^{\ln x})^{i\beta} = e^{i\beta\ln x},$$

que, por la fórmula de Euler, es lo mismo que

$$x^{i\beta} = \cos(\beta\ln x) + i\,\text{sen}(\beta\ln x).$$

De forma similar, $\quad x^{-i\beta} = \cos(\beta\ln x) - i\,\text{sen}(\beta\ln x).$

Si se suman y restan los dos últimos resultados, se obtiene

$$x^{i\beta} + x^{-i\beta} = 2\cos(\beta\ln x) \quad \text{y} \quad x^{i\beta} - x^{-i\beta} = 2i\,\text{sen}(\beta\ln x),$$

respectivamente. Del hecho de que $y = C_1x^{\alpha+i\beta} + C_2x^{\alpha-i\beta}$ es una solución para cualquier valor de las constantes, note, a su vez, para $C_1 = C_2 = 1$ y $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ que

$$y_1 = x^{\alpha}(x^{i\beta} + x^{-i\beta}) \quad \text{y} \quad y_2 = x^{\alpha}(x^{i\beta} - x^{-i\beta})$$

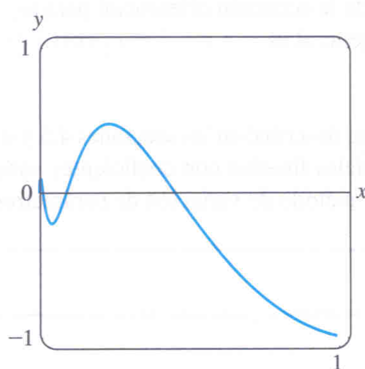
o $\quad y_1 = 2x^{\alpha}\cos(\beta\ln x) \quad \text{y} \quad y_2 = 2ix^{\alpha}\,\text{sen}(\beta\ln x)$

también son soluciones. Como $W(x^{\alpha}\cos(\beta\ln x), x^{\alpha}\,\text{sen}(\beta\ln x)) = \beta x^{2\alpha-1} \neq 0$, $\beta > 0$ en el intervalo $(0, \infty)$, se concluye que

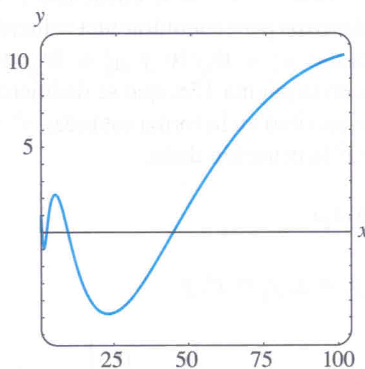
$$y_1 = x^{\alpha}\cos(\beta\ln x) \quad \text{y} \quad y_2 = x^{\alpha}\,\text{sen}(\beta\ln x)$$

constituyen un conjunto fundamental de soluciones reales de la ecuación diferencial. Así la solución general es

$$y = x^{\alpha}[c_1\cos(\beta\ln x) + c_2\,\text{sen}(\beta\ln x)]. \tag{4}$$



a) solución para $0 < x \leq 1$.



b) solución para $0 < x \leq 100$.

FIGURA 4.7.1 Curva solución del PVI del ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Problema con valores iniciales

Resuelva $4x^2y'' + 17y = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = -\frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN El término y' falta en la ecuación de Cauchy-Euler; sin embargo, la sustitución $y = x^m$ produce

$$4x^2y'' + 17y = x^m(4m(m-1) + 17) = x^m(4m^2 - 4m + 17) = 0$$

donde $4m^2 - 4m + 17 = 0$. De la fórmula cuadrática se encuentra que las raíces son $m_1 = \frac{1}{2} + 2i$ y $m_2 = \frac{1}{2} - 2i$. Con las identificaciones $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 2$ se ve de (4) que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = x^{1/2}[c_1\cos(2\ln x) + c_2\,\text{sen}(2\ln x)].$$

Aplicando las condiciones iniciales $y(1) = -1$, $y'(1) = -\frac{1}{2}$ la solución anterior y usando $\ln 1 = 0$, se obtiene, a su vez, que $c_1 = -1$ y $c_2 = 0$. Así la solución del problema

con valores iniciales es $y = -x^{1/2}\cos(2\ln x)$. En la figura 4.7.1 se presenta la gráfica de esta función que se obtuvo con ayuda de un paquete de cómputo. Se observa que la solución particular es oscilatoria y no acotada conforme $x \to \infty$. ■

En el ejemplo siguiente se ilustra la solución de una ecuación de Cauchy-Euler de tercer orden.

EJEMPLO 4 Ecuación de tercer orden

Resuelva $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 5x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 7x\dfrac{dy}{dx} + 8y = 0.$

SOLUCIÓN Las tres primeras derivadas de $y = x^m$ son

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}, \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3},$$

así la ecuación diferencial dada se convierte en

$$\begin{aligned} x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 5x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} + 8y &= x^3m(m-1)(m-2)x^{m-3} + 5x^2m(m-1)x^{m-2} + 7xmx^{m-1} + 8x^m \\ &= x^m(m(m-1)(m-2) + 5m(m-1) + 7m + 8) \\ &= x^m(m^3 + 2m^2 + 4m + 8) = x^m(m+2)(m^2+4) = 0. \end{aligned}$$

En este caso veremos que $y = x^m$ es una solución de la ecuación diferencial para $m_1 = -2$, $m_2 = 2i$ y $m_3 = -2i$. Por tanto, la solución general es $y = c_1x^{-2} + c_2\cos(2\ln x) + c_3\,\text{sen}(2\ln x)$. ■

El método de coeficientes indeterminados que se describió en las secciones 4.5 y 4.6 no se aplica, *en general*, a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables. Por tanto en el siguiente ejemplo se emplea el método de variación de parámetros.

EJEMPLO 5 Variación de parámetros

Resuelva $x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^4e^x$.

SOLUCIÓN Puesto que la ecuación es no homogénea, primero se resuelve la ecuación homogénea asociada. De la ecuación auxiliar $(m-1)(m-3) = 0$ se encuentra $y_c = c_1x + c_2x^3$. Ahora, antes de usar la variación de parámetros para encontrar una solución particular $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$, recuerde que las fórmulas $u_1' = W_1/W$ y $u_2' = W_2/W$, donde W_1, W_2 y W, son los determinantes definidos en la página 158, que se dedujeron bajo la suposición de que la ecuación diferencial se escribió en la forma estándar $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$. Por tanto, dividiendo entre x^2 la ecuación dada,

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x^2e^x$$

hacemos la identificación $f(x) = 2x^2e^x$. Ahora con $y_1 = x$, $y_2 = x^3$, y

$$W = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 2x^2e^x & 3x^2 \end{vmatrix} = -2x^5e^x, \quad W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2e^x \end{vmatrix} = 2x^3e^x,$$

encontramos $\quad u_1' = -\dfrac{2x^5e^x}{2x^3} = -x^2e^x \quad$ y $\quad u_2' = \dfrac{2x^3e^x}{2x^3} = e^x.$

La integral de la última función es inmediata, pero en el caso de u'_1 se integra por partes dos veces. Los resultados son $u_1 = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x$ y $u_2 = e^x$. Por tanto $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ es

$$y_p = (-x^2e^x + 2xe^x - 2e^x)x + e^x x^3 = 2x^2e^x - 2xe^x.$$

Finalmente, $y = y_c + y_p = c_1x + c_2x^3 + 2x^2e^x - 2xe^x.$ ■

REDUCCIÓN A COEFICIENTES CONSTANTES Las similitudes entre las formas de soluciones de ecuaciones de Cauchy-Euler y soluciones de ecuaciones lineales con coeficientes constantes no sólo son una coincidencia. Por ejemplo, cuando las raíces de las ecuaciones auxiliares para $ay'' + by' + cy = 0$ y $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ son distintas y reales, las soluciones generales respectivas son

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} \quad \text{y} \quad y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}, \quad x > 0. \tag{5}$$

Usando la identidad $e^{\ln x} = x$, $x > 0$, la segunda solución dada en (5) puede expresarse en la misma forma que la primera solución:

$$y = c_1e^{m_1 \ln x} + c_2e^{m_2 \ln x} = c_1e^{m_1 t} + c_2e^{m_2 t},$$

donde $t = \ln x$. Este último resultado ilustra el hecho de que cualquier ecuación de Cauchy-Euler siempre se puede escribir de nuevo como una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes sustituyendo $x = e^t$. La idea es resolver la nueva ecuación diferencial en términos de la variable t, usando los métodos de las secciones anteriores y una vez obtenida la solución general, sustituir nuevamente $t = \ln x$. Este método, que se ilustró en el último ejemplo, requiere el uso de la regla de la cadena de la derivación.

EJEMPLO 6 Cambio a coeficientes constantes

Resuelva $x^2y'' - xy' + y = \ln x$.

SOLUCIÓN Sustituyendo $x = e^t$ o $t = \ln x$, se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \qquad \leftarrow \text{Regla de la cadena}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \qquad \leftarrow \text{Regla del producto y regla de la cadena}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x}\right) + \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial dada y simplificando se obtiene

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = t.$$

Como esta última ecuación tiene coeficientes constantes, su ecuación auxiliar es $m^2 - 2m + 1 = 0$, o $(m - 1)^2 = 0$. Así se obtiene $y_c = c_1e^t + c_2te^t$.

Usando coeficientes indeterminados se prueba una solución particular de la forma $y_p = A + Bt$. Esta suposición conduce a $-2B + A + Bt = t$, por tanto $A = 2$ y $B = 1$. Usando $y = y_c + y_p$, se obtiene

$$y = c_1e^t + c_2te^t + 2 + t,$$

así la solución general de la ecuación diferencial original en el intervalo $(0, \infty)$ es $y = c_1x + c_2x \ln x + 2 + \ln x$. ■

EJERCICIOS 4.7

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-5.

En los problemas 1 a 18 resuelva la ecuación diferencial dada.

1. $x^2y'' - 2y = 0$
2. $4x^2y'' + y = 0$
3. $xy'' + y' = 0$
4. $xy'' - 3y' = 0$
5. $x^2y'' + xy' + 4y = 0$
6. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$
7. $x^2y'' - 3xy' - 2y = 0$
8. $x^2y'' + 3xy' - 4y = 0$
9. $25x^2y'' + 25xy' + y = 0$
10. $4x^2y'' + 4xy' - y = 0$
11. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$
12. $x^2y'' + 8xy' + 6y = 0$
13. $3x^2y'' + 6xy' + y = 0$
14. $x^2y'' - 7xy' + 41y = 0$
15. $x^3y''' - 6y = 0$
16. $x^3y''' + xy' - y = 0$
17. $xy^{(4)} + 6y''' = 0$
18. $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 9x^2y'' + 3xy' + y = 0$

En los problemas 19 a 24 resuelva la ecuación diferencial dada por variación de parámetros.

19. $xy'' - 4y' = x^4$
20. $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$
21. $x^2y'' - xy' + y = 2x$
22. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4e^x$
23. $x^2y'' + xy' - y = \ln x$
24. $x^2y'' + xy' - y = \dfrac{1}{x+1}$

En los problemas 25 a 30 resuelva el problema con valores iniciales. Use una aplicación para graficar y obtenga la gráfica de la curva solución.

25. $x^2y'' + 3xy' = 0, \quad y(1) = 0, y'(1) = 4$
26. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0, \quad y(2) = 32, y'(2) = 0$
27. $x^2y'' + xy' + y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 2$
28. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(1) = 5, y'(1) = 3$
29. $xy'' + y' = x, \quad y(1) = 1, y'(1) = -\frac{1}{2}$
30. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 8x^6, \quad y(\frac{1}{2}) = 0, y'(\frac{1}{2}) = 0$

En los problemas 31 a 36 use la sustitución $x = e^t$ para convertir la ecuación de Cauchy-Euler a una ecuación diferencial con coeficientes constantes. Resuelva la ecuación original al resolver la nueva ecuación usando los procedimientos de las secciones 4.3 a 4.5.

31. $x^2y'' + 9xy' - 20y = 0$
32. $x^2y'' - 9xy' + 25y = 0$
33. $x^2y'' + 10xy' + 8y = x^2$
34. $x^2y'' - 4xy' + 6y = \ln x^2$
35. $x^2y'' - 3xy' + 13y = 4 + 3x$
36. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 3 + \ln x^3$

En los problemas 37 y 38 resuelva el problema con valores iniciales dado en el intervalo $(-\infty, 0)$.

37. $4x^2y'' + y = 0, \quad y(-1) = 2, y'(-1) = 4$
38. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad y(-2) = 8, y'(-2) = 0$

Problemas para analizar

39. ¿Cómo podría utilizar el método de esta sección para resolver

$$(x + 2)^2y'' + (x + 2)y' + y = 0?$$

Lleve a cabo sus ideas. Exprese un intervalo en el cual esté definida la solución.

40. ¿Es posible encontrar una ecuación diferencial de Cauchy-Euler de orden mínimo con coeficientes reales si se sabe que 2 y $1 - i$ son raíces de su ecuación auxiliar? Lleve a cabo sus ideas.

41. Las condiciones iniciales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ se aplican a cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$x^2y'' = 0,$$
$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,$$
$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

¿Para qué valores de y_0 y y_1 cada problema con valores iniciales tiene una solución?

42. ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x de la curva solución que se muestra en la figura 4.7.1? ¿Cuántas intersecciones con el eje x hay en $0 < x < \frac{1}{2}$?

Tarea para el laboratorio de computación

En los problemas 43 al 46 resuelva la ecuación diferencial dada usando un SAC para encontrar las raíces (aproximadas) de la ecuación auxiliar.

43. $2x^3y''' - 10.98x^2y'' + 8.5xy' + 1.3y = 0$
44. $x^3y''' + 4x^2y'' + 5xy' - 9y = 0$
45. $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 3x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
46. $x^4y^{(4)} - 6x^3y''' + 33x^2y'' - 105xy' + 169y = 0$
47. Resuelva $x^3y''' - x^2y'' - 2xy' + 6y = x^2$ por variación de parámetros. Use un SAC como ayuda para calcular las raíces de la ecuación auxiliar y los determinantes dados en (10) de la sección 4.6.

4.8 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ED LINEALES POR ELIMINACIÓN

REPASO DE MATERIAL

- Puesto que el método de eliminación sistemática desacopla un sistema en distintas EDO lineales en cada variable dependiente, esta sección le brinda la oportunidad de practicar lo que aprendió en las secciones 4.3, 4.4 (o 4.5) y 4.6.

INTRODUCCIÓN Las ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas tienen que ver con dos o más ecuaciones que contienen derivadas de dos o más variables dependientes (las funciones desconocidas) respecto a una sola variable independiente. El método de **eliminación sistemática** para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes se basa en el principio algebraico de eliminación de variables. Veremos que la operación análoga de *multiplicar* una ecuación algebraica por una constante es *operar* en una EDO con cierta combinación de derivadas.

ELIMINACIÓN SISTEMÁTICA La eliminación de una incógnita en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales se facilita al rescribir cada ecuación del sistema en notación de operador diferencial. Recuerde de la sección 4.1 que una sola ecuación lineal

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(t),$$

donde las a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes, puede escribirse como

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{(n-1)} + \cdots + a_1 D + a_0) y = g(t).$$

Si el operador diferencial de n-ésimo orden $a_n D^n + a_{n-1} D^{(n-1)} + \cdots + a_1 D + a_0$ se factoriza en operadores diferenciales de menor orden, entonces los factores conmutan. Ahora, por ejemplo, para rescribir el sistema

$$\begin{aligned} x'' + 2x' + y'' &= x + 3y + \operatorname{sen} t \\ x' + y' &= -4x + 2y + e^{-t} \end{aligned}$$

en términos del operador D, primero se escriben los términos con variables dependientes en un miembro y se agrupan las mismas variables.

$$\begin{aligned} x'' + 2x' - x + y'' - 3y &= \operatorname{sen} t \\ x' - 4x + y' - 2y &= e^{-t} \end{aligned} \quad \text{es lo mismo que} \quad \begin{aligned} (D^2 + 2D - 1)x + (D^2 - 3)y &= \operatorname{sen} t \\ (D - 4)x + (D - 2)y &= e^{-t}. \end{aligned}$$

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA Una **solución** de un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de funciones suficientemente derivables $x = \phi_1(t)$, $y = \phi_2(t)$, $z = \phi_3(t)$, etcétera, que satisface cada ecuación del sistema en algún intervalo común I.

MÉTODO DE SOLUCIÓN Considere el sistema simple de ecuaciones lineales de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x \end{aligned} \quad \text{o, equivalentemente} \quad \begin{aligned} Dx - 3y &= 0 \\ 2x - Dy &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Operando con D la primera ecuación de (1) en tanto que la segunda se multiplica por -3 y después se suma para eliminar y del sistema, se obtiene $D^2x - 6x = 0$. Puesto que las raíces de la ecuación auxiliar de la última ED son $m_1 = \sqrt{6}$ y $m_2 = -\sqrt{6}$, se obtiene

$$x(t) = c_1 e^{-\sqrt{6}t} + c_2 e^{\sqrt{6}t}. \tag{2}$$

Multiplicando la primera ecuación en (1) por 2 mientras que se opera la segunda con D y después restando, se obtiene la ecuación diferencial para y, $D^2y - 6y = 0$. Inmediatamente se tiene que

$$y(t) = c_3e^{-\sqrt{6}t} + c_4e^{\sqrt{6}t}. \tag{3}$$

Ahora (2) y (3) no satisfacen el sistema (1) para toda elección de c_1, c_2, c_3 y c_4 porque el sistema en sí pone una restricción al número de parámetros en una solución que se puede elegir en forma arbitraria. Para ver esto, observe que sustituyendo $x(t)$ y $y(t)$ en la primera ecuación del sistema original (1), después de simplificar, se obtiene

$$(-\sqrt{6}c_1 - 3c_3)e^{-\sqrt{6}t} + (\sqrt{6}c_2 - 3c_4)e^{\sqrt{6}t} = 0.$$

Puesto que la última expresión es cero para todos los valores de t, debemos tener $-\sqrt{6}c_1 - 3c_3 = 0$ y $\sqrt{6}c_2 - 3c_4 = 0$. Estas dos ecuaciones nos permiten escribir c_3 como un múltiplo de c_1 y c_4 como un múltiplo de c_2:

$$c_3 = -\frac{\sqrt{6}}{3}c_1 \quad \text{y} \quad c_4 = \frac{\sqrt{6}}{3}c_2. \tag{4}$$

Por tanto se concluye que una solución del sistema debe ser

$$x(t) = c_1e^{-\sqrt{6}t} + c_2e^{\sqrt{6}t}, \qquad y(t) = -\frac{\sqrt{6}}{3}c_1e^{-\sqrt{6}t} + \frac{\sqrt{6}}{3}c_2e^{\sqrt{6}t}.$$

Se recomienda sustituir (2) y (3) en la segunda ecuación de (1) y comprobar que se cumple la misma relación (4) entre las constantes.

EJEMPLO 1 Solución por eliminación

Resuelva

$$\begin{aligned} Dx + (D + 2)y &= 0 \\ (D - 3)x - \quad 2y &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

SOLUCIÓN Operando con $D - 3$ la primera ecuación y la segunda con D y luego restándolas se elimina x del sistema. Se deduce que la ecuación diferencial para y es

$$[(D - 3)(D + 2) + 2D]y = 0 \quad \text{o} \quad (D^2 + D - 6)y = 0.$$

Puesto que la ecuación característica de esta última ecuación diferencial es $m^2 + m - 6 = (m - 2)(m + 3) = 0$, se obtiene la solución

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}. \tag{6}$$

Eliminando y de modo similar, se obtiene $(D^2 + D - 6)x = 0$, a partir de lo cual se encuentra que

$$x(t) = c_3e^{2t} + c_4e^{-3t}. \tag{7}$$

Como se observó en la descripción anterior, una solución de (5) no contiene cuatro constantes independientes. Sustituyendo (6) y (7) en la primera ecuación de (5) se obtiene

$$(4c_1 + 2c_3)e^{2t} + (-c_2 - 3c_4)e^{-3t} = 0.$$

De $4c_1 + 2c_3 = 0$ y $-c_2 - 3c_4 = 0$ se obtiene $c_3 = -2c_1$ y $c_4 = -\frac{1}{3}c_2$. Por tanto una solución del sistema es

$$x(t) = -2c_1e^{2t} - \frac{1}{3}c_2e^{-3t}, \qquad y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}.$$ ■

Ya que sólo se podría despejar fácilmente a c_3 y c_4 en términos de c_1 y c_2, la solución del ejemplo 1 se escribe en la forma alternativa

$$x(t) = c_3e^{2t} + c_4e^{-3t}, \qquad y(t) = -\frac{1}{2}c_3e^{2t} - 3c_4e^{-3t}.$$

■ Esto podría ahorrarle algo de tiempo

En ocasiones da resultado mantener los ojos abiertos cuando se resuelven sistemas. Si en el primer ejemplo se hubiera resuelto para x, entonces se podría encontrar y, junto con la relación entre las constantes, usando la última ecuación del sistema (5). Usted debe comprobar que la sustitución de $x(t)$ en $y = \frac{1}{2}(Dx - 3x)$ produce $y = -\frac{1}{2}c_3e^{2t} - 3c_4e^{-3t}$. Observe también en la descripción inicial que la relación que se proporciona en (4) y la solución $y(t)$ de (1) se podría haber obtenido al usar $x(t)$ en (2) y la primera ecuación de (1) en la forma

$$y = \tfrac{1}{3}Dx = -\tfrac{1}{3}\sqrt{6}c_1e^{-\sqrt{6}t} + \tfrac{1}{3}\sqrt{6}c_2e^{\sqrt{6}t}.$$

EJEMPLO 2 Solución por eliminación

Resuelva

$$\begin{aligned} x' - 4x + y'' &= t^2 \\ x' + x + y' &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

SOLUCIÓN Primero se escribe el sistema en notación de operador diferencial:

$$\begin{aligned} (D - 4)x + D^2y &= t^2 \\ (D + 1)x + Dy &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Entonces, eliminando a x, obtenemos

$$[(D + 1)D^2 - (D - 4)D]y = (D + 1)t^2 - (D - 4)0$$

o

$$(D^3 + 4D)y = t^2 + 2t.$$

Puesto que las raíces de la ecuación auxiliar $m(m^2 + 4) = 0$ son $m_1 = 0$, $m_2 = 2i$ y $m_3 = -2i$, la función complementaria es $y_c = c_1 + c_2 \cos 2t + c_3 \operatorname{sen} 2t$. Para determinar la solución particular y_p, se usan coeficientes indeterminados suponiendo que $y_p = At^3 + Bt^2 + Ct$. Por tanto $y_p' = 3At^2 + 2Bt + C$, $y_p'' = 6At + 2B$, $y_p''' = 6A$,

$$y_p''' + 4y_p' = 12At^2 + 8Bt + 6A + 4C = t^2 + 2t.$$

La última igualdad indica que $12A = 1$, $8B = 2$ y $6A + 4C = 0$; por tanto $A = \frac{1}{12}$, $B = \frac{1}{4}$, y $C = -\frac{1}{8}$. Así

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2\cos 2t + c_3\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t. \tag{10}$$

Eliminando y del sistema (9), se obtiene

$$[(D - 4) - D(D + 1)]x = t^2 \quad \text{o} \quad (D^2 + 4)x = -t^2.$$

Debe ser obvio que $x_c = c_4 \cos 2t + c_5 \operatorname{sen} 2t$ y que se pueden aplicar coeficientes indeterminados para obtener una solución particular de la forma $x_p = At^2 + Bt + C$. En este caso usando derivadas y álgebra usuales se obtiene $x_p = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}$, y así

$$x = x_c + x_p = c_4\cos 2t + c_5\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}. \tag{11}$$

Ahora se expresan c_4 y c_5 en términos de c_2 y c_3 sustituyendo (10) y (11) en cualquier ecuación de (8). Utilizando la segunda ecuación, se encuentra, después de combinar términos,

$$(c_5 - 2c_4 - 2c_2)\operatorname{sen} 2t + (2c_5 + c_4 + 2c_3)\cos 2t = 0,$$

así $c_5 - 2c_4 - 2c_2 = 0$ y $2c_5 + c_4 + 2c_3 = 0$. Despejando c_4 y c_5 en términos de c_2 y c_3 se obtiene $c_4 = -\frac{1}{5}(4c_2 + 2c_3)$ y $c_5 = \frac{1}{5}(2c_2 - 4c_3)$. Por último, se encuentra que una solución de (8) es

$$x(t) = -\frac{1}{5}(4c_2 + 2c_3)\cos 2t + \frac{1}{5}(2c_2 - 4c_3)\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8},$$

$$y(t) = c_1 + c_2\cos 2t + c_3\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t.$$

■

EJEMPLO 3 Volver a tratar un problema de mezclas

En (3) de la sección 3.3 vimos que el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2$$

es un modelo para la cantidad de libras de sal $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en mezclas de salmuera en los tanques A y B, respectivamente, que se muestran en la figura 3.3.1. En ese momento no podíamos resolver el sistema. Pero ahora, en términos de operadores diferenciales, el sistema anterior se puede escribir como

$$\left(D + \frac{2}{25}\right)x_1 - \frac{1}{50}x_2 = 0$$
$$-\frac{2}{25}x_1 + \left(D + \frac{2}{25}\right)x_2 = 0.$$

Operando con $D + \frac{2}{25}$ la primera ecuación y multiplicando la segunda ecuación por $\frac{1}{50}$, se suman y simplifican, y se obtiene $(625D^2 + 100D + 3)x_1 = 0$. De la ecuación auxiliar

$$625m^2 + 100m + 3 = (25m + 1)(25m + 3) = 0$$

se observa inmediatamente que $x_1(t) = c_1e^{-t/25} + c_2e^{-3t/25}$. Ahora se puede obtener $x_2(t)$ usando la primera ED del sistema en la forma $x_2 = 50(D + \frac{2}{25})x_1$. De esta manera se encuentra que la solución del sistema es

$$x_1(t) = c_1e^{-t/25} + c_2e^{-3t/25}, \qquad x_2(t) = 2c_1e^{-t/25} - 2c_2e^{-3t/25}.$$

En el análisis original de la página 107 se supuso que las condiciones iniciales eran $x_1(0) = 25$ y $x_2(0) = 0$. Aplicando estas condiciones a la solución se obtiene $c_1 + c_2 = 25$ y $2c_1 - 2c_2 = 0$. Resolviendo simultáneamente estas ecuaciones se obtiene $c_1 = c_2 = \frac{25}{2}$. Por último, una solución del problema con valores iniciales es

$$x_1(t) = \frac{25}{2}e^{-t/25} + \frac{25}{2}e^{-3t/25}, \qquad x_2(t) = 25e^{-t/25} - 25e^{-3t/25}.$$

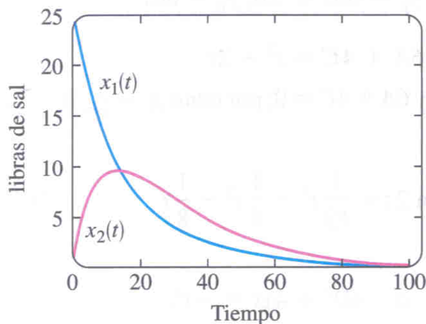


FIGURA 4.8.1 Libras de sal en los tanques A y B.

En la figura 4.8.1 se muestran las gráficas de ambas ecuaciones. Consistentes con el hecho que se bombea agua pura al tanque A en la figura vemos que $x_1(t) \to 0$ y $x_2(t) \to 0$ conforme $t \to \infty$. ■

EJERCICIOS 4.8

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-6.

En los problemas 1 a 20 resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales dado por eliminación sistemática.

1. $\frac{dx}{dt} = 2x - y$, $\frac{dy}{dt} = x$

2. $\frac{dx}{dt} = 4x + 7y$, $\frac{dy}{dt} = x - 2y$

3. $\frac{dx}{dt} = -y + t$, $\frac{dy}{dt} = x - t$

4. $\frac{dx}{dt} - 4y = 1$, $\frac{dy}{dt} + x = 2$

5. $(D^2 + 5)x - 2y = 0$
$-2x + (D^2 + 2)y = 0$

6. $(D + 1)x + (D - 1)y = 2$
$3x + (D + 2)y = -1$

7. $\frac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t$

8. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = -5x$, $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = -x + 4y$

9. $Dx + D^2y = e^{3t}$
$(D + 1)x + (D - 1)y = 4e^{3t}$

10. $D^2x - Dy = t$
$(D + 3)x + (D + 3)y = 2$

11. $(D^2 - 1)x - y = 0$
$(D - 1)x + Dy = 0$

12. $(2D^2 - D - 1)x - (2D + 1)y = 1$
$(D - 1)x + Dy = -1$

13. $2\dfrac{dx}{dt} - 5x + \dfrac{dy}{dt} = e^t$
$\dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{dy}{dt} = 5e^t$

14. $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = e^t$
$-\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + x + y = 0$

15. $(D - 1)x + (D^2 + 1)y = 1$
$(D^2 - 1)x + (D + 1)y = 2$

16. $D^2x - 2(D^2 + D)y = \operatorname{sen} t$
$x + Dy = 0$

17. $Dx = y$
$Dy = z$
$Dz = x$

18. $Dx + z = e^t$
$(D - 1)x + Dy + Dz = 0$
$x + 2y + Dz = e^t$

19. $\dfrac{dx}{dt} = 6y$
$\dfrac{dy}{dt} = x + z$
$\dfrac{dz}{dt} = x + y$

20. $\dfrac{dx}{dt} = -x + z$
$\dfrac{dy}{dt} = -y + z$
$\dfrac{dz}{dt} = -x + y$

En los problemas 21 y 22 resuelva el problema con valores iniciales.

21. $\dfrac{dx}{dt} = -5x - y$
$\dfrac{dy}{dt} = 4x - y$
$x(1) = 0,\ y(1) = 1$

22. $\dfrac{dx}{dt} = y - 1$
$\dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y$
$x(0) = 0,\ y(0) = 0$

Modelos matemáticos

23. **Movimiento de un proyectil** Un proyectil disparado de una pistola tiene un peso $w = mg$ y una velocidad **v** tangente a su trayectoria de movimiento. Ignorando la resistencia del aire y las fuerzas que actúan sobre el proyectil excepto su peso, determine un sistema de ecuaciones diferenciales que describa su trayectoria de movimiento. Véase la figura 4.8.2. Resuelva el sistema. [*Sugerencia*: Use la segunda ley de Newton del movimiento en las direcciones *x* y *y*.]

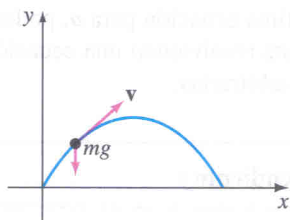


FIGURA 4.8.2 Trayectoria del proyectil del problema 23.

24. **Movimiento del proyectil con resistencia del aire** Determine un sistema de ecuaciones diferenciales que describa la trayectoria de movimiento en el problema 23 si la resistencia del aire es una fuerza retardadora **k** (de magnitud *k*) que actúa tangente a la trayectoria del proyectil pero opuesta a su movimiento. Véase la figura 4.8.3. Resuelva el sistema. [*Sugerencia*: **k** es un múltiplo de velocidad, digamos, $c\mathbf{v}$.]

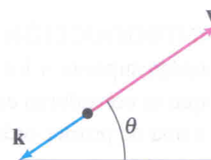


FIGURA 4.8.3 Fuerzas en el problema 24.

Problemas para analizar

25. Examine y analice el siguiente sistema:

$$Dx - 2Dy = t^2$$
$$(D + 1)x - 2(D + 1)y = 1.$$

Tarea para el laboratorio de computación

26. Examine de nuevo la figura 4.8.1 del ejemplo 3. Luego utilice una aplicación para determinar raíces para saber cuando el tanque *B* contiene más sal que el tanque *A*.

27. a) Lea nuevamente el problema 8 de los ejercicios 3.3. En ese problema se pidió demostrar que el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{50}x_1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{50}x_1 - \frac{2}{75}x_2$$
$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{2}{75}x_2 - \frac{1}{25}x_3$$

es un modelo para las cantidades de sal en los tanques de mezclado conectados *A*, *B* y *C* que se muestran en la figura 3.3.7. Resuelva el sistema sujeto a $x_1(0) = 15$, $x_2(t) = 10$, $x_3(t) = 5$.

b) Use un SAC para graficar $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ en el mismo plano coordenado (como en la figura 4.8.1) en el intervalo [0, 200].

c) Debido a que se bombea agua pura hacia el tanque *A*, es lógico que en algún momento la sal salga de los tres tanques. Utilice una aplicación de un SAC para encontrar raíces para determinar el tiempo cuando la cantidad de sal en cada recipiente sea menor o igual que 0.5 libras. ¿Cuándo son las cantidades de sal $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ simultáneamente menores o iguales que 0.5 libras?

4.9 ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

REPASO DE MATERIAL

- Secciones 2.2 y 2.5.
- Sección 4.2.
- También se recomienda un repaso de series de Taylor.

INTRODUCCIÓN A continuación se examinan las dificultades en torno a las ED *no lineales* de orden superior y los pocos métodos que producen soluciones analíticas. Dos de los métodos de solución que se consideran en esta sección emplean un cambio de variable para reducir una ED de segundo orden a una de primer orden. En ese sentido los métodos son análogos al material de la sección 4.2.

ALGUNAS DIFERENCIAS Entre las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales hay varias diferencias importantes. En la sección 4.1 vimos que las ecuaciones lineales homogéneas de orden dos o superior tienen la propiedad de que una combinación lineal de soluciones también es una solución (teorema 4.1.2). Las ecuaciones no lineales no tienen esta propiedad de superposición. Vea los problemas 1 y 18 de los ejercicios 4.9. Podemos encontrar soluciones generales de ED lineales de primer orden y ecuaciones de orden superior con coeficientes constantes. Aun cuando se pueda resolver una ecuación diferencial no lineal de primer orden en la forma de una familia uniparamétrica, esta familia no representa, como regla, una solución general. Es decir, las ED no lineales de primer orden pueden tener soluciones singulares, en tanto que las ecuaciones lineales no. Pero la principal diferencia entre las ecuaciones lineales y no lineales de orden dos o superior radica en el área de la solubilidad. Dada una ecuación lineal, hay una probabilidad de encontrar alguna forma de solución que se pueda analizar, una solución explícita o quizá una solución en la forma de una serie infinita (vea el capítulo 6). Por otro lado, las ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior desafían virtualmente la solución con métodos analíticos. Aunque esto podría sonar desalentador, aún hay cosas que se pueden hacer. Como se señaló al final de la sección 1.3, siempre es posible analizar de modo cualitativo y numérico una ED no lineal.

Desde el principio se aclaró que las ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior son importantes, digamos ¿quizá más que las lineales?, porque a medida que se ajusta un modelo matemático, por ejemplo, un sistema físico, se incrementa por igual la probabilidad de que este modelo de mayor definición sea no lineal.

Empezamos por mostrar un método analítico que *en ocasiones* permite determinar soluciones explícitas o implícitas de clases especiales de ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales.

REDUCCIÓN DE ORDEN Las ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden $F(x, y', y'') = 0$, donde falta la variable dependiente y, y $F(y, y', y'') = 0$, donde falta la variable independiente x, a veces se resuelven usando métodos de primer orden. Cada ecuación se reduce a una de primer orden por medio de la sustitución $u = y'$.

En el ejemplo siguiente se ilustra la técnica de sustitución para una ecuación de la forma $F(x, y', y'') = 0$. Si $u = y'$, entonces la ecuación diferencial se convierte en $F(x, u, u') = 0$. Si podemos resolver esta última ecuación para u, podemos encontrar a y por integración. Observe que como se está resolviendo una ecuación de segundo orden, su solución contendrá dos constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1 **Falta la variable dependiente *y***

Resuelva $y'' = 2x(y')^2$.

SOLUCIÓN Si hacemos $u = y'$, entonces $du/dx = y''$. Después de sustituir, la segunda ecuación diferencial se reduce a una ecuación de primer orden con variables separables; la variable independiente es x y la variable dependiente es u:

$$\frac{du}{dx} = 2xu^2 \quad \text{o} \quad \frac{du}{u^2} = 2x\,dx$$

$$\int u^{-2}\,du = \int 2x\,dx$$

$$-u^{-1} = x^2 + c_1^2.$$

La constante de integración se escribe como c_1^2 por conveniencia. La razón debe ser obvia en los pocos pasos siguientes. Debido a que $u^{-1} = 1/y'$, se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2 + c_1^2},$$

y así $$y = -\int \frac{dx}{x^2 + c_1^2} \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{c_1}\tan^{-1}\frac{x}{c_1} + c_2.$$ ■

A continuación se muestra cómo resolver una ecuación que tiene la forma $F(y, y', y'') = 0$. Una vez más se hace $u = y'$, pero debido a que falta la variable independiente x, esta sustitución se usa para convertir la ecuación diferencial en una en la que la variable independiente es y y la variable dependiente es u. Entonces utilizamos la regla de la cadena para calcular la segunda derivada de y:

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}.$$

En este caso la ecuación de primer orden que debemos resolver es

$$F\left(y, u, u\frac{du}{dy}\right) = 0.$$

EJEMPLO 2 Falta la variable independiente x

Resuelva $yy'' = (y')^2$.

SOLUCIÓN Con ayuda de $u = y'$, la regla de la cadena que se acaba de mostrar y de la separación de variables, la ecuación diferencial se convierte en

$$y\left(u\frac{du}{dy}\right) = u^2 \quad \text{o} \quad \frac{du}{u} = \frac{dy}{y}.$$

Entonces, integrando la última ecuación se obtiene $\ln|u| = \ln|y| + c_1$, que, a su vez, da $u = c_2 y$, donde la constante $\pm e^{c_1}$ se identifica como c_2. Ahora se vuelve a sustituir $u = dy/dx$, se separan de nuevo las variables, se integra y se etiquetan las constantes por segunda vez:

$$\int \frac{dy}{y} = c_2\int dx \quad \text{o} \quad \ln|y| = c_2x + c_3 \quad \text{o} \quad y = c_4e^{c_2x}.$$ ■

USO DE SERIES DE TAYLOR En algunos casos una solución de un problema con valores iniciales no lineales, en el que las condiciones iniciales se especifican en x_0, se puede aproximar mediante una serie de Taylor centrada en x_0.

EJEMPLO 3 Series de Taylor de un PVI

Supongamos que existe una solución del problema con valores iniciales

$$y'' = x + y - y^2, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1 \tag{1}$$

Si además se supone que la solución $y(x)$ del problema es analítica en 0, entonces $y(x)$ tiene un desarrollo en serie de Taylor centrado en 0:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{y^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \cdots. \tag{2}$$

Observe que se conocen los valores del primero y segundo términos en la serie (2) puesto que esos valores son las condiciones iniciales especificadas $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$. Además, la ecuación diferencial por sí misma define el valor de la segunda derivada en 0: $y''(0) = 0 + y(0) - y(0)^2 = 0 + (-1) - (-1)^2 = -2$. Entonces se pueden encontrar expresiones para las derivadas superiores y''', $y^{(4)}, \ldots$ calculando las derivadas sucesivas de la ecuación diferencial:

$$y'''(x) = \frac{d}{dx}(x + y - y^2) = 1 + y' - 2yy' \tag{3}$$

$$y^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}(1 + y' - 2yy') = y'' - 2yy'' - 2(y')^2 \tag{4}$$

$$y^{(5)}(x) = \frac{d}{dx}(y'' - 2yy'' - 2(y')^2) = y''' - 2yy''' - 6y'y'', \tag{5}$$

etcétera. Ahora usando $y(0) = -1$ y $y'(0) = 1$, se encuentra de (3) que $y'''(0) = 4$. De los valores $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$ y $y''(0) = -2$ se encuentra $y^{(4)}(0) = -8$ de (4). Con la información adicional de que $y'''(0) = 4$, entonces se ve de (5) que $y^{(5)}(0) = 24$. Por tanto de (2) los primeros seis términos de una solución en serie del problema con valores iniciales (1) son

$$y(x) = -1 + x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots. \qquad \blacksquare$$

USO DE UN PROGRAMA DE SOLUCIÓN NUMÉRICA Los métodos numéricos, como el de Euler o el de Runge-Kutta, se desarrollaron sólo para ecuaciones diferenciales de primer orden y luego se ampliaron a sistemas de ecuaciones de primer orden. Para analizar en forma numérica un problema con valores iniciales de n-ésimo orden, se expresa la EDO de n-ésimo orden como un sistema de n ecuaciones de primer orden. En resumen, aquí se muestra cómo se hace esto para un problema con valores iniciales de segundo orden: primero, se resuelve para y'', es decir, se escribe la ED en la forma normal $y'' = f(x, y, y')$ y después se hace que $y' = u$. Por ejemplo, si sustituimos $y' = u$ en

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = u_0, \tag{6}$$

entonces $y'' = u'$ y $y'(x_0) = u(x_0)$, por lo que el problema con valores iniciales (6) se convierte en

$$\textit{Resuelva:} \quad \begin{cases} y' = u \\ u' = f(x, y, u) \end{cases}$$

$$\textit{Sujeto a:} \quad y(x_0) = y_0,\ u(x_0) = u_0.$$

Sin embargo, se debe observar que un programa de solución numérica *podría no requerir** que se proporcione el sistema.

*Algunos programas de solución numérica sólo requieren que una ecuación diferencial de segundo orden sea expresada en la forma normal $y'' = f(x, y, y')$. La traducción de la única ecuación en un sistema de dos ecuaciones se construye en el programa de computadora, ya que la primera ecuación del sistema siempre es $y' = u$ y la segunda ecuación es $u' = f(x, y, u)$.

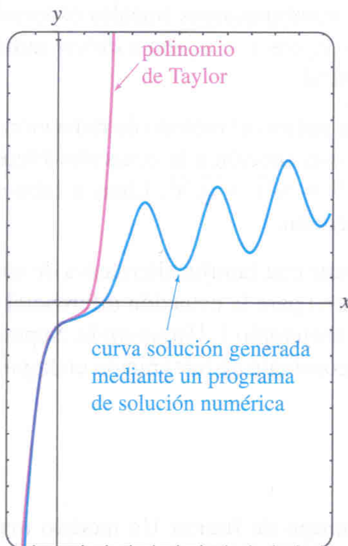


FIGURA 4.9.1 Comparación de dos soluciones aproximadas.

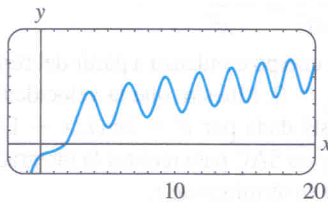


FIGURA 4.9.2 Curva solución numérica para el PVI en (1).

EJEMPLO 4 Análisis gráfico del ejemplo 3

Siguiendo el procedimiento anterior, se encuentra que el problema con valores iniciales de segundo orden del ejemplo 3 es equivalente a

$$\frac{dy}{dx} = u$$

$$\frac{du}{dx} = x + y - y^2$$

con condiciones iniciales $y(0) = -1$, $u(0) = 1$. Con ayuda de un programa de solución numérica, se obtiene la curva solución en azul en la figura 4.9.1. Por comparación, la gráfica del polinomio de Taylor de quinto grado $T_5(x) = -1 + x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ se muestra en rojo. Aunque no se conoce el intervalo de convergencia de la serie de Taylor obtenida en el ejemplo 3, la proximidad de las dos curvas en una vecindad del origen indica que la serie de potencias podría converger en el intervalo $(-1, 1)$. ■

CUESTIONES CUALITATIVAS La gráfica en azul de la figura 4.9.1 origina algunas preguntas de naturaleza cualitativa: ¿la solución del problema con valores iniciales original es oscilatoria conforme $x \to \infty$? La gráfica generada con un programa de solución numérica en el intervalo más grande, que se muestra en la figura 4.9.2 parecería *sugerir* que la respuesta es sí. Pero este simple ejemplo o incluso un grupo de ejemplos, no responde la pregunta básica en cuanto a si *todas* las soluciones de la ecuación diferencial $y'' = x + y - y^2$ son de naturaleza oscilatoria. También, ¿qué está sucediendo con la curva solución de la figura 4.9.2 conforme x está cerca de -1? ¿Cuál es el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial conforme $x \to \infty$? ¿Están acotadas las soluciones conforme $x \to \infty$? Preguntas como éstas no son fáciles de responder, en general, para ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales. Pero ciertas clases de ecuaciones de segundo orden se prestan a un análisis cualitativo sistemático y éstas, al igual que las ecuaciones de primer orden que se obtuvieron en la sección 2.1, son de la clase que no tiene dependencia explícita en la variable independiente. Las EDO de segundo orden de la forma

$$F(y, y', y'') = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f(y, y'),$$

ecuaciones libres de la variable independiente x, se llaman **autónomas**. La ecuación diferencial del ejemplo 2 es autónoma y debido a la presencia del término x en su miembro derecho, la ecuación del ejemplo 3 es autónoma. Para un tratamiento profundo del tema de estabilidad de ecuaciones diferenciales autónomas de segundo orden y sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales, refiérase al capítulo 10 de *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera*.

EJERCICIOS 4.9

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-6.

En los problemas 1 y 2 compruebe que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial dada pero que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ en general, no es una solución.

1. $(y'')^2 = y^2$; $y_1 = e^x, y_2 = \cos x$

2. $yy'' = \frac{1}{2}(y')^2$; $y_1 = 1, y_2 = x^2$

En los problemas 3 a 8 resuelva la ecuación diferencial usando la sustitución $u = y'$.

3. $y'' + (y')^2 + 1 = 0$ **4.** $y'' = 1 + (y')^2$

5. $x^2y'' + (y')^2 = 0$ **6.** $(y + 1)y'' = (y')^2$

7. $y'' + 2y(y')^3 = 0$ **8.** $y^2y'' = y'$

9. Considere el problema con valores iniciales

$$y'' + yy' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

a) Use la ED y un programa de solución numérica para trazar la curva solución.

b) Encuentre una solución explícita del PVI. Use un programa de graficación para trazar la solución.

c) Determine un intervalo de definición para la solución del inciso b).

10. Encuentre dos soluciones del problema con valores iniciales

$$(y'')^2 + (y')^2 = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Use un programa de solución numérica para trazar la gráfica de las curvas solución.

En los problemas 11 y 12 demuestre que la sustitución $u = y'$ conduce a una ecuación de Bernoulli. Resuelva esta ecuación (véase la sección 2.5).

11. $xy'' = y' + (y')^3$ **12.** $xy'' = y' + x(y')^2$

En los problemas 13 a 16 proceda como en el ejemplo 3 y obtenga los primeros seis términos no cero de una solución en serie de Taylor, centrada en 0, del problema con valores iniciales. Use un programa de solución numérica para comparar la curva solución con la gráfica del polinomio de Taylor.

13. $y'' = x + y^2, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$

14. $y'' + y^2 = 1, \quad y(0) = 2, y'(0) = 3$

15. $y'' = x^2 + y^2 - 2y', \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$

16. $y'' = e^y, \quad y(0) = 0, y'(0) = -1$

17. En cálculo, la curvatura de una línea que se define por medio de una función $y = f(x)$ es

$$\kappa = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Encuentre $y = f(x)$ para la cual $\kappa = 1$. [*Sugerencia*: Por simplicidad, desprecie las constantes de integración.]

Problemas para analizar

18. En el problema 1 vimos que $\cos x$ y e^x eran soluciones de la ecuación no lineal $(y'')^2 - y^2 = 0$. Compruebe que $\operatorname{sen} x$ y e^{-x} también son soluciones. Sin intentar resolver la ecuación diferencial, analice cómo se pueden encontrar estas soluciones usando su conocimiento acerca de las ecuaciones lineales. Sin intentar comprobar, analice por qué las combinaciones lineales $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$ y $y = c_2e^{-x} + c_4 \operatorname{sen} x$ no son, en general, soluciones, pero las dos combinaciones lineales especiales $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ y $y = c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$ *deben* satisfacer la ecuación diferencial.

19. Analice cómo se puede aplicar el método de reducción de orden considerado en esta sección a la ecuación diferencial de tercer orden $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$. Lleve a cabo sus ideas y resuelva la ecuación.

20. Explique cómo encontrar una familia alternativa de soluciones de dos parámetros para la ecuación diferencial no lineal $y'' = 2x(y')^2$ en el ejemplo 1. [*Sugerencia*: Suponga que $-c_1^2$ se usa como constante de integración en lugar de $+c_1^2$.]

Modelos matemáticos

21. Movimiento de un campo de fuerza Un modelo matemático para la posición $x(t)$ de un cuerpo con movimiento rectilíneo en el eje x en un campo de fuerza inverso del cuadrado de x es

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2}{x^2}.$$

Suponga que en $t = 0$ el cuerpo comienza a partir del reposo en la posición $x = x_0$, $x_0 > 0$. Muestre que la velocidad del cuerpo en el tiempo t está dada por $v^2 = 2k^2(1/x - 1/x_0)$. Use la última expresión y un SAC para realizar la integración para expresar al tiempo t en términos de x.

22. Un modelo matemático para la posición $x(t)$ de un objeto en movimiento es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \operatorname{sen} x = 0.$$

Use un programa de solución numérica para investigar en forma gráfica las soluciones de la ecuación sujeta a $x(0) = 0$, $x'(0) = x_1$, $x_1 \geq 0$. Analice el movimiento del objeto para $t \geq 0$ y para diferentes elecciones de x_1. Investigue la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \operatorname{sen} x = 0$$

en la misma forma. Proponga una interpretación física posible del término dx/dt.

REPASO DEL CAPÍTULO 4

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-6.

Conteste los problemas 1 al 4 sin consultar el final del libro. Complete el espacio en blanco o conteste falso o verdadero.

1. La única solución del problema con valores iniciales $y'' + x^2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ es __________.

2. Para el método de coeficientes indeterminados, la forma supuesta de la solución particular y_p para $y'' - y = 1 + e^x$ es __________.

3. Un múltiplo constante de una solución de una ecuación diferencial lineal es también una solución. __________

4. Si el conjunto que consiste en dos funciones f_1 y f_2 es linealmente independiente en un intervalo I, entonces el Wronskiano $W(f_1, f_2) \neq 0$ para toda x en I. __________

5. Dé un intervalo en el que el conjunto de dos funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x|x|$ es linealmente independiente.

Después indique un intervalo en el que el conjunto formado por f_1 y f_2 es linealmente dependiente.

6. Sin la ayuda del Wronskiano, determine si el conjunto de funciones es linealmente independiente o dependiente en el intervalo indicado.
   a) $f_1(x) = \ln x, f_2(x) = \ln x^2, (0, \infty)$
   b) $f_1(x) = x^n, f_2(x) = x^{n+1}, n = 1, 2, \ldots, (-\infty, \infty)$
   c) $f_1(x) = x, f_2(x) = x + 1, (-\infty, \infty)$
   d) $f_1(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), f_2(x) = \operatorname{sen} x, (-\infty, \infty)$
   e) $f_1(x) = 0, f_2(x) = x, (-5, 5)$
   f) $f_1(x) = 2, f_2(x) = 2x, (-\infty, \infty)$
   g) $f_1(x) = x^2, f_2(x) = 1 - x^2, f_3(x) = 2 + x^2, (-\infty, \infty)$
   h) $f_1(x) = xe^{x+1}, f_2(x) = (4x - 5)e^x,$
   $f_3(x) = xe^x, (-\infty, \infty)$

7. Suponga que $m_1 = 3$, $m_2 = -5$ y $m_3 = 1$ son raíces de multiplicidad uno, dos y tres, respectivamente, de una ecuación auxiliar. Escriba la solución general de la ED lineal homogénea correspondiente si es
   a) una ecuación con coeficientes constantes,
   b) una ecuación de Cauchy-Euler.

8. Considere la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = g(x)$, donde a, b y c son constantes. Elija las funciones de entrada $g(x)$ para las que es aplicable el método de coeficientes indeterminados y las funciones de entrada para las que es aplicable el método de variación de parámetros.
   a) $g(x) = e^x \ln x$
   b) $g(x) = x^3 \cos x$
   c) $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x}$
   d) $g(x) = 2x^{-2}e^x$
   e) $g(x) = \operatorname{sen}^2 x$
   f) $g(x) = \dfrac{e^x}{\operatorname{sen} x}$

En los problemas del 9 a 24 use los procedimientos desarrollados en este capítulo para encontrar la solución general de cada ecuación diferencial.

9. $y'' - 2y' - 2y = 0$
10. $2y'' + 2y' + 3y = 0$
11. $y''' + 10y'' + 25y' = 0$
12. $2y''' + 9y'' + 12y' + 5y = 0$
13. $3y''' + 10y'' + 15y' + 4y = 0$
14. $2y^{(4)} + 3y''' + 2y'' + 6y' - 4y = 0$
15. $y'' - 3y' + 5y = 4x^3 - 2x$
16. $y'' - 2y' + y = x^2e^x$
17. $y''' - 5y'' + 6y' = 8 + 2 \operatorname{sen} x$
18. $y''' - y'' = 6$
19. $y'' - 2y' + 2y = e^x \tan x$
20. $y'' - y = \dfrac{2e^x}{e^x + e^{-x}}$
21. $6x^2y'' + 5xy' - y = 0$
22. $2x^3y''' + 19x^2y'' + 39xy' + 9y = 0$
23. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x^4 + x^2$
24. $x^2y'' - xy' + y = x^3$

25. Escriba la forma de la solución general $y = y_c + y_p$ de la ecuación diferencial en los dos casos $\omega \neq \alpha$ y $\omega = \alpha$. No determine los coeficientes en y_p.
   a) $y'' + \omega^2 y = \operatorname{sen} \alpha x$
   b) $y'' - \omega^2 y = e^{\alpha x}$

26. **a)** Dado que $y = \operatorname{sen} x$ es una solución de
   $$y^{(4)} + 2y''' + 11y'' + 2y' + 10y = 0,$$
   encuentre la solución general de la ED *sin la ayuda de una calculadora o computadora*.
   b) Encuentre una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes para la cual $y_1 = 1$ y $y_2 = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada y $y_p = \frac{1}{2}x^2 - x$ es una solución particular de la ecuación homogénea.

27. **a)** Escriba completamente la solución general de la ED de cuarto orden $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ en términos de funciones hiperbólicas.
   b) Escriba la forma de una solución particular de $y^{(4)} - 2y'' + y = \operatorname{senh} x$.

28. Considere la ecuación diferencial
   $$x^2y'' - (x^2 + 2x)y' + (x + 2)y = x^3.$$
   Compruebe que $y_1 = x$ es una solución de la ecuación homogénea asociada. Después demuestre que el método de reducción de orden analizado en la sección 4.2 conduce a una segunda solución y_2 de la ecuación homogénea así como a una solución particular y_p de la ecuación no homogénea. Forme la solución general de la ED en el intervalo $(0, \infty)$.

En los problemas 29 a 34 resuelva la ecuación diferencial sujeta a las condiciones indicadas.

29. $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y(\pi) = -1$
30. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(-1) = 0, y'(0) = 0$
31. $y'' - y = x + \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 2, y'(0) = 3$
32. $y'' + y = \sec^3 x, \quad y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$

33. $y'y'' = 4x, \quad y(1) = 5, y'(1) = 2$

34. $2y'' = 3y^2, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$

35. a) Use un SAC como ayuda para encontrar las raíces de la ecuación auxiliar para

$$12y^{(4)} + 64y''' + 59y'' - 23y' - 12y = 0.$$

Dé la solución general de la ecuación.

b) Resuelva la ED del inciso a) sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = -1, y'(0) = 2, y''(0) = 5, y'''(0) = 0$. Use un SAC como ayuda para resolver el sistema resultante de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

36. Encuentre un miembro de la familia de soluciones de $xy'' + y' + \sqrt{x} = 0$ cuya gráfica es tangente al eje x en $x = 1$. Use una aplicación para graficar y obtenga la curva solución.

En los problemas 37 a 40 use la eliminación sistemática para resolver cada sistema.

37. $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y + 1$

$\dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} = y + 3$

38. $\dfrac{dx}{dt} = 2x + y + t - 2$

$\dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y - 4t$

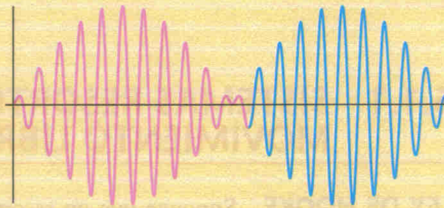
39. $(D - 2)x - y = -e^t$

$-3x + (D - 4)y = -7e^t$

40. $(D + 2)x + (D + 1)y = \operatorname{sen} 2t$

$5x + (D + 3)y = \cos 2t$

5 MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR



Ya hemos visto que una sola ecuación puede servir como modelo matemático para varios sistemas físicos. Por esta razón sólo examinamos una aplicación, el movimiento de una masa sujeta a un resorte, que se trata en la sección 5.1. Excepto por la terminología y las interpretaciones físicas de los cuatro términos de la ecuación lineal $ay'' + by' + cy = g(t)$, las matemáticas de, digamos, un circuito eléctrico en serie son idénticas a las de un sistema vibratorio masa/resorte. Las formas de esta ED de segundo orden se presentan en el análisis de problemas en diversas áreas de la ciencia e ingeniería. En la sección 5.1 se tratan exclusivamente problemas con valores iniciales, mientras que en la sección 5.2 examinamos aplicaciones descritas por problema con valores en la frontera. También en la sección 5.2 vemos cómo algunos problemas con valores en la frontera conducen a los importantes conceptos con *eigenvalores* y *funciones propias* (eigenfunciones). La sección 5.3 inicia con un análisis acerca de las diferencias entre los resortes lineales y no lineales; entonces se muestra cómo el péndulo simple y un cable suspendido conducen a modelos matemáticos no lineales.

5.1 MODELOS LINEALES: PROBLEMAS CON VALORES INICIALES

REPASO DE MATERIAL

- Secciones 4.1, 4.3 y 4.4
- Problemas 29 a 36 de los ejercicios 4.3
- Problemas 27 a 36 de los ejercicios 4.4

INTRODUCCIÓN En esta sección, se van a considerar varios sistemas dinámicos lineales en los que cada modelo matemático es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes junto con condiciones iniciales especificadas en un tiempo que tomaremos como $t = 0$:

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = g(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1.$$

Recuerde que la función g es la **entrada**, **función de conducción** o **función forzada** del sistema. Una solución $y(t)$ de la ecuación diferencial en un intervalo I que contiene a $t = 0$ que satisface las condiciones iniciales se llama **salida** o **respuesta** del sistema.

5.1.1 SISTEMAS RESORTE/MASA: MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO

LEY DE HOOKE Suponga que un resorte se suspende verticalmente de un soporte rígido y luego se le fija una masa m a su extremo libre. Por supuesto, la cantidad de alargamiento o elongación del resorte depende de la masa; masas con pesos diferentes alargan el resorte en cantidades diferentes. Por la ley de Hooke, el resorte mismo ejerce una fuerza restauradora F opuesta a la dirección de elongación y proporcional a la cantidad de elongación s y es expresada en forma simple como $F = ks$, donde k es una constante de proporcionalidad llamada **constante de resorte**. El resorte se caracteriza en esencia por el número k. Por ejemplo, si una masa que pesa 10 libras hace que un resorte se alargue $\frac{1}{2}$ pie, entonces $10 = k\left(\frac{1}{2}\right)$ implica que $k = 20$ lb/pie. Entonces necesariamente una masa que pesa, digamos, 8 libras alarga el mismo resorte sólo $\frac{2}{5}$ pie.

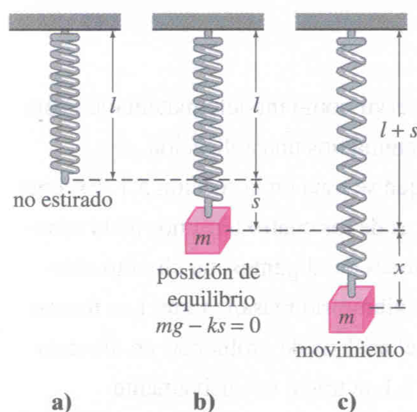


FIGURA 5.1.1 Sistema masa/resorte.

SEGUNDA LEY DE NEWTON Después de que se une una masa m a un resorte, ésta alarga el resorte una cantidad s y logra una posición de equilibrio en la cual su peso W se equilibra mediante la fuerza restauradora ks. Recuerde que el peso se define mediante $W = mg$, donde la masa se mide en slugs, kilogramos o gramos y $g = 32$ pies/s², 9.8 m/s², o bien 980 cm/s², respectivamente. Como se indica en la figura 5.1.1b, la condición de equilibrio es $mg = ks$ o $mg - ks = 0$. Si la masa se desplaza por una cantidad x de su posición de equilibrio, la fuerza restauradora del resorte es entonces $k(x + s)$. Suponiendo que no hay fuerzas restauradoras que actúan sobre el sistema y suponiendo que la masa vibra libre de otras fuerzas externas —**movimiento libre**— se puede igualar la segunda ley de Newton con la fuerza neta o resultante de la fuerza restauradora y el peso.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s + x) + mg = -kx + \underbrace{mg - ks}_{\text{cero}} = -kx. \tag{1}$$

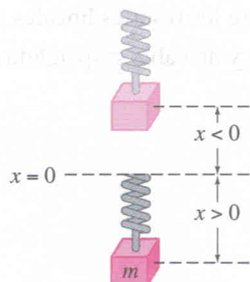


FIGURA 5.1.2 La dirección hacia abajo de la posición de equilibrio es positiva.

El signo negativo en (1) indica que la fuerza restauradora del resorte actúa opuesta a la dirección de movimiento. Además, se adopta la convención de que los desplazamientos medidos abajo de la posición de equilibrio son positivos. Véase la figura 5.1.2.

ED DE UN MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO Dividiendo (1) entre la masa m, se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden $d^2x/dt^2 + (k/m)x = 0$, o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{2}$$

donde $\omega^2 = k/m$. Se dice que la ecuación (2) describe el **movimiento armónico simple** o **movimiento libre no amortiguado**. Dos condiciones iniciales obvias relacionadas con (2) son $x(0) = x_0$ y $x'(0) = x_1$, el desplazamiento inicial y la velocidad inicial de la masa, respectivamente. Por ejemplo, si $x_0 > 0$, $x_1 < 0$, la masa parte de un punto *abajo* de la posición de equilibrio con una velocidad impartida hacia *arriba*. Cuando $x'(0) = 0$, se dice que la masa se libera a partir del reposo. Por ejemplo, si $x_0 < 0$, $x_1 = 0$, la masa se libera desde el *reposo* de un punto $|x_0|$ unidades *arriba* de la posición de equilibrio.

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO Para resolver la ecuación (2), se observa que la solución de su ecuación auxiliar $m^2 + \omega^2 = 0$ son los números complejos $m_1 = \omega_i$, $m_2 = -\omega_i$. Así de (8) de la sección 4.3 se encuentra la solución general de (2) es

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t. \tag{3}$$

El **periodo** del movimiento descrito por la ecuación (3) es $T = 2\pi/\omega$. El número T representa el tiempo (medido en segundos) que tarda la masa en ejecutar un ciclo de movimiento. Un ciclo es una oscilación completa de la masa, es decir, la masa m que se mueve, por ejemplo, al punto mínimo abajo de la posición de equilibrio hasta el punto más alto arriba de la misma y luego de regreso al punto mínimo. Desde un punto de vista gráfico, $T = 2\pi/\omega$ segundos es la longitud del intervalo de tiempo entre dos máximos sucesivos (o mínimos) de $x(t)$. Recuerde que un máximo de $x(t)$ es el desplazamiento positivo correspondiente a la masa que alcanza su distancia máxima debajo de la posición de equilibrio, mientras que un mínimo de $x(t)$ es el desplazamiento negativo correspondiente a la masa que logra su altura máxima arriba de la posición de equilibrio. Se hace referencia a cualquier caso como un **desplazamiento extremo** de la masa. La **frecuencia** de movimiento es $f = 1/T = \omega/2\pi$ y es el número de ciclos completado cada segundo. Por ejemplo, si $x(t) = 2 \cos 3\pi t - 4 \operatorname{sen} 3\pi t$, entonces el periodo es $T = 2\pi/3\pi = 2/3$ s y la frecuencia es $f = 3/2$ ciclos/s. Desde un punto de vista esquemático la gráfica de $x(t)$ se repite cada $\frac{2}{3}$ de segundo, es decir, $x\left(t + \frac{2}{3}\right) = x(t)$, y $\frac{3}{2}$ ciclos de la gráfica se completan cada segundo (o, equivalentemente, tres ciclos de la gráfica se completan cada dos segundos). El número $\omega = \sqrt{k/m}$ (medido en radianes por segundo) se llama **frecuencia circular** del sistema. Dependiendo de qué libro lea, tanto $f = \omega/2\pi$ como ω se conocen como **frecuencia natural** del sistema. Por último, cuando se emplean las condiciones iniciales para determinar las constantes c_1 y c_2 en (3), se dice que la solución particular resultante o respuesta es la **ecuación de movimiento**.

EJEMPLO 1 Movimiento libre no amortiguado

Una masa que pesa 2 libras alarga 6 pulgadas un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está 8 pulgadas abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $\frac{4}{3}$ pie/s. Determine la ecuación de movimiento.

SOLUCIÓN Debido a que se está usando el sistema de unidades de ingeniería, las mediciones dadas en términos de pulgadas se deben convertir en pies: 6 pulg $= \frac{1}{2}$ pie; 8 pulg $= \frac{2}{3}$ pie. Además, se deben convertir las unidades de peso dadas en libras a unidades de masa. De $m = W/g$ tenemos que $m = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ slug. También, de la ley de Hooke, $2 = k\left(\frac{1}{2}\right)$ implica que la constante de resorte es $k = 4$ lb/pie. Por lo que, de la ecuación (1) se obtiene

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0.$$

El desplazamiento inicial y la velocidad inicial son $x(0) = \frac{2}{3}$, $x'(0) = -\frac{4}{3}$, donde el signo negativo en la última condición es una consecuencia del hecho de que a la masa se le da una velocidad inicial en la dirección negativa o hacia arriba.

Ahora $\omega^2 = 64$ o $\omega = 8$, por lo que la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t\,. \tag{4}$$

Aplicando las condiciones iniciales a $x(t)$ y $x'(t)$ se obtiene $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = -\frac{1}{6}$. Por tanto, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = \frac{2}{3}\cos 8t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 8t. \tag{5}$$ ■

FORMA ALTERNATIVA DE $X(t)$ Cuando $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, la **amplitud** A de las vibraciones libres no es evidente a partir de la inspección de la ecuación (3). Por ejemplo, aunque la masa del ejemplo 1 se desplaza inicialmente $\frac{2}{3}$ pie más allá de la posición de equilibrio, la amplitud de las vibraciones es un número mayor que $\frac{2}{3}$. Por tanto, suele ser conveniente convertir una solución de la forma (3) en una forma más simple

$$x(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \phi), \tag{6}$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y ϕ es un **ángulo de fase** definido por

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi &= \frac{c_1}{A} \\ \cos\phi &= \frac{c_2}{A} \end{aligned}\right\} \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}. \tag{7}$$

Para comprobar esto se desarrolla la ecuación (6) usando la fórmula de suma para la función seno:

$$A\operatorname{sen}\omega t\cos\phi + A\cos\omega t\operatorname{sen}\phi = (A\operatorname{sen}\phi)\cos\omega t + (A\cos\phi)\operatorname{sen}\omega t. \tag{8}$$

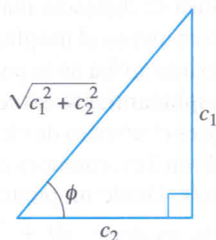


FIGURA 5.1.3 Una relación entre $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ y el ángulo de fase ϕ.

Se deduce de la figura 5.1.3 que si ϕ está definida por

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{c_1}{A}, \qquad \cos\phi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{c_2}{A},$$

entonces la ecuación (8) se convierte en

$$A\frac{c_1}{A}\cos\omega t + A\frac{c_2}{A}\operatorname{sen}\omega t = c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t = x(t).$$

EJEMPLO 2 Forma alternativa de solución (5)

En vista de la descripción anterior, se puede escribir la solución (5) en la forma alternativa $x(t) = A\operatorname{sen}(8t + \phi)$. El cálculo de la amplitud es directo, $A = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (-\frac{1}{6})^2} = \sqrt{\frac{17}{36}} \approx 0.69$ pies, pero se debe tener cuidado al calcular el ángulo de fase ϕ definido por (7). Con $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = -\frac{1}{6}$ se encuentra $\tan\phi = -4$ y, con una calculadora se obtiene $\tan^{-1}(-4) = -1.326$ rad. Este *no* es el ángulo de fase, puesto que $\tan^{-1}(-4)$ se localiza en el *cuarto cuadrante* y por tanto contradice el hecho de que $\operatorname{sen}\phi > 0$ y $\cos\phi < 0$ porque $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$. Por tanto, se debe considerar que ϕ es un ángulo del *segundo cuadrante* $\phi = \pi + (-1.326) = 1.816$ rad. Así la ecuación (5) es igual a

$$x(t) = \frac{\sqrt{17}}{6}\operatorname{sen}(8t + 1.816). \tag{9}$$

El periodo de esta función es $T = 2\pi/8 = \pi/4$ s. ■

En la figura 5.1.4a se ilustra la masa del ejemplo 2 que recorre aproximadamente dos ciclos completos de movimiento. Leyendo de izquierda a derecha, las primeras cinco posiciones (marcadas con puntos negros) corresponden a la posición inicial de la masa debajo de la posición de equilibrio $\left(x = \frac{2}{3}\right)$, la masa que pasa por la posición

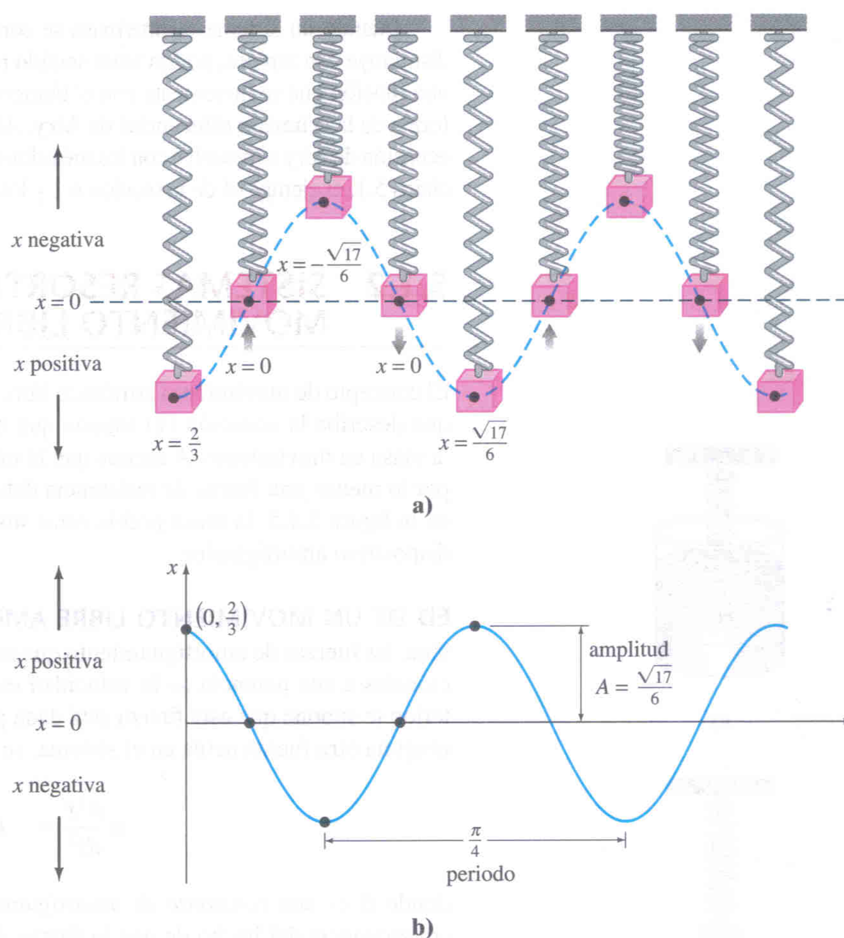


FIGURA 5.1.4 Movimiento armónico simple.

de equilibrio por primera vez en dirección ascendente ($x = 0$), la masa en su desplazamiento extremo arriba de la posición de equilibrio ($x = -\sqrt{17}/6$), la masa en la posición de equilibrio para la segunda vez que se dirige hacia arriba ($x = 0$) y la masa en su desplazamiento extremo abajo de la posición de equilibrio ($x = \sqrt{17}/6$). Los puntos negros sobre la gráfica de (9), que se presenta en la figura 5.1.4b también concuerdan con las cinco posiciones antes mencionadas. Sin embargo, observe que en la figura 5.1.4b la dirección positiva en el plano *tx* es la dirección ascendente usual y por tanto, es opuesta a la dirección positiva que se indica en la figura 5.1.4a. Por lo que la gráfica sólida azul que representa el movimiento de la masa en la figura 5.1.4b es la reflexión por el eje *t* de la curva punteada azul de la figura 5.1.4a.

La forma (6) es muy útil porque es fácil encontrar valores de tiempo para los cuales la gráfica de $x(t)$ cruza el eje t positivo (la recta $x = 0$). Se observa que $\text{sen}(\omega t + \phi) = 0$ cuando $\omega t + \phi = n\pi$, donde n es un entero no negativo.

SISTEMAS CON CONSTANTES DE RESORTE VARIABLES En el modelo apenas analizado se supuso una situación ideal, una en la que las características físicas del resorte no cambian con el tiempo. No obstante, en la situación no ideal, parece razonable esperar que cuando un sistema resorte/masa está en movimiento durante un largo tiempo, el resorte se debilita; en otras palabras, varía la "constante de resorte", de manera más específica, decae con el tiempo. En un modelo para el **resorte cada vez más viejo** la constante de resorte k en (1) se reemplaza con la función decreciente $K(t) = ke^{-\alpha t}$, $k > 0$, $\alpha > 0$. La ecuación diferencial lineal $mx'' + ke^{-\alpha t}x = 0$ no se puede resolver con los métodos considerados en el capítulo 4. Sin embargo, es posible obtener dos soluciones linealmente independientes con los métodos del capítulo 6. Véase el problema 15 en los ejercicios 5.1, el ejemplo 4 de la sección 6.3 y los problemas 33 y 39 de los ejercicios 6.3.

Cuando un sistema resorte/masa se somete a un ambiente en el cual la temperatura disminuye con rapidez, podría tener sentido reemplazar la constante k con $K(t) = kt$, $k > 0$, una función que se incrementa con el tiempo. El modelo resultante, $mx'' + ktx = 0$, es una forma de la **ecuación diferencial de Airy**. Al igual que la ecuación para un resorte viejo, la ecuación de Airy se resuelve con los métodos del capítulo 6. Véase el problema 16 de los ejercicios 5.1, el ejemplo 4 de la sección 6.1 y los problemas 34, 35 y 40 de los ejercicios 6.3.

5.1.2 SISTEMAS RESORTE/MASA: MOVIMIENTO LIBRE AMORTIGUADO

El concepto de movimiento armónico libre es un poco irreal, puesto que el movimiento que describe la ecuación (1) supone que no hay fuerzas retardadoras actuando sobre la masa en movimiento. A menos que la masa se suspenda en un vacío perfecto, habrá por lo menos una fuerza de resistencia debida al medio circundante. Como se muestra en la figura 5.1.5, la masa podría estar suspendida en un medio viscoso o unida a un dispositivo amortiguador.

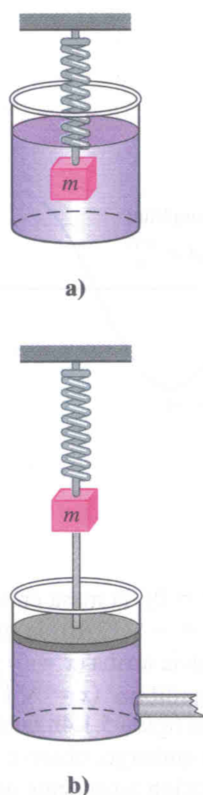


FIGURA 5.1.5 Dispositivos de amortiguamiento.

ED DE UN MOVIMIENTO LIBRE AMORTIGUADO En el estudio de la mecánica, las fuerzas de amortiguamiento que actúan sobre un cuerpo se consideran proporcionales a una potencia de la velocidad instantánea. En particular, en el análisis posterior se supone que esta fuerza está dada por un múltiplo constante de dx/dt. Cuando ninguna otra fuerza actúa en el sistema, se tiene de la segunda ley de Newton que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}, \tag{10}$$

donde β es una *constante de amortiguamiento* positiva y el signo negativo es una consecuencia del hecho de que la fuerza de amortiguamiento actúa en una dirección opuesta al movimiento.

Dividiendo la ecuación (10) entre la masa m, se encuentra que la ecuación diferencial del **movimiento libre amortiguado** es $d^2x/dt^2 + (\beta/m)dx/dt + (k/m)x = 0$ o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \tag{11}$$

donde

$$2\lambda = \frac{\beta}{m}, \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{12}$$

El símbolo 2λ se usa sólo por conveniencia algebraica, porque la ecuación auxiliar es $m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$ y las raíces correspondientes son entonces

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, \qquad m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Ahora se pueden distinguir tres casos posibles dependiendo del signo algebraico de $\lambda^2 - \omega^2$. Puesto que cada solución contiene el *factor de amortiguamiento* $e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, los desplazamientos de la masa se vuelven despreciables conforme el tiempo t aumenta.

CASO I: $\lambda^2 - \omega^2 > 0$ En esta situación el sistema está **sobreamortiguado** porque el coeficiente de amortiguamiento β es grande comparado con la constante del resorte k. La solución correspondiente de (11) es $x(t) = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}$ o

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t} + c_2e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t}\right). \tag{13}$$

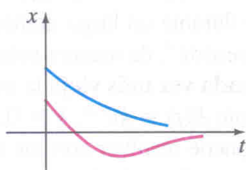


FIGURA 5.1.6 Movimiento de un sistema sobreamortiguado.

Esta ecuación representa un movimiento uniforme y no oscilatorio. En la figura 5.1.6 se muestran dos gráficas posibles de $x(t)$.

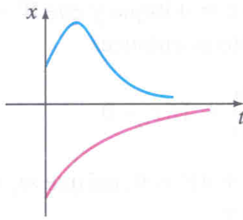


FIGURA 5.1.7 Movimiento de un sistema críticamente amortiguado.

CASO II: $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ Este sistema está **críticamente amortiguado** porque cualquier ligera disminución en la fuerza de amortiguamiento daría como resultado un movimiento oscilatorio. La solución general de (11) es $x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_1 t}$ o

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t). \tag{14}$$

En la figura 5.1.7 se presentan algunas gráficas típicas de movimiento. Observe que el movimiento es bastante similar al de un sistema sobreamortiguado. También es evidente de (14) que la masa puede pasar por la posición de equilibrio a lo más una vez.

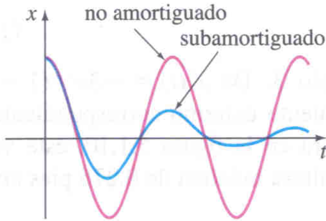


FIGURA 5.1.8 Movimiento de un sistema subamortiguado.

CASO III: $\lambda^2 - \omega^2 < 0$ En este caso el sistema está **subamortiguado** puesto que el coeficiente de amortiguamiento es pequeño comparado con la constante del resorte. Las raíces m_1 y m_2 ahora son complejas:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,i, \qquad m_2 = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,i.$$

Así que la ecuación general de la ecuación (11) es

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t\right). \tag{15}$$

Como se indica en la figura 5.1.8, el movimiento descrito por la ecuación (15) es oscilatorio; pero debido al coeficiente $e^{-\lambda t}$, las amplitudes de vibración $\to 0$ cuando $t \to \infty$.

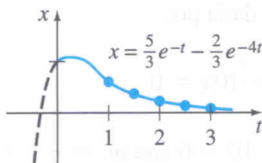
EJEMPLO 3 Movimiento sobreamortiguado

Se comprueba fácilmente que la solución del problema con valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1$$

es

$$x(t) = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}. \tag{16}$$



a)

t	$x(t)$
1	0.601
1.5	0.370
2	0.225
2.5	0.137
3	0.083

b)

FIGURA 5.1.9 Sistema sobreamortiguado.

El problema se puede interpretar como representativo del movimiento sobreamortiguado de una masa sobre un resorte. La masa se libera al inicio de una posición una unidad *abajo* de la posición de equilibrio con velocidad *descendente* de 1 pie/s.

Para graficar $x(t)$, se encuentra el valor de t para el cual la función tiene un extremo, es decir, el valor de tiempo para el cual la primera derivada (velocidad) es cero. Derivando la ecuación (16) se obtiene $x'(t) = -\frac{5}{3}e^{-t} + \frac{8}{3}e^{-4t}$, así $x'(t) = 0$ implica que $e^{3t} = \frac{8}{5}$ o $t = \frac{1}{3}\ln\frac{8}{5} = 0.157$. Se tiene de la prueba de la primera derivada, así como de la intuición física, que $x(0.157) = 1.069$ pies es en realidad un máximo. En otras palabras, la masa logra un desplazamiento extremo de 1.069 pies abajo de la posición de equilibrio.

Se debe comprobar también si la gráfica cruza el eje t, es decir, si la masa pasa por la posición de equilibrio. En este caso tal cosa no puede suceder, porque la ecuación $x(t) = 0$, o $e^{3t} = \frac{2}{5}$, tiene una solución irrelevante desde el punto de vista físico $t = \frac{1}{3}\ln\frac{2}{5} = -0.305$.

En la figura 5.1.9 se presenta la gráfica de $x(t)$, junto con algunos otros datos pertinentes. ■

EJEMPLO 4 Movimiento críticamente amortiguado

Una masa que pesa 8 libras alarga 2 pies un resorte. Suponiendo que una fuerza amortiguada que es igual a dos veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema, determine la ecuación de movimiento si la masa inicial se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 3 pies/s.

SOLUCIÓN De la ley de Hooke se ve que $8 = k(2)$ da $k = 4$ lb/pie y que $W = mg$ da $m = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ slug. La ecuación diferencial de movimiento es entonces

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 2\frac{dx}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0. \tag{17}$$

La ecuación auxiliar para (17) es $m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2 = 0$, así que $m_1 = m_2 = -4$. Por tanto el sistema está críticamente amortiguado y

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}. \tag{18}$$

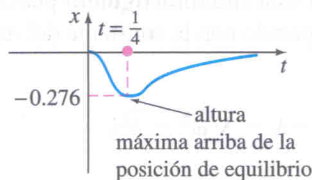


FIGURA 5.1.10 Sistema críticamente amortiguado.

Aplicando las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = -3$, se encuentra, a su vez, que $c_1 = 0$ y $c_2 = -3$. Por tanto la ecuación de movimiento es

$$x(t) = -3te^{-4t}. \tag{19}$$

Para graficar $x(t)$, se procede como en el ejemplo 3. De $x'(t) = -3e^{-4t}(1 - 4t)$ vemos que $x'(t) = 0$ cuando $t = \frac{1}{4}$. El desplazamiento extremo correspondiente es $x\left(\frac{1}{4}\right) = -3\left(\frac{1}{4}\right)e^{-1} = -0.276$ pies. Como se muestra en la figura 5.1.10, este valor se interpreta para indicar que la masa alcanza una altura máxima de 0.276 pies arriba de la posición de equilibrio. ■

EJEMPLO 5 Movimiento subamortiguado

Una masa que pesa 16 libras se une a un resorte de 5 pies de largo. En equilibrio el resorte mide 8.2 pies. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto 2 pies arriba de la posición de equilibrio, encuentre los desplazamientos $x(t)$ si se sabe además que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea.

SOLUCIÓN La elongación del resorte después que se une la masa es $8.2 - 5 = 3.2$ pies, así que se deduce de la ley de Hooke que $16 = k(3.2)$ o $k = 5$ lb/pie. Además, $m = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ slug, por lo que la ecuación diferencial está dada por

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = -5x - \frac{dx}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0. \tag{20}$$

Procediendo, encontramos que las raíces de $m^2 + 2m + 10 = 0$ son $m_1 = -1 + 3i$ y $m_2 = -1 - 3i$, lo que significa que el sistema está subamortiguado y

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t). \tag{21}$$

Por último, las condiciones iniciales $x(0) = -2$ y $x'(0) = 0$ producen $c_1 = -2$ y $c_2 = -\frac{2}{3}$, por lo que la ecuación de movimiento es

$$x(t) = e^{-t}\left(-2\cos 3t - \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3t\right). \tag{22}$$ ■

FORMA ALTERNATIVA DE $x(t)$ De una manera idéntica al procedimiento usado en la página 184, se puede escribir cualquier solución

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t\right)$$

en la forma alternativa

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + \phi\right), \tag{23}$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y el ángulo de fase ϕ se determina de las ecuaciones

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{c_1}{A}, \qquad \cos\phi = \frac{c_2}{A}, \qquad \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}.$$

El coeficiente $Ae^{-\lambda t}$ en ocasiones se llama **amplitud amortiguada** de vibraciones. Debido a que (23) no es una función periódica, el número $2\pi/\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ se llama **cuasi periodo** y $\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}/2\pi$ es la **cuasi frecuencia**. El cuasi periodo es el intervalo de tiempo entre dos máximos sucesivos de $x(t)$. Se debe comprobar, para la ecuación de movimiento del ejemplo 5, que $A = 2\sqrt{10}/3$ y $\phi = 4.391$. Por tanto, una forma equivalente de (22) es

$$x(t) = \frac{2\sqrt{10}}{3} e^{-t} \operatorname{sen}(3t + 4.391).$$

5.1.3 SISTEMAS RESORTE/MASA: MOVIMIENTO FORZADO

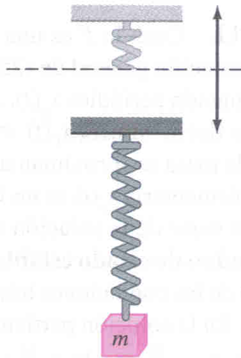


FIGURA 5.1.11 Movimiento vertical oscilatorio del apoyo.

ED DE MOVIMIENTO FORZADO CON AMORTIGUAMIENTO Suponga que ahora se toma en consideración una fuerza externa $f(t)$ que actúa sobre una masa vibrante en un resorte. Por ejemplo, $f(t)$ podría representar una fuerza motriz que causa un movimiento vertical oscilatorio del soporte del resorte. Véase la figura 5.1.11. La inclusión de $f(t)$ en la formulación de la segunda ley de Newton da la ecuación diferencial de **movimiento forzado** o **dirigido**:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} + f(t). \tag{24}$$

Dividiendo la ecuación (24) entre m, se obtiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t), \tag{25}$$

donde $F(t) = f(t)/m$ y, como en la sección anterior, $2\lambda = \beta/m$, $\omega^2 = k/m$. Para resolver la última ecuación homogénea, se puede usar ya sea el método de coeficientes indeterminados o variación de parámetros.

EJEMPLO 6 Interpretación de un problema con valores iniciales

Interprete y resuelva el problema con valores iniciales

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + 1.2\frac{dx}{dt} + 2x = 5\cos 4t, \quad x(0) = \frac{1}{2}, \quad x'(0) = 0. \tag{26}$$

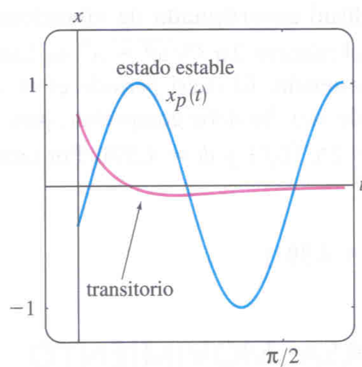
SOLUCIÓN Se puede interpretar el problema para representar un sistema vibratorio que consiste en una masa ($m = \frac{1}{5}$ slug o kilogramo) unida a un resorte ($k = 2$ lb/pie o N/m). La masa se libera inicialmente desde el reposo $\frac{1}{2}$ unidad (pie o metro) abajo de la posición de equilibrio. El movimiento es amortiguado ($\beta = 1.2$) y está siendo impulsado por una fuerza periódica externa ($T = \pi/2$ s) comenzando en $t = 0$. De manera intuitiva, se podría esperar que incluso con amortiguamiento el sistema permaneciera en movimiento hasta que se "desactive" la función forzada, en cuyo caso disminuirían las amplitudes. Sin embargo, como se plantea en el problema, $f(t) = 5\cos 4t$ permanecerá "activada" por siempre.

Primero se multiplica la ecuación diferencial en (26) por 5 y se resuelve

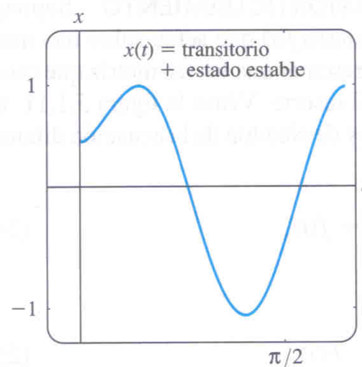
$$\frac{dx^2}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

por los métodos usuales. Debido a que $m_1 = -3 + i$, $m_2 = -3 - i$, se deduce que $x_c(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t)$. Con el método de coeficientes indeterminados, se supone una solución particular de la forma $x_p(t) = A\cos 4t + B \operatorname{sen} 4t$. Derivando $x_p(t)$ y sustituyendo en la ED, se obtiene

$$x_p'' + 6x_p' + 10x_p = (-6A + 24B)\cos 4t + (-24A - 6B)\operatorname{sen} 4t = 25\cos 4t.$$



a)



b)

FIGURA 5.1.12 Gráfica de la solución dada en (28).

El sistema de ecuaciones resultante

$$-6A + 24B = 25, \quad -24A - 6B = 0$$

se cumple en $A = -\frac{25}{102}$ y $B = \frac{50}{51}$. Se tiene que

$$x(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t. \tag{27}$$

Cuando se hace $t = 0$ en la ecuación anterior, se obtiene $c_1 = \frac{38}{51}$. Derivando la expresión y haciendo $t = 0$, se encuentra también que $c_2 = -\frac{86}{51}$. Por tanto, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\operatorname{sen} t\right) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t. \tag{28}$$ ■

TÉRMINOS TRANSITORIO Y DE ESTADO ESTABLE Cuando F es una función periódica, como $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \gamma t$ o $F(t) = F_0 \cos \gamma t$, la solución general de (25) para $\lambda > 0$ es la suma de una función no periódica $x_c(t)$ y una función periódica $x_p(t)$. Además $x_c(t)$ se desvanece conforme se incrementa el tiempo, es decir, $\lim_{t\to\infty} x_c(t) = 0$. Así, para valores grandes de tiempo, los desplazamientos de la masa se aproximan mediante la solución particular $x_p(t)$. Se dice que la función complementaria $x_c(t)$ es un **término transitorio** o **solución transitoria** y la función $x_p(t)$, la parte de la solución que permanece después de un intervalo de tiempo, se llama **término de estado estable** o **solución de estado estable**. Por tanto, observe que el efecto de las condiciones iniciales en un sistema resorte/masa impulsado por F es transitorio. En la solución particular (28), $e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\operatorname{sen} t\right)$ es un término transitorio y $x_p(t) = -\frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t$ es un término de estado estable. Las gráficas de estos dos términos y la solución (28) se presentan en las figuras 5.12a y 5.12b, respectivamente.

EJEMPLO 7 Soluciones de estado transitorio y de estado estable

La solución del problema con valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 4\cos t + 2\operatorname{sen} t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = x_1,$$

donde x_1 es constante, está dada por

$$x(t) = \underbrace{(x_1 - 2)\, e^{-t}\operatorname{sen} t}_{\text{transitorio}} + \underbrace{2\operatorname{sen} t}_{\text{estado estable}}.$$

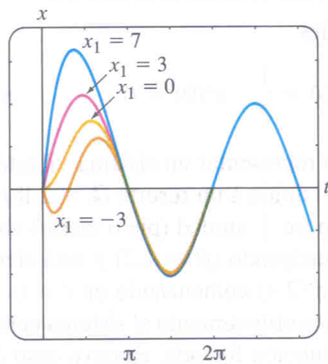


FIGURA 5.1.13 Gráfica de la solución del ejemplo 7 para diferentes x_1.

Las curvas solución para valores seleccionados de la velocidad inicial x_1 aparecen en la figura 5.1.13. Las gráficas muestran que la influencia del término transitorio es despreciable para un valor aproximado de $t > 3\pi/2$. ■

ED DE MOVIMIENTO FORZADO SIN AMORTIGUAMIENTO Cuando se ejerce una fuerza periódica sin fuerza de amortiguamiento, no hay término transitorio en la solución de un problema. También se ve que una fuerza periódica con una frecuencia cercana o igual que la frecuencia de las vibraciones libres amortiguadas causa un problema grave en un sistema mecánico oscilatorio.

EJEMPLO 8 Movimiento no amortiguado forzado

Resuelva el problema con valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \gamma t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \tag{29}$$

donde F_0 es una constante y $\gamma \neq \omega$.

SOLUCIÓN La función complementaria es $x_c(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$. Para obtener una solución particular se supone $x_p(t) = A \cos \gamma t + B \operatorname{sen} \gamma t$, por lo que

$$x_p'' + \omega^2 x_p = A(\omega^2 - \gamma^2) \cos \gamma t + B(\omega^2 - \gamma^2) \operatorname{sen} \gamma t = F_0 \operatorname{sen} \gamma t.$$

Igualando los coeficientes se obtiene de inmediato $A = 0$ y $B = F_0/(\omega^2 - \gamma^2)$. Por tanto,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \gamma t.$$

Aplicando las condiciones iniciales a la solución general

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \gamma t$$

se obtiene $c_1 = 0$ y $c_2 = -\gamma F_0/\omega(\omega^2 - \gamma^2)$. Por tanto, la solución es

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}(-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen} \gamma t), \qquad \gamma \neq \omega \tag{30}$$ ■

RESONANCIA PURA Aunque la ecuación (30) no se define para $\gamma = \omega$, es interesante observar que su valor límite conforme $\gamma \to \omega$ se obtiene al aplicar la regla de L'Hôpital. Este proceso límite es análogo a "sintonizar" la frecuencia de la fuerza impulsora ($\gamma/2\pi$) con la frecuencia de vibraciones libres ($\omega/2\pi$). De una manera intuitiva, se espera que en un espacio de tiempo se deban poder incrementar en forma sustancial las amplitudes de vibración. Para $\gamma = \omega$ se define la solución como

$$x(t) = \lim_{\gamma \to \omega} F_0 \frac{-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen} \gamma t}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} = F_0 \lim_{\gamma \to \omega} \frac{\dfrac{d}{d\gamma}(-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen} \gamma t)}{\dfrac{d}{d\gamma}(\omega^3 - \omega \gamma^2)}$$

$$= F_0 \lim_{\gamma \to \omega} \frac{-\operatorname{sen} \omega t + \omega t \cos \gamma t}{-2\omega\gamma} \tag{31}$$

$$= F_0 \frac{-\operatorname{sen} \omega t + \omega t \cos \omega t}{-2\omega^2}$$

$$= \frac{F_0}{2\omega^2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t.$$

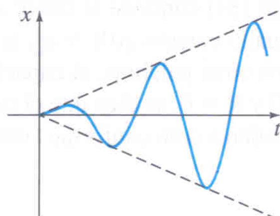


FIGURA 5.1.14 Resonancia pura.

Como se sospechaba, conforme $t \to \infty$ los desplazamientos se vuelven largos; de hecho, $|x(t_n)| \to \infty$ cuando $t_n = n\pi/\omega$, $n = 1, 2, \ldots$. El fenómeno recién descrito se conoce como **resonancia pura**. La gráfica de la figura 5.1.14 muestra el movimiento característico en este caso.

En conclusión, se debe observar que no hay necesidad real de usar un proceso límite en (30) para obtener la solución para $\gamma = \omega$. Alternativamente, la ecuación (31) se deduce resolviendo el problema con valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \omega t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

en forma directa por métodos convencionales.

Si realmente una función, como la ecuación (31) describiera los desplazamientos de un sistema resorte/masa, el sistema necesariamente fallaría. Las oscilaciones grandes de la masa forzarán en algún momento el resorte más allá de su límite elástico. Se podría argumentar también que el modelo resonante presentado en la figura 5.1.14 es por completo irreal, porque no se toman en cuenta los efectos retardadores de las fuerzas de amortiguamiento que siempre están presentes. Aunque es verdad que la resonancia pura no puede ocurrir cuando se toma en consideración la cantidad pequeña de amortiguamiento, las amplitudes de vibración grandes e igualmente destructivas pueden ocurrir (aunque acotadas conforme $t \to \infty$). Véase el problema 43 de los ejercicios 5.1.

5.1.4 CIRCUITO EN SERIE ANÁLOGO

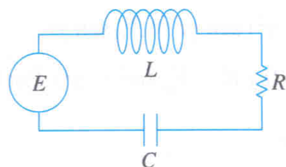


FIGURA 5.1.15 Circuito *LRC* en serie.

CIRCUITOS *LRC* EN SERIE Como se mencionó en la introducción de este capítulo, muchos sistemas físicos diferentes se describen mediante una ecuación diferencial de segundo orden similar a la ecuación diferencial de movimiento forzado con amortiguamiento:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t). \tag{32}$$

Si $i(t)$ denota la corriente en el **circuito eléctrico en serie *LRC*** que se muestra en la figura 5.1.15, entonces las caídas de voltaje en el inductor, resistor y capacitor son como se muestra en la figura 1.3.3. Por la segunda ley de Kirchhoff, la suma de estos voltajes es igual al voltaje $E(t)$ aplicado al circuito; es decir,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{33}$$

Pero la carga $q(t)$ en el capacitor se relaciona con la corriente $i(t)$ con $i = dq/dt$, así la ecuación (33) se convierte en la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{34}$$

La nomenclatura usada en el análisis de circuitos es similar a la que se emplea para describir sistemas resorte/masa.

Si $E(t) = 0$, se dice que las **vibraciones eléctricas** del circuito están **libres**. Debido a que la ecuación auxiliar para (34) es $Lm^2 + Rm + 1/C = 0$, habrá tres formas de solución con $R \neq 0$, dependiendo del valor del discriminante $R^2 - 4L/C$. Se dice que el circuito es

	sobreamortiguado si	$R^2 - 4L/C > 0$.
	críticamente amortiguado si	$R^2 - 4L/C = 0$,
y	**subamortiguado** si	$R^2 - 4L/C < 0$.

En cada uno de estos tres casos, la solución general de (34) contiene el factor $e^{-Rt/2L}$, así $q(t) \to 0$ conforme $t \to \infty$. En el caso subamortiguado cuando $q(0) = q_0$, la carga en el capacitor oscila a medida que ésta disminuye; en otras palabras, el capacitor se carga y se descarga conforme $t \to \infty$. Cuando $E(t) = 0$ y $R = 0$, se dice que el circuito no está amortiguado y las vibraciones eléctricas no tienden a cero conforme t crece sin límite; la respuesta del circuito es **armónica simple**.

EJEMPLO 9 Circuito en serie subamortiguado

Encuentre la carga $q(t)$ en el capacitor en un circuito *LRC* cuando $L = 0.25$ henry (h), $R = 10$ ohms (Ω), $C = 0.001$ farad (f), $E(t) = 0$, $q(0) = q_0$ coulombs (C) e $i(0) = 0$.

SOLUCIÓN Puesto que $1/C = 1000$, la ecuación (34) se convierte en

$$\frac{1}{4}q'' + 10q' + 1000q = 0 \quad \text{o} \quad q'' + 40q' + 4000q = 0.$$

Resolviendo esta ecuación homogénea de la manera usual, se encuentra que el circuito es subamortiguado y $q(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 60t + c_2 \text{ sen } 60t)$. Aplicando las condiciones iniciales, se encuentra $c_1 = q_0$ y $c_2 = \frac{1}{3}q_0$. Por tanto

$$q(t) = q_0 e^{-20t}\left(\cos 60t + \frac{1}{3}\text{sen } 60t\right).$$

Usando (23), podemos escribir la solución anterior como

$$q(t) = \frac{q_0\sqrt{10}}{3}\, e^{-20t}\text{sen}(60t + 1.249).$$ ■

Cuando se aplica un voltaje $E(t)$ al circuito, se dice que las vibraciones eléctricas son **forzadas**. En el caso cuando $R \neq 0$, la función complementaria $q_c(t)$ de (34) se llama **solución transitoria**. Si $E(t)$ es periódica o una constante, entonces la solución particular $q_p(t)$ de (34) es una **solución de estado estable**.

EJEMPLO 10 Corriente de estado estable

Encuentre la solución de estado estable $q_p(t)$ y la **corriente de estado estable** en un circuito *LRC* en serie cuando el voltaje aplicado es $E(t) = E_0$ sen γt.

SOLUCIÓN La solución de estado estable $q_p(t)$ es una solución particular de la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E_0 \,\text{sen}\,\gamma t.$$

Con el método de coeficientes indeterminados, se supone una solución particular de la forma $q_p(t) = A$ sen $\gamma t + B \cos \gamma t$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial e igualando coeficientes, se obtiene

$$A = \frac{E_0\left(L\gamma - \dfrac{1}{C\gamma}\right)}{-\gamma\left(L^2\gamma^2 - \dfrac{2L}{C} + \dfrac{1}{C^2\gamma^2} + R^2\right)}, \qquad B = \frac{E_0R}{-\gamma\left(L^2\gamma^2 - \dfrac{2L}{C} + \dfrac{1}{C^2\gamma^2} + R^2\right)}.$$

Es conveniente expresar A y B en términos de algunos nuevos símbolos.

Si $\quad X = L\gamma - \dfrac{1}{C\gamma}, \quad$ entonces $\quad X^2 = L^2\gamma^2 - \dfrac{2L}{C} + \dfrac{1}{C^2\gamma^2}$.

Si $\quad Z = \sqrt{X^2 + R^2}, \quad$ entonces $\quad Z^2 = L^2\gamma^2 - \dfrac{2L}{C} + \dfrac{1}{C^2\gamma^2} + R^2.$

Por tanto $A = E_0X/(-\gamma Z^2)$ y $B = E_0R/(-\gamma Z^2)$, así que la carga de estado estable es

$$q_p(t) = -\frac{E_0X}{\gamma Z^2}\,\text{sen}\,\gamma t - \frac{E_0R}{\gamma Z^2}\cos \gamma t.$$

Ahora la corriente de estado estable está dada por $i_p(t) = q'_p(t)$:

$$i_p(t) = \frac{E_0}{Z}\left(\frac{R}{Z}\,\text{sen}\,\gamma t - \frac{X}{Z}\cos \gamma t\right). \tag{35}$$ ■

Las cantidades $X = L\gamma - 1/C\gamma$ y $Z = \sqrt{X^2 + R^2}$ definidas en el ejemplo 11 se llaman **reactancia** e **impedancia** del circuito, respectivamente. Tanto la reactancia como la impedancia se miden en ohms.

EJERCICIOS 5.1

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-7.

5.1.1 SISTEMAS RESORTE/MASA: MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO

1. Una masa que pesa 4 libras se une a un resorte cuya constante es 16 lb/pie. ¿Cuál es el periodo del movimiento armónico simple?

2. Una masa de 20 kilogramos se une a un resorte. Si la frecuencia del movimiento armónico simple es $2/\pi$ ciclos/s, ¿cuál es la constante de resorte k? ¿Cuál es la frecuencia del movimiento armónico simple si la masa original se reemplaza con una masa de 80 kilogramos?

3. Una masa que pesa 24 libras, unida al extremo de un resorte, lo alarga 4 pulgadas. Al inicio, la masa se libera desde el reposo en un punto 3 pulgadas arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la ecuación de movimiento.

4. Determine la ecuación de movimiento si la masa del problema 3 se libera al inicio desde la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 2 pies/s.

5. Una masa que pesa 20 libras alarga 6 pulgadas un resorte. La masa se libera al inicio desde el reposo en un punto 6 pulgadas abajo de la posición de equilibrio.

a) Encuentre la posición de la masa en los tiempos $t = \pi/12, \pi/8, \pi/6, \pi/4$ y $9\pi/32$ s.

b) ¿Cuál es la velocidad de la masa cuando $t = 3\pi/16$ s? ¿En qué dirección se dirige la masa en este instante?

c) ¿En qué tiempos la masa pasa por la posición de equilibrio?

6. Una fuerza de 400 newtons alarga 2 metros un resorte. Una masa de 50 kilogramos se une al extremo del resorte y se libera inicialmente desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 10 m/s. Encuentre la ecuación de movimiento.

7. Otro resorte cuya constante es 20 N/m se suspende del mismo soporte, pero paralelo al sistema resorte/masa del problema 6. Al segundo resorte se le coloca una masa de 20 kilogramos y ambas masas se liberan al inicio desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 10 m/s.

a) ¿Cuál masa presenta la mayor amplitud de movimiento?

b) ¿Cuál masa se mueve más rápido en $t = \pi/4$ s? ¿En $\pi/2$ s?

c) ¿En qué instantes las dos masas están en la misma posición? ¿Dónde están las masas en estos instantes? ¿En qué direcciones se están moviendo las masas?

8. Una masa que pesa 32 libras alarga 2 pies un resorte. Determine la amplitud y el periodo de movimiento si la masa se libera inicialmente desde un punto situado 1 pie arriba de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 2 pies/s. ¿Cuántos ciclos enteros habrá completado la masa al final de 4π segundos?

9. Una masa que pesa 8 libras se une a un resorte. Cuando se pone en movimiento, el sistema resorte/masa exhibe movimiento armónico simple. Determine la ecuación de movimiento si la constante de resorte es 1 lb/pie y la masa se libera inicialmente desde un punto 6 pulgadas abajo de la posición de equilibrio, con una velocidad descendente de $\frac{3}{2}$ pie/s. Exprese la ecuación de movimiento en la forma dada en (6).

10. Una masa que pesa 10 libras alarga un resorte $\frac{1}{4}$ pie. Esta masa se retira y se coloca una de 1.6 slugs, que se libera desde un punto situado a $\frac{1}{3}$ pie arriba de la posición de equilibrio, con una velocidad descendente de $\frac{5}{4}$ pie/s. Exprese la ecuación de movimiento en la forma dada en (6). ¿En qué tiempos la masa logra un desplazamiento debajo de la posición de equilibrio numéricamente igual a $\frac{1}{2}$ de la amplitud?

11. Una masa que pesa 64 libras alarga 0.32 pies un resorte. Al inicio la masa se libera desde un punto que está 8 pulgadas arriba de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 5 pies/s.

a) Encuentre la ecuación de movimiento.

b) ¿Cuáles son la amplitud y el periodo del movimiento?

c) ¿Cuántos ciclos completos habrá realizado la masa al final de 3π segundos?

d) ¿En qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo por segunda vez?

e) ¿En qué instantes la masa alcanza sus desplazamientos extremos en cualquier lado de la posición de equilibrio?

f) ¿Cuál es la posición de la masa en $t = 3$ s?

g) ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = 3$ s?

h) ¿Cuál es la aceleración en $t = 3$ s?

i) ¿Cuál es la velocidad instantánea en los instantes cuando la masa pasa por la posición de equilibrio?

j) ¿En qué instantes la masa está 5 pulgadas abajo de la posición de equilibrio?

k) ¿En qué instantes la masa está 5 pulgadas abajo de la posición de equilibrio apuntando en dirección hacia arriba?

12. Una masa de 1 slug se suspende de un resorte cuya constante es de 9 lb/pie. Inicialmente la masa se libera desde un punto que está 1 pie arriba de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $\sqrt{3}$ pies/s. Determine los instantes en los que la masa se dirige hacia abajo a una velocidad de 3 pies/s.

13. Bajo algunas circunstancias, cuando dos resortes paralelos, con constantes k_1 y k_2, soportan una sola masa, la **constante de resorte efectiva** del sistema se expresa como $k = 4k_1k_2/(k_1 + k_2)$. Una masa que pesa 20 libras estira 6 pulgadas un resorte y 2 pulgadas otro resorte. Los resortes se unen a un soporte rígido común y luego a una placa metálica. Como se muestra en la figura 5.1.16, la masa se une al centro de la placa en la configuración de resorte doble. Determine la constante de resorte efectiva de este sistema. Encuentre la ecuación de movimiento si la masa se libera inicialmente desde la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 2 pies/s.

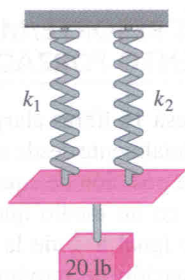


FIGURA 5.1.16 Sistema de resorte doble del problema 13.

14. Una cierta masa alarga un resorte $\frac{1}{3}$ pie y otro resorte $\frac{1}{2}$ pie. Los dos resortes se unen a un soporte rígido común en la manera descrita en el problema 13 y en la figura 5.1.16. Se quita la primera masa y se coloca una que pesa 8 libras en la configuración de resorte doble y se pone en movimiento el sistema. Si el periodo de movimiento es $\pi/15$ segundos, determine cuánto pesa la primera masa.

15. Un modelo de un sistema de resorte/masa es $4x'' + e^{-0.1t}x = 0$. Por inspección de la ecuación diferencial solamente, describa el comportamiento del sistema durante un periodo largo.

16. El modelo de un sistema de resorte/masa es $4x'' + tx = 0$. Por inspección de la ecuación diferencial solamente, describa el comportamiento del sistema durante un periodo largo.

5.1.2 SISTEMAS RESORTE/MASA: MOVIMIENTO LIBRE AMORTIGUADO

En los problemas 17 a 20, la figura representa la gráfica de una ecuación de movimiento para un sistema resorte/masa amortiguado. Use la gráfica para determinar:

a) si el desplazamiento inicial está arriba o abajo de la posición de equilibrio y

b) si la masa se libera inicialmente desde el reposo, con dirección descendente o ascendente.

17.

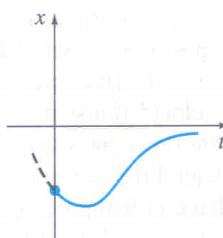


FIGURA 5.1.17 Gráfica del problema 17.

18.

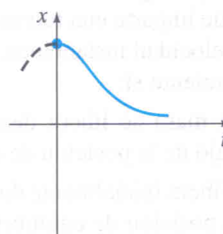


FIGURA 5.1.18 Gráfica del problema 18.

19.

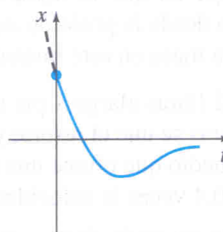


FIGURA 5.1.19 Gráfica del problema 19.

20.

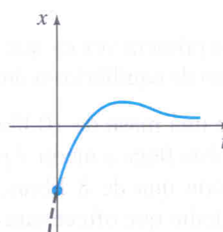


FIGURA 5.1.20 Gráfica del problema 20.

21. Una masa que pesa 4 libras se une a un resorte cuya constante es 2 lb/pie. El medio ofrece una fuerza de amortiguamiento que es numéricamente igual a la velocidad instantánea. La masa se libera desde un punto situado 1 pie arriba de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 8 pies/s. Determine el tiempo en el que la masa pasa por la posición de equilibrio. Encuentre el tiempo en el que la masa alcanza su desplazamiento extremo desde la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición de la masa en este instante?

22. Un resorte de 4 pies mide 8 pies de largo después de colgarle una masa que pesa 8 libras. El medio por el que se mueve la masa ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a $\sqrt{2}$ veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento si la masa se libera inicialmente desde la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 5 pies/s. Calcule el tiempo en que la masa alcanza su desplazamiento extremo desde la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición de la masa en ese instante?

23. Una masa de 1 kilogramo se fija a un resorte cuya constante es 16 N/m y luego el sistema completo se sumerge en un líquido que imparte una fuerza amortiguadora igual a 10 veces la velocidad instantánea. Determine las ecuaciones de movimiento si:

a) al inicio la masa se libera desde un punto situado 1 metro abajo de la posición de equilibrio, y luego

b) la masa se libera inicialmente desde un punto 1 metro abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 12 m/s.

24. En los incisos a) y b) del problema 23, determine si la masa pasa por la posición de equilibrio. En cada caso, calcule el tiempo en que la masa alcanza su desplazamiento extremo desde la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición de la masa en este instante?

25. Una fuerza de 2 libras alarga 1 pie un resorte. Una masa que pesa 3.2 libras se une al resorte y luego se sumerge el sistema en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 0.4 veces la velocidad instantánea.

a) Encuentre la ecuación de movimiento si inicialmente se libera la masa desde el reposo en un punto situado a 1 pie por encima de la posición de equilibrio.

b) Exprese la ecuación de movimiento en la forma dada en (23).

c) Encuentre la primera vez en que la masa pasa a través de la posición de equilibrio en dirección hacia arriba.

26. Después de que una masa de 10 libras se sujeta a un resorte de 5 pies, éste llega a medir 7 pies. Se retira la masa y se sustituye con una de 8 libras. Luego se coloca al sistema en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a la velocidad instantánea.

a) Encuentre la ecuación de movimiento si la masa se libera inicialmente desde el reposo de un punto situado 1 pie arriba de la posición de equilibrio.

b) Exprese la ecuación de movimiento en la forma dada en (23).

c) Calcule los tiempos en los que la masa pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo.

d) Trace la gráfica de la ecuación de movimiento.

27. Una masa que pesa 10 libras produce un alargamiento de 2 pies en un resorte. La masa se une a un dispositivo amortiguador que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a β ($\beta > 0$) veces la velocidad instantánea. Determine los valores de la constante de amortiguamiento β por lo que el movimiento posterior sea **a)** sobreamortiguado, **b)** críticamente amortiguado y **c)** subamortiguado.

28. Una masa que pesa 24 libras alarga 4 pies un resorte. El movimiento posterior toma lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a β ($\beta > 0$) veces la velocidad instantánea. Si al inicio la masa se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 2 pies/s, muestre que cuando $\beta > 3\sqrt{2}$ la ecuación de movimiento es

$$x(t) = \frac{-3}{\sqrt{\beta^2 - 18}} e^{-2\beta t/3} \operatorname{senh} \frac{2}{3} \sqrt{\beta^2 - 18}\, t.$$

5.1.3 SISTEMAS RESORTE/MASA: MOVIMIENTO FORZADO

29. Una masa que pesa 16 libras alarga $\frac{8}{3}$ pie un resorte. La masa se libera inicialmente desde el reposo desde un punto 2 pies abajo de la posición de equilibrio y el movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a $\frac{1}{2}$ de la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento si se aplica a la masa una fuerza externa igual a $f(t) = 10 \cos 3t$.

30. Una masa de 1 slug está unida a un resorte cuya constante es 5 lb/pie. Al inicio la masa se libera 1 pie abajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 5 pies/s y el movimiento posterior toma lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a dos veces la velocidad instantánea.

a) Encuentre la ecuación de movimiento si una fuerza externa igual a $f(t) = 12 \cos 2t + 3 \operatorname{sen} 2t$ actúa sobre la masa.

b) Trace la gráfica de las soluciones transitorias y de estado estable en los mismos ejes de coordenadas.

c) Trace la gráfica de la ecuación de movimiento.

31. Una masa de 1 slug, cuando se une a un resorte, causa en éste un alargamiento de 2 pies y luego llega al punto de reposo en la posición de equilibrio. Empezando en $t = 0$, una fuerza externa igual a $f(t) = 8 \operatorname{sen} 4t$ se aplica al sistema. Encuentre la ecuación de movimiento si el medio circundante ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 8 veces la velocidad instantánea.

32. En el problema 31 determine la ecuación de movimiento si la fuerza externa es $f(t) = e^{-t} \operatorname{sen} 4t$. Analice el desplazamiento para $t \to \infty$.

33. Cuando una masa de 2 kilogramos se une a un resorte cuya constante es 32 N/m, éste llega al reposo en la posición de equilibrio. Comenzando en $t = 0$, una fuerza igual a $f(t) = 68e^{-2t} \cos 4t$ se aplica al sistema. Determine la ecuación de movimiento en ausencia de amortiguamiento.

34. En el problema 33, escriba la ecuación de movimiento en la forma $x(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \phi) + Be^{-2t}\operatorname{sen}(4t + \theta)$. ¿Cuál es la amplitud de las vibraciones después de un tiempo muy largo?

35. Una masa m está unida al extremo de un resorte cuya constante es k. Después de que la masa alcanza el equilibrio, su soporte empieza a oscilar verticalmente respecto a una recta horizontal L de acuerdo con una fórmula $h(t)$. El valor de h representa la distancia en pies medida desde L. Véase la figura 5.1.21.

a) Determine la ecuación diferencial de movimiento si el sistema entero se mueve en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a $\beta(dx/dt)$.

b) Resuelva la ecuación diferencial del inciso a) si el resorte se alarga 4 pies con una masa que pesa 16 libras y $\beta = 2$, $h(t) = 5 \cos t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

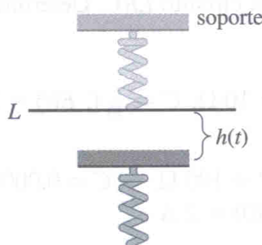


FIGURA 5.1.21 Soporte oscilante del problema 35.

36. Una masa de 100 gramos se fija a un resorte cuya constante es 1600 dinas/cm. Después de que la masa alcanza el equilibrio, su apoyo oscila de acuerdo con la fórmula $h(t) =$ sen $8t$, donde h representa el desplazamiento desde su posición original. Véanse el problema 35 y la figura 5.1.21.

a) En ausencia de amortiguamiento, determine la ecuación de movimiento si la masa parte del reposo desde la posición de equilibrio.

b) ¿En qué instantes la masa pasa por la posición de equilibrio?

c) ¿En qué tiempos la masa alcanza sus desplazamientos extremos?

d) ¿Cuáles son los desplazamientos máximo y mínimo?

e) Trace la gráfica de la ecuación de movimiento.

En los problemas 37 y 38, resuelva el problema con valores iniciales.

37. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = -5 \operatorname{sen} 2t + 3 \cos 2t,$

$x(0) = -1, \quad x'(0) = 1$

38. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 9x = 5 \operatorname{sen} 3t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0$

39. a) Muestre que la solución del problema con valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

es $$x(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}(\cos \gamma t - \cos \omega t).$$

b) Evalúe $\displaystyle \lim_{\gamma \to \omega} \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}(\cos \gamma t - \cos \omega t)$.

40. Compare el resultado obtenido en el inciso b) del problema 39 con la solución obtenida usando la variación de parámetros cuando la fuerza externa es $F_0 \cos \omega t$.

41. a) Muestre que $x(t)$ dada en el inciso a) del problema 39 se puede escribir en la forma

$$x(t) = \frac{-2F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\gamma - \omega)t \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\gamma + \omega)t.$$

b) Si se define $\varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma - \omega)$, muestre que cuando ε es pequeña una solución aproximada es

$$x(t) = \frac{F_0}{2\varepsilon\gamma} \operatorname{sen} \varepsilon t \operatorname{sen} \gamma t.$$

Cuando ε es pequeña, la frecuencia $\gamma/2\pi$ de la fuerza aplicada es cercana a la frecuencia $\omega/2\pi$ de vibraciones libres. Cuando esto ocurre, el movimiento es como se indica en la figura 5.1.22. Las oscilaciones de esta clase se llaman **pulsaciones** y se deben al hecho de que la frecuencia de sen εt es bastante pequeña en comparación con la frecuencia de sen γt. Las curvas punteadas o envoltura de la gráfica de $x(t)$, se obtienen de las gráficas de $\pm(F_0/2\varepsilon\gamma)$ sen εt. Use un programa de graficación para trazar gráficas con varios valores de F_0, ε, y γ para comprobar la gráfica de la figura 5.1.22.

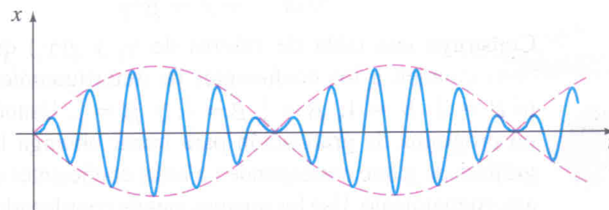


FIGURA 5.1.22 Fenómeno de pulsaciones del problema 41.

Tarea para el laboratorio de computación

42. ¿Puede haber pulsaciones cuando se agrega una fuerza de amortiguamiento al modelo del inciso a) del problema 39? Defienda su posición con las gráficas obtenidas ya sea de la solución explícita del problema

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

o de curvas solución obtenidas usando un programa de solución numérica.

43. a) Muestre que la solución general de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \gamma t$$

es

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + \phi\right)$$

$$+ \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}\operatorname{sen}(\gamma t + \theta),$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y los ángulos de fase ϕ y θ están, respectivamente, definidos por sen $\phi = c_1/A$, cos $\phi = c_2/A$ y

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-2\lambda\gamma}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}},$$

$$\cos\theta = \frac{\omega^2 - \gamma^2}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}.$$

b) La solución del inciso a) tiene la forma $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$. La inspección muestra que $x_c(t)$ es transitoria y por tanto para valores grandes de tiempo, la solución se aproxima mediante $x_p(t) = g(\gamma)\operatorname{sen}(\gamma t + \theta)$, donde

$$g(\gamma) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}.$$

Aunque la amplitud $g(\gamma)$ de $x_p(t)$ está acotada conforme $t \to \infty$, demuestre que las oscilaciones máximas ocurrirán en el valor $\gamma_1 = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}$. ¿Cuál es el valor máximo de g? El número $\sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}/2\pi$ se dice que es la **frecuencia de resonancia** del sistema.

c) Cuando $F_0 = 2$, $m = 1$ y $k = 4$, g se convierte en

$$g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4 - \gamma^2)^2 + \beta^2\gamma^2}}.$$

Construya una tabla de valores de γ_1 y $g(\gamma_1)$ que corresponden a los coeficientes de amortiguamiento $\beta = 2$, $\beta = 1$, $\beta = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$, y $\beta = \frac{1}{4}$. Usando un programa de graficación para trazar obtenga las gráficas de g que corresponden a estos coeficientes de amortiguamiento. Use los mismos ejes de coordenadas. Esta familia de gráficas se llama **curva de resonancia** o **curva de respuesta de frecuencia** del sistema. ¿A qué valor se aproxima γ_1 conforme $\beta \to 0$? ¿Qué sucede con la curva de resonancia conforme $\beta \to 0$?

44. Considere un sistema resorte/masa no amortiguado descrito por el problema con valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}^n \gamma t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

a) Para $n = 2$, explique por qué hay una sola frecuencia $\gamma_1/2\pi$ en la que el sistema está en resonancia pura.

b) Para $n = 3$, analice por qué hay dos frecuencias $\gamma_1/2\pi$ y $\gamma_2/2\pi$ en las que el sistema está en resonancia pura.

c) Suponga que $\omega = 1$ y $F_0 = 1$. Use un programa de solución numérica para obtener la gráfica de la solución del problema con valores iniciales para $n = 2$ y $\gamma = \gamma_1$ en el inciso a). Obtenga la gráfica de la solución del problema con valores iniciales para $n = 3$ que corresponde, a su vez, a $\gamma = \gamma_1$ y $\gamma = \gamma_2$ en el inciso b).

5.1.4 CIRCUITO EN SERIE ANÁLOGO

45. Encuentre la carga en el capacitor de un circuito en serie *LRC* en $t = 0.01$ s cuando $L = 0.05$ h, $R = 2\ \Omega$, $C = 0.01$ f, $E(t) = 0$ V, $q(0) = 5$ C e $i(0) = 0$ A. Determine la primera vez en que la carga del capacitor es igual a cero.

46. Calcule la carga del capacitor en un circuito *LRC* en serie cuando $L = \frac{1}{4}$ h, $R = 20\ \Omega$, $C = \frac{1}{300}$ f, $E(t) = 0$ V, $q(0) = 4$ C e $i(0) = 0$ A. ¿Alguna vez la carga en el capacitor es igual a cero?

En los problemas 47 y 48 encuentre la carga en el capacitor y la corriente en el circuito *LRC*. Determine la carga máxima en el capacitor.

47. $L = \frac{5}{3}$ h, $R = 10\ \Omega$, $C = \frac{1}{30}$ f, $E(t) = 300$ V, $q(0) = 0$ C, $i(0) = 0$ A

48. $L = 1$ h, $R = 100\ \Omega$, $C = 0.0004$ f, $E(t) = 30$ V, $q(0) = 0$ C, $i(0) = 2$ A

49. Encuentre la carga y la corriente de estado estable en un circuito *LRC* en serie cuando $L = 1$ h, $R = 2\ \Omega$, $C = 0.25$ f y $E(t) = 50 \cos t$ V.

50. Demuestre que la amplitud de la corriente de estado estable en el circuito *LRC* en serie del ejemplo 10 está dada por E_0/Z, donde Z es la impedancia del circuito.

51. Use el problema 50 para demostrar que la corriente de estado estable en un circuito *LRC* en serie cuando $L = \frac{1}{2}$ h, $R = 20\ \Omega$, $C = 0.001$ f, y $E(t) = 100 \operatorname{sen} 60t$ V, está dada por $i_p(t) = 4.160 \operatorname{sen}(60t - 0.588)$.

52. Encuentre la corriente de estado estable en un circuito *LRC* cuando $L = \frac{1}{2}$ h, $R = 20\ \Omega$, $C = 0.001$ f y $E(t) = 100 \operatorname{sen} 60t + 200 \cos 40t$ V.

53. Encuentre la carga en el capacitor de un circuito *LRC* en serie cuando $L = \frac{1}{2}$ h, $R = 10\ \Omega$, $C = 0.01$ f, $E(t) = 150$ V, $q(0) = 1$ C e $i(0) = 0$ A. ¿Cuál es la carga en el capacitor después de un largo tiempo?

54. Demuestre que si L, R, C y E_0 son constantes, entonces la amplitud de la corriente de estado estable del ejemplo 10 es un máximo cuando $\gamma = 1/\sqrt{LC}$. ¿Cuál es la amplitud máxima?

55. Demuestre que si L, R, E_0 y γ son constantes, entonces la amplitud de la corriente de estado estable en el ejemplo 10 es un máximo cuando la capacitancia es $C = 1/L\gamma^2$.

56. Calcule la carga en el capacitor y la corriente en un circuito *LC* cuando $L = 0.1$ h, $C = 0.1$ f, $E(t) = 100 \operatorname{sen} \gamma t$ V, $q(0) = 0$ C e $i(0) = 0$ A.

57. Calcule la carga del capacitor y la corriente en un circuito *LC* cuando $E(t) = E_0 \cos \gamma t$ V, $q(0) = q_0$ C e $i(0) = i_0$ A.

58. En el problema 57, determine la corriente cuando el circuito está en resonancia.

5.2 MODELOS LINEALES: PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA

REPASO DE MATERIAL

- Problemas 37 a 40 de los ejercicios 4.3
- Problemas 37 a 40 de los ejercicios 4.4

INTRODUCCIÓN La sección anterior se dedicó a sistemas en los que un modelo matemático de segundo orden va acompañado de condiciones iniciales. Es decir, condiciones suplementarias que se especifican en la función desconocida y su primera derivada es un solo punto. Pero con frecuencia la descripción matemática de un sistema físico requiere resolver una ecuación diferencial lineal homogénea sujeta a condiciones en la frontera, es decir, condiciones específicas de la función desconocida o en una de sus derivadas o incluso una combinación lineal de la función desconocida y una de sus derivadas en dos (o más) puntos diferentes.

DEFLEXIÓN DE UNA VIGA Muchas estructuras se construyen usando trabes o vigas y estas vigas se flexionan o deforman bajo su propio peso o por la influencia de alguna fuerza externa. Como veremos a continuación, esta deflexión $y(x)$ está gobernada por una ecuación diferencial lineal de cuarto orden relativamente simple.

Para empezar, supongamos que una viga de longitud L es homogénea y tiene secciones transversales uniformes a lo largo de su longitud. En ausencia de carga en la viga (incluyendo su peso), una curva que une los centroides de todas sus secciones transversales es una recta conocida como **eje de simetría**. Véase la figura 5.2.1a. Si se aplica una carga a la viga en un plano vertical que contiene al eje de simetría, la viga, como se muestra en la figura 5.2.1b, experimenta una distorsión y la curva que conecta los centroides de las secciones transversales se llama **curva de deflexión** o **curva elástica**. La curva de deflexión se aproxima a la forma de una viga. Ahora suponga que el eje x coincide con el eje de simetría y que la deflexión $y(x)$, medida desde este eje, es positiva si es hacia abajo. En la teoría de elasticidad se muestra que el momento de flexión $M(x)$ en un punto x a lo largo de la viga se relaciona con la carga por unidad de longitud $w(x)$ mediante la ecuación

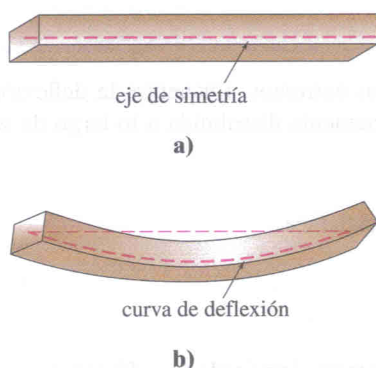


FIGURA 5.2.1 Deflexión de una viga homogénea.

$$\frac{d^2M}{dx^2} = w(x). \tag{1}$$

Además, el momento de flexión $M(x)$ es proporcional a la curvatura κ de la curva elástica

$$M(x) = EI\kappa, \tag{2}$$

donde E e I son constantes; E es el módulo de Young de elasticidad del material de la viga e I es el momento de inercia de una sección transversal de la viga (respecto a un eje conocido como el eje neutro). El producto EI se llama **rigidez f1exional** de la viga.

Ahora, del cálculo, la curvatura está dada por $\kappa = y''/[1 + (y')^2]^{3/2}$. Cuando la deflexión $y(x)$ es pequeña, la pendiente $y' \approx 0$, y por tanto $[1 + (y')^2]^{3/2} \approx 1$. Si se permite que $\kappa \approx y''$, la ecuación (2) se convierte en $M = EI\,y''$. La segunda derivada de esta última expresión es

$$\frac{d^2M}{dx^2} = EI\frac{d^2}{dx^2}y'' = EI\frac{d^4y}{dx^4}. \tag{3}$$

Si se utiliza el resultado en (1) para reemplazar d^2M/dx^2 en (3), se ve que la deflexión $y(x)$ satisface la ecuación diferencial de cuarto orden

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x). \tag{4}$$

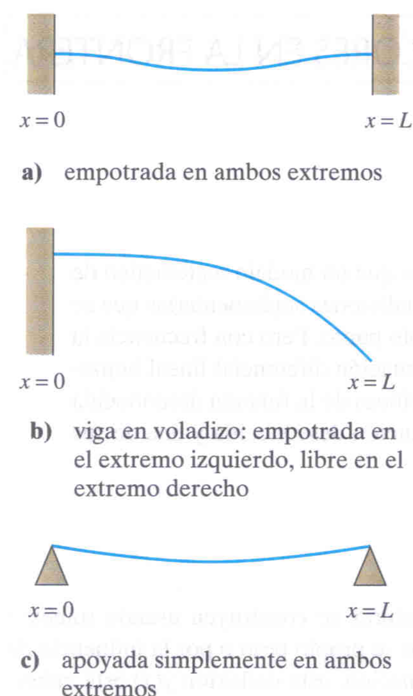


FIGURA 5.2.2 Vigas con varias condiciones de extremo.

Las condiciones de frontera asociadas con la ecuación (4) dependen de cómo estén apoyados los extremos de la viga. Una viga en voladizo está **empotrada** o **fija** en un extremo y libre en el otro. Un trampolín, un brazo extendido, un ala de avión y un balcón son ejemplos comunes de tales vigas, pero incluso árboles, astas de banderas, rascacielos y monumentos, actúan como vigas en voladizo, debido a que están empotrados en un extremo y sujetos a la fuerza de flexión del viento. Para una viga en voladizo la deflexión $y(x)$ debe satisfacer las siguientes dos condiciones en el extremo fijo $x = 0$:

- $y(0) = 0$ porque no hay flexión y
- $y'(0) = 0$ porque la curva de deflexión es tangente al eje x (en otras palabras, la pendiente de la curva de deflexión es cero en este punto).

En $x = L$ las condiciones de extremo libre son

- $y''(L) = 0$ porque el momento de flexión es cero y
- $y'''(L) = 0$ porque la fuerza de corte es cero.

La función $F(x) = dM/dx = EI\, d^3y/dx^3$ se llama fuerza de corte. Si un extremo de la viga está **apoyado simplemente** o **abisagrado** (a lo que también se conoce como **apoyo con perno** o **fulcro**) entonces se debe tener $y = 0$ y $y'' = 0$ en ese extremo. En la tabla 5.1 se resumen las condiciones en la frontera que se relacionan con (4). Véase la figura 5.2.2.

TABLA 5.1

Extremos de la viga	Condiciones frontera
empotrados	$y = 0, \quad y' = 0$
libres	$y'' = 0, \quad y''' = 0$
apoyados simplemente o abisagrados	$y = 0, \quad y'' = 0$

EJEMPLO 1 Una viga empotrada

Una viga de longitud L está empotrada en ambos extremos. Encuentre la deflexión de la viga si una carga constante w_0 está uniformemente distribuida a lo largo de su longitud, es decir, $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.

SOLUCIÓN De (4) vemos que la deflexión $y(x)$ satisface

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_0.$$

Debido a que la viga está empotrada tanto en su extremo izquierdo ($x = 0$) como en su extremo derecho ($x = L$), no hay deflexión vertical y la recta de deflexión es horizontal en estos puntos. Así, las condiciones en la frontera son

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y(L) = 0, \qquad y'(L) = 0.$$

Se puede resolver la ecuación diferencial no homogénea de la manera usual (determinar y_c observando que $m = 0$ es raíz de multiplicidad cuatro de la ecuación auxiliar $m^4 = 0$ y luego encontrar una solución particular y_p por coeficientes indeterminados) o simplemente se integra la ecuación $d^4y/dx^4 = w_0/EI$ sucesivamente cuatro veces. De cualquier modo, se encuentra la solución general de la ecuación $y = y_c + y_p$ que es

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4.$$

Ahora las condiciones $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ dan, a su vez, $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$, mientras que las condiciones restantes $y(L) = 0$ y $y'(L) = 0$ aplicadas a $y(x) = c_3x^2 + c_4x^3 + \dfrac{w_0}{24EI}x^4$ producen las ecuaciones simultáneas

$$c_3L^2 + c_4L^3 + \frac{w_0}{24EI}L^4 = 0$$

$$2c_3L + 3c_4L^2 + \frac{w_0}{6EI}L^3 = 0.$$

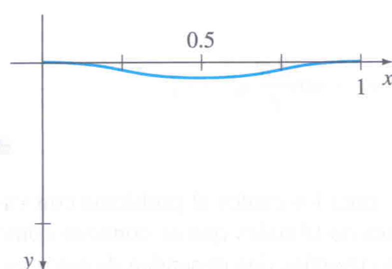


FIGURA 5.2.3 Curva de deflexión para el ejemplo 1.

Resolviendo este sistema se obtiene $c_3 = w_0L^2/24EI$ y $c_4 = -w_0L/12EI$. Así que la deflexión es

$$y(x) = \frac{w_0L^2}{24EI}x^2 - \frac{w_0L}{12EI}x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4$$

o $y(x) = \dfrac{w_0}{24EI}x^2(x - L)^2$. Eligiendo $w_0 = 24EI$, y $L = 1$, obtenemos la curva de deflexión de la figura 5.2.3. ■

EIGENVALORES Y FUNCIONES PROPIAS Muchos problemas de aplicación requieren que se resuelva un problema con valores en la frontera en dos puntos (PVF) en los que interviene una ecuación diferencial lineal que contiene un parámetro λ. Se buscan los valores de λ para los que el problema con valores en la frontera tiene soluciones *no triviales*, es decir, *no nulas*.

EJEMPLO 2 Soluciones no triviales de un PVF

Resuelva el problema con valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

SOLUCIÓN Consideraremos tres casos: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$.

CASO I: Para $\lambda = 0$ la solución de $y'' = 0$ es $y = c_1x + c_2$. Las condiciones $y(0) = 0$ y $y(L) = 0$ aplicadas a esta solución implican, a su vez, $c_2 = 0$ y $c_1 = 0$. Por tanto, para $\lambda = 0$ la única solución del problema con valores en la frontera es la solución trivial $y = 0$.

CASO II: Para $\lambda < 0$ es conveniente escribir $\lambda = -\alpha^2$, donde α denota un número positivo. Con esta notación las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 - \alpha^2 = 0$ son $m_1 = \alpha$ y $m_2 = -\alpha$. Puesto que el intervalo en el que se está trabajando es finito, se elige escribir la solución general de $y'' - \alpha^2 y = 0$ como $y = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x$. Ahora $y(0)$ es

■ Observe que aquí se emplean funciones hiperbólicas. Vuelva a leer "Dos ecuaciones que merecen conocerse" de la página 135.

$$y(0) = c_1 \cosh 0 + c_2 \operatorname{senh} 0 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1,$$

y por tanto, $y(0) = 0$ significa que $c_1 = 0$. Así $y = c_2 \operatorname{senh} \alpha x$. La segunda condición $y(L) = 0$ requiere que $c_2 \operatorname{senh} \alpha L = 0$. Para $\alpha \neq 0$, $\operatorname{senh} \alpha L \neq 0$; en consecuencia, se está forzado a elegir $c_2 = 0$. De nuevo la solución del PVF es la solución trivial $y = 0$.

CASO III: Para $\lambda > 0$ se escribe $\lambda = \alpha^2$, donde α es un número positivo. Debido a que la ecuación auxiliar $m^2 + \alpha^2 = 0$ tiene raíces complejas $m_1 = i\alpha$ y $m_2 = -i\alpha$, la solución general de $y'' + \alpha^2 y = 0$ es $y = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x$. Como antes, $y(0) = 0$ produce $c_1 = 0$ y por tanto $y = c_2 \operatorname{sen} \alpha x$. Ahora la última condición $y(L) = 0$, o

$$c_2 \operatorname{sen} \alpha L = 0,$$

se satisface al elegir $c_2 = 0$. Pero esto significa que $y = 0$. Si se requiere $c_2 \neq 0$, entonces $\operatorname{sen} \alpha L = 0$ se satisface siempre que αL sea un múltiplo entero de π.

$$\alpha L = n\pi \quad \text{o} \quad \alpha = \frac{n\pi}{L} \quad \text{o} \quad \lambda_n = \alpha_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Por tanto, para cualquier número real c_2 distinto de cero, $y = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ es una solución del problema para cada n. Debido a que la ecuación diferencial es homogénea, cualquier múltiplo constante de una solución también es una solución, así que si se desea se podría simplemente tomar $c_2 = 1$. En otras palabras, para cada número de la sucesión

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{L^2}, \quad \lambda_2 = \frac{4\pi^2}{L^2}, \quad \lambda_3 = \frac{9\pi^2}{L^2}, \ldots,$$

la función *correspondiente* en la sucesión

$$y_1 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x, \qquad y_2 = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{L}x, \qquad y_3 = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{L}x, \cdots,$$

es una solución no trivial del problema original. ■

Los números $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ para los cuales el problema con valores en la frontera del ejemplo 2 tiene soluciones no triviales que se conocen como **eigenvalores** (valores propios). Las soluciones no triviales que dependen de estos valores de λ_n, $y_n = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ o simplemente $y_n = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$, se llaman **funciones propias** (eigenfunciones).

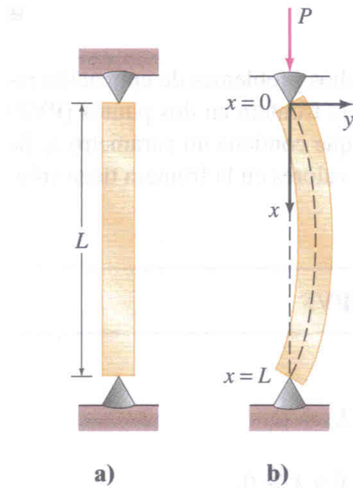


FIGURA 5.2.4 Pandeo de una columna elástica bajo una fuerza compresiva.

PANDEO DE UNA COLUMNA VERTICAL DELGADA En el siglo XVIII, Leonhard Euler fue uno de los primeros matemáticos en estudiar un problema con eigenvalores y analizar cómo se pandea una columna elástica delgada bajo una fuerza axial compresiva.

Considere una columna vertical larga y delgada de sección transversal uniforme y longitud L. Sea $y(x)$ la deflexión de la columna cuando se aplica en la parte superior una fuerza compresiva vertical constante, una carga P, como se muestra en la figura 5.2.4. Al comparar los momentos de flexión en algún punto a lo largo de la columna, se obtiene

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py \quad \text{o} \quad EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, \tag{5}$$

donde E es el módulo de Young para la elasticidad e I es el momento de inercia de una sección transversal respecto a una recta vertical por su centroide.

EJEMPLO 3 La carga de Euler

Encuentre la deflexión de una columna homogénea vertical y delgada de longitud L sujeta a una carga axial constante P si la columna se fija con bisagras en ambos extremos.

SOLUCIÓN El problema con valores en la frontera por resolver es

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Primero observe que $y = 0$ es una solución muy buena de este problema. Esta solución tiene una simple interpretación intuitiva: Si la carga P no es suficientemente grande, no hay deflexión. Entonces la pregunta es ésta: ¿para qué valores de P se dobla la columna? En términos matemáticos: ¿para qué valores de P el problema con valores en la frontera tiene soluciones no triviales?

Al escribir $\lambda = P/EI$, vemos que

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

es idéntico al problema del ejemplo 2. Del caso III de esa descripción se ve que las deflexiones son $y_n(x) = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ que corresponden a los eigenvalores $\lambda_n = P_n/EI = n^2\pi^2/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Desde el punto de vista físico, esto significa que la columna experimenta flexión sólo cuando la fuerza compresiva es uno de los valores $P_n = n^2\pi^2EI/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Estas fuerzas diferentes se llaman **cargas críticas**. La deflexión correspondiente a la carga crítica más pequeña $P_1 = \pi^2EI/L^2$, llamada **carga de Euler**, es $y_1(x) = c_2 \operatorname{sen}(\pi x/L)$ y se conoce como **primer modo de pandeo**. ■

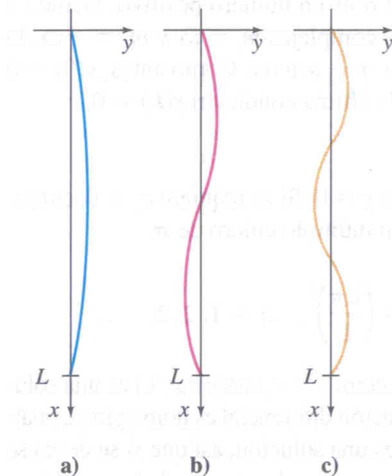
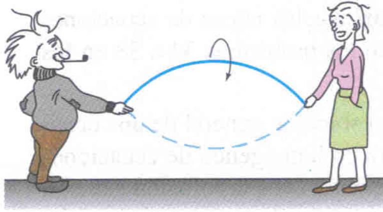


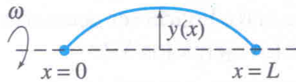
FIGURA 5.2.5 Curvas de deflexión que corresponden a las fuerzas compresivas P_1, P_2, P_3.

Las curvas de deflexión del ejemplo 3 que corresponden a $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ se muestran en la figura 5.2.5. Observe que si la columna original tiene alguna clase de restricción física en $x = L/2$, entonces la carga crítica más pequeña será $P_2 = 4\pi^2EI/L^2$, y la curva de deflexión será como se muestra en la figura 5.2.5b. Si se ponen restricciones a la columna en $x = L/3$ y en $x = 2L/3$, entonces la columna

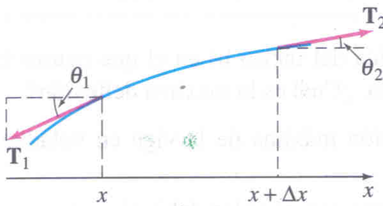
no se pandea hasta que se aplica la carga crítica $P_3 = 9\pi^2 EI/L^2$ y la curva de deflexión será como se muestra en la figura 5.2.5c. Véase el problema 23 de los ejercicios 5.2.



a)



b)



c)

FIGURA 5.2.6 Cuerda rotatoria y fuerzas que actúan sobre ella.

CUERDA ROTANDO La ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{6}$$

se presenta una y otra vez como un modelo matemático. En la sección 5.1 vimos que la ecuación (6) en las formas $d^2x/dt^2 + (k/m)x = 0$ y $d^2q/dt^2 + (1/LC)q = 0$ son modelos para el movimiento armónico simple de un sistema resorte/masa y la respuesta armónica simple de un circuito en serie, respectivamente. Es evidente cuando el modelo para la deflexión de una columna delgada en (5) se escribe como $d^2y/dx^2 + (P/EI)y = 0$ que es lo mismo que (6). Se encuentra la ecuación básica (6) una vez más en esta sección: como un modelo que define la curva de deflexión o la forma $y(x)$ que adopta una cuerda rotatoria. La situación física es similar a cuando dos personas sostienen una cuerda para saltar y la hacen girar de una manera sincronizada. Véase la figura 5.2.6a y 5.2.6b.

Suponga que una cuerda de longitud L con densidad lineal constante ρ (masa por unidad de longitud) se estira a lo largo del eje x y se fija en $x = 0$ y $x = L$. Suponga que la cuerda se hace girar respecto al eje a una velocidad angular constante ω. Considere una porción de la cuerda en el intervalo $[x, x + \Delta x]$, donde Δx es pequeña. Si la magnitud T de la tensión $\mathbf{T}$ que actúa tangencial a la cuerda, es constante a lo largo de ésta, entonces la ecuación diferencial deseada se obtiene al igualar dos formulaciones distintas de la fuerza neta que actúa en la cuerda en el intervalo $[x, x + \Delta x]$. Primero, vemos en la figura 5.2.6c se ve que la fuerza vertical neta es

$$F = T\,\text{sen}\,\theta_2 - T\,\text{sen}\,\theta_1. \tag{7}$$

Cuando los ángulos θ_1 y θ_2 (medidos en radianes) son pequeños, se tiene sen $\theta_2 \approx$ tan θ_2 y sen $\theta_1 \approx$ tan θ_1. Además, puesto que tan θ_2 y tan θ_1, son, a su vez, pendientes de las rectas que contienen los vectores $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_1$ también se puede escribir

$$\tan\theta_2 = y'(x + \Delta x) \quad \text{y} \quad \tan\theta_1 = y'(x).$$

Por tanto, la ecuación (7) se convierte en

$$F \approx T[y'(x + \Delta x) - y'(x)]. \tag{8}$$

Segundo, se puede obtener una forma diferente de esta misma fuerza neta usando la segunda ley de Newton, $F = ma$. Aquí la masa del resorte en el intervalo es $m = \rho\,\Delta x$; la aceleración centrípeta de un cuerpo que gira con velocidad angular ω en un círculo de radio r es $a = r\omega^2$. Con Δx pequeña se toma $r = y$. Así la fuerza vertical neta es también aproximadamente igual a

$$F \approx -(\rho\,\Delta x)y\omega^2, \tag{9}$$

donde el signo menos viene del hecho de que la aceleración apunta en la dirección opuesta a la dirección y positiva. Ahora, al igualar (8) y (9), se tiene

$$T[y'(x + \Delta x) - y'(x)] = -(\rho\Delta x)y\omega^2 \quad \text{o} \quad T\underbrace{\frac{y'(x + \Delta x) - y'(x)}{\Delta x}}_{\text{cociente de diferencias}} + \rho\omega^2 y = 0. \tag{10}$$

Para Δx cercana a cero el cociente de diferencias en (10) es aproximadamente la segunda derivada d^2y/dx^2. Por último, se llega al modelo

$$T\frac{d^2y}{dx^2} + \rho\omega^2 y = 0. \tag{11}$$

Puesto que la cuerda está anclada en sus extremos en $x = 0$ y $x = L$, esperamos que la solución $y(x)$ de la ecuación (11) satisfaga también las condiciones frontera $y(0) = 0$ y $y(L) = 0$.

COMENTARIOS

i) Los eigenvalores no siempre son fáciles de encontrar, como sucedió en el ejemplo 2; es posible que se tengan que aproximar las raíces de ecuaciones como $\tan x = -x$ o $\cos x \cosh x = 1$. Véanse los problemas 34 a 38 en los ejercicios 5.2.

ii) Las condiciones de frontera aplicadas a una solución general de una ecuación diferencial dan lugar a un sistema algebraico homogéneo de ecuaciones lineales en las que las incógnitas son los coeficientes c_i de la solución general. Un sistema algebraico homogéneo de ecuaciones lineales es siempre consistente porque por lo menos tiene una solución trivial. Pero un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante de los coeficientes es igual a cero. Podría ser necesario usar este último hecho en los problemas 19 y 20 de los ejercicios 5.2.

EJERCICIOS 5.2

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-8.

Deflexión de una viga

En los problemas 1 a 5 resuelva la ecuación (4) sujeta a las condiciones de frontera adecuadas. La viga es de longitud L y w_0 es una constante.

1. a) La viga está empotrada en su extremo izquierdo y libre en su extremo derecho y $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.

b) Use un programa de graficación para trazar la curva de deflexión cuando $w_0 = 24EI$ y $L = 1$.

2. a) La viga está apoyada simplemente en ambos extremos, y $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.

b) Use un programa de graficación para trazar la curva de deflexión cuando $w_0 = 24EI$ y $L = 1$.

3. a) La viga está empotrada en su extremo izquierdo y apoyada simplemente en su extremo derecho, y $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.

b) Use un programa de graficación para trazar la curva de deflexión cuando $w_0 = 48EI$ y $L = 1$.

4. a) La viga está empotrada en su extremo izquierdo y apoyada simplemente en su extremo derecho, y $w(x) = w_0 \operatorname{sen}(\pi x/L)$, $0 < x < L$.

b) Utilice un programa de graficación para trazar la curva de deflexión cuando $w_0 = 2\pi^3 EI$ y $L = 1$.

c) Usando un programa de graficación para encontrar raíces (o de una calculadora gráfica) aproxime el punto en la gráfica del inciso b) en el que ocurre la máxima deflexión. ¿Cuál es la máxima deflexión?

5. a) La viga está simplemente soportada en ambos extremos y $w(x) = w_0 x$, $0 < x < L$.

b) Utilice un programa de graficación para trazar la curva de deflexión cuando $w_0 = 36EI$ y $L = 1$.

c) Usando un programa de graficación para encontrar raíces (o de una calculadora gráfica) aproxime el punto en la gráfica del inciso b) en el que ocurre la máxima deflexión. ¿Cuál es la máxima deflexión?

6. a) Calcule la deflexión máxima de la viga en voladizo del problema 1.

b) ¿Cómo se compara con el valor del inciso a) con la deflexión máxima de una viga que tiene la mitad de largo?

c) Encuentre la deflexión máxima de la viga apoyada del problema 2.

d) ¿Cómo se compara la deflexión máxima de la viga con apoyos simples del inciso c) con el valor de la deflexión máxima de la viga empotrada del ejemplo 1?

7. Una viga en voladizo de longitud L está empotrada en su extremo derecho y se aplica una fuerza de P libras en su extremo izquierdo libre. Cuando el origen se toma como su extremo libre, como se ilustra en la figura 5.2.7, se puede demostrar que la deflexión $y(x)$ de la viga satisface la ecuación diferencial

$$EIy'' = Py - w(x)\frac{x}{2}.$$

Encuentre la deflexión de la viga en voladizo si $w(x) = w_0 x$, $0 < x < L$ y $y(0) = 0$, $y'(L) = 0$.

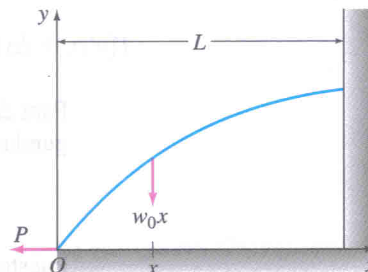


FIGURA 5.2.7 Deflexión de la viga en voladizo del problema 7.

8. Cuando se aplica una fuerza compresiva en lugar de una fuerza de tensión en el extremo libre de la viga del problema 7, la ecuación diferencial de la deflexión es

$$EIy'' = -Py - w(x)\frac{x}{2}.$$

Resuelva esta ecuación si $w(x) = w_0 x$, $0 < x < L$, y $y(0) = 0$, $y'(L) = 0$.

Eigenvalores y funciones propias

En los problemas 9 a 18 determine los eigenvalores y las funciones propias del problema con valores en la frontera dado.

9. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
10. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/4) = 0$
11. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0$
12. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi/2) = 0$
13. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
14. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(-\pi) = 0, \quad y(\pi) = 0$
15. $y'' + 2y' + (\lambda + 1)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(5) = 0$
16. $y'' + (\lambda+1)y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
17. $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(e^{\pi}) = 0$
18. $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad y'(e^{-1}) = 0, \quad y(1) = 0$

En los problemas 19 y 20 determine los eigenvalores y las funciones propias del problema con valores en la frontera dado. Considere sólo el caso $\lambda = \alpha^4$, $\alpha > 0$.

19. $y^{(4)} - \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y''(1) = 0$
20. $y^{(4)} - \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'''(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad y''(\pi) = 0$

Pandeo de una columna delgada

21. Considere la figura 5.2.5. ¿Dónde se deben colocar en la columna las restricciones físicas si se quiere que la carga crítica sea P_4? Dibuje la curva de deflexión correspondiente a esta carga.

22. Las cargas críticas de columnas delgadas dependen de las condiciones de extremo de la columna. El valor de la carga de Euler P_1 en el ejemplo 3 se obtuvo bajo la suposición de que la columna estaba abisagrada por ambos extremos. Suponga que una columna vertical homogénea delgada está empotrada en su base ($x = 0$) y libre en su parte superior ($x = L$) y que se aplica una carga axial constante P en su extremo libre. Esta carga causa una deflexión pequeña δ como se muestra en la figura 5.2.8 o no causa tal deflexión. En cualquier caso la ecuación diferencial para la deflexión $y(x)$ es

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = P\delta.$$



FIGURA 5.2.8 Deflexión de la columna vertical del problema 22.

a) ¿Cuál es la deflexión predicha cuando $\delta = 0$?
b) Cuando $\delta \neq 0$, demuestre que la carga de Euler para esta columna es un cuarto de la carga de Euler para la columna que está abisagrada del ejemplo 3.

23. Como se mencionó en el problema 22, la ecuación diferencial (5) que gobierna la deflexión $y(x)$ de una columna elástica delgada sujeta a una fuerza axial compresiva constante P es válida sólo cuando los extremos de la columna están abisagrados. En general, la ecuación diferencial que gobierna la deflexión de la columna está dada por

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) + P\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Suponga que la columna es uniforme (EI es una constante) y que los extremos de la columna están abisagrados. Muestre que la solución de esta ecuación diferencial de cuarto orden sujeta a las condiciones límite $y(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y(L) = 0$, $y''(L) = 0$ es equivalente al análisis del ejemplo 3.

24. Suponga que una columna elástica delgada y uniforme está abisagrada en el extremo $x = 0$ y empotrada en el extremo $x = L$.

a) Use la ecuación diferencial de cuarto orden del problema 23 para encontrar los valores propios λ_n, las cargas críticas P_n, la carga de Euler P_1 y las deflexiones $y_n(x)$.
b) Use un programa de graficación para trazar la gráfica del primer modo de pandeo.

Cuerda rotando

25. Considere el problema con valores en la frontera presentado en la construcción del modelo matemático para la forma de una cuerda rotatoria:

$$T\frac{d^2y}{dx^2} + \rho\omega^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Para T y ρ constantes, defina las velocidades críticas de la rotación angular ω_n como los valores de ω para los cuales el problema con valores en la frontera tiene soluciones no triviales. Determine las rapideces críticas ω_n y las deflexiones correspondientes $y_n(x)$.

26. Cuando la magnitud de la tensión T no es constante, entonces un modelo para la curva de deflexión o forma $y(x)$ que toma una cuerda rotatoria está dado por

$$\frac{d}{dx}\left[T(x)\frac{dy}{dx}\right] + \rho\omega^2 y = 0.$$

Suponga que $1 < x < e$ y que $T(x) = x^2$.

a) Si $y(1) = 0$, $y(e) = 0$ y $\rho\omega^2 > 0.25$, demuestre que las velocidades críticas de rotación angular son $\omega_n = \frac{1}{2}\sqrt{(4n^2\pi^2 + 1)/\rho}$ y las deflexiones correspondientes son

$$y_n(x) = c_2 x^{-1/2}\,\text{sen}(n\pi \ln x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

b) Utilice un programa de graficación para trazar las curvas de deflexión en el intervalo $[1, e]$ para $n = 1, 2, 3$. Elija $c_2 = 1$.

Diferentes problemas con valores en la frontera

27. Temperatura en una esfera Considere dos esferas concéntricas de radio $r = a$ y $r = b$, $a < b$. Véase la figura 5.2.9. La temperatura $u(r)$ en la región entre las esferas se determina del problema con valores en la frontera

$$r\frac{d^2u}{dr^2} + 2\frac{du}{dr} = 0, \quad u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1,$$

donde u_0 y u_1 son constantes. Resuelva para $u(r)$.

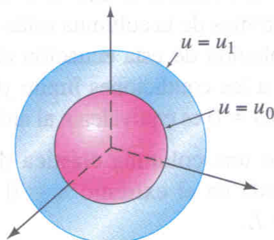


FIGURA 5.2.9 Esferas concéntricas del problema 27.

28. Temperatura en un anillo La temperatura $u(r)$ en el anillo circular mostrado en la figura 5.2.10 se determina a partir del problema con valores en la frontera

$$r\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = 0, \quad u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1,$$

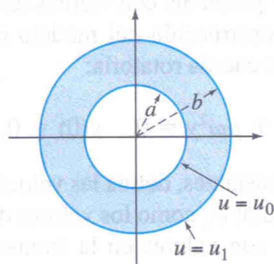


FIGURA 5.2.10 Anillo circular del problema 28.

donde u_0 y u_1 son constantes. Demuestre que

$$u(r) = \frac{u_0\ln(r/b) - u_1\ln(r/a)}{\ln(a/b)}.$$

Problemas para analizar

29. Movimiento armónico simple El modelo $mx'' + kx = 0$ para el movimiento armónico simple, que se analizó en la sección 5.1, se puede relacionar con el ejemplo 2 de esta sección.

Considere un sistema resorte/masa libre no amortiguado para el cual la constante de resorte es, digamos, $k = 10$ lb/pie. Determine las masas m_n que se pueden unir al resorte para que cuando se libere cada masa en la posición de equilibrio en $t = 0$ con una velocidad v_0 diferente de cero, pase por la posición de equilibrio en $t = 1$ segundo. ¿Cuántas veces pasa cada masa m_n por la posición de equilibrio en el intervalo de tiempo $0 < t < 1$?

30. Movimiento amortiguado Suponga que el modelo para el sistema resorte/masa del problema 29 se reemplaza por $mx'' + 2x' + kx = 0$. En otras palabras el sistema es libre pero está sujeto a amortiguamiento numéricamente igual a dos veces la velocidad instantánea. Con las mismas condiciones iniciales y la constante de resorte del problema 29, investigue si es posible encontrar una masa m que pase por la posición de equilibrio en $t = 1$ segundo.

En los problemas 31 y 32, determine si es posible encontrar valores y_0 y y_1 (problema 31) y valores de $L > 0$ (problema 32) tal que el problema con valores iniciales tenga **a)** exactamente una solución no trivial, **b)** más de una solución, **c)** ninguna solución, **d)** la solución trivial.

31. $y'' + 16y = 0, \quad y(0) = y_0, y(\pi/2) = y_1$

32. $y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 1, y(L) = 1$

33. Considere el problema con valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi).$$

a) Al tipo de condiciones en la frontera especificadas se le llaman **condiciones frontera periódicas**. Dé una interpretación geométrica de estas condiciones.

b) Determine los eigenvalores y las funciones propias del problema.

c) Usando un programa de graficación para trazar algunas de las funciones propias. Compruebe su interpretación geométrica de las condiciones frontera dadas en el inciso a).

34. Muestre que los eigenvalores y las funciones propias del problema con valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$$

son $\lambda_n = \alpha_n^2$ y $y_n = \text{sen}\,\alpha_n x$, respectivamente, donde α_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ son las raíces positivas consecutivas de la ecuación $\tan\alpha = -\alpha$.

Tarea para el laboratorio de computación

35. Use un SAC para trazar las gráficas que lo convenzan de que la ecuación $\tan \alpha = -\alpha$ del problema 34 tiene un número infinito de raíces. Explique por qué se pueden despreciar las raíces negativas de la ecuación. Explique por qué $\lambda = 0$ no es un eigenvalor aun cuando $\alpha = 0$ es una solución obvia de la ecuación $\tan \alpha = -\alpha$.

36. Usando un programa para determinar raíces de un SAC aproxime los primeros cuatro valores propios λ_1, λ_2, λ_3 y λ_4 para el PVF del problema 34.

En los problemas 37 y 38, determine los eigenvalores y las funciones propias del problema con valores en la frontera. Use un SAC para aproximar los primeros cuatro valores propios λ_1, λ_2, λ_3 y λ_4.

37. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) - \frac{1}{2}y'(1) = 0$

38. $y^{(4)} - \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0$
[*Sugerencia*: considere sólo $\lambda = \alpha^4$, $\alpha > 0$.]

5.3 MODELOS NO LINEALES

REPASO DE MATERIAL

- Sección 4.9

INTRODUCCIÓN En esta sección se examinan algunos modelos matemáticos no lineales de orden superior. Algunos de estos modelos se pueden resolver usando el método de sustitución (lo que conduce a la reducción de orden de la ED) presentado en la página 174. En algunos casos donde no se puede resolver el modelo, se muestra cómo se reemplaza la ED no lineal por una ED lineal mediante un proceso conocido como linealización.

RESORTES NO LINEALES El modelo matemático en (1) de la sección 5.1 tiene la forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = 0, \tag{1}$$

donde $F(x) = kx$. Debido a que x denota el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio, $F(x) = kx$ es la ley de Hooke, es decir, la fuerza ejercida por el resorte que tiende a restaurar la masa a la posición de equilibrio. Un resorte que actúa bajo una fuerza restauradora lineal $F(x) = kx$ se llama **resorte lineal**. Pero los resortes pocas veces son lineales. Dependiendo de cómo esté construido y del material utilizado, un resorte puede variar desde "flexible" o suave, hasta "rígido" o duro, por lo que su fuerza restauradora puede variar respecto a la ley lineal. En el caso de movimiento libre, si se supone que un resorte en buen estado tiene algunas características no lineales, entonces podría ser razonable suponer que la fuerza restauradora de un resorte, es decir, $F(x)$ en la ecuación (1), es proporcional al cubo del desplazamiento x de la masa más allá de su posición de equilibrio o que $F(x)$ es una combinación lineal de potencias del desplazamiento como el que se determina mediante la función no lineal $F(x) = kx + k_1x^3$. Un resorte cuyo modelo matemático incorpora una fuerza restauradora no lineal, como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx^3 = 0 \quad \text{o} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx + k_1x^3 = 0, \tag{2}$$

se llama **resorte no lineal**. Además, se examinan modelos matemáticos en los que el amortiguamiento impartido al movimiento era proporcional a la velocidad instantánea dx/dt y la fuerza restauradora de un resorte está dada por la función lineal $F(x) = kx$. Pero estas fueron suposiciones muy simples; en situaciones más reales, el amortiguamiento podría ser proporcional a alguna potencia de la velocidad instantánea dx/dt. La ecuación diferencial no lineal

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\left|\frac{dx}{dt}\right|\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{3}$$

es un modelo de un sistema libre resorte/masa en el que la fuerza de amortiguamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad. Así que es posible imaginar otras clases de modelos: amortiguamiento lineal y fuerza restauradora no lineal, amortiguamiento no lineal y fuerza restauradora no lineal, etcétera. El punto es que las características no lineales de un sistema físico dan lugar a un modelo matemático que es no lineal.

Observe en (2) que tanto $F(x) = kx^3$ como $F(x) = kx + k_1x^3$ son funciones impares de x. Para ver por qué una función polinomial que contiene sólo potencias impares de x proporciona un modelo razonable para la fuerza restauradora, se expresa a F como una serie de potencias centrada en la posición de equilibrio $x = 0$:

$$F(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots.$$

Cuando los desplazamientos x son pequeños, los valores de x_n son insignificantes para n suficientemente grande. Si se trunca la serie de potencias, por ejemplo, en el cuarto término, entonces $F(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$. Para la fuerza en $x > 0$,

$$F(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3,$$

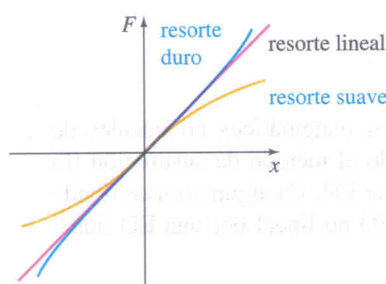


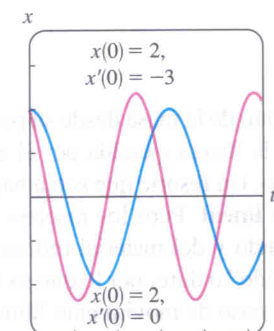
FIGURA 5.3.1 Resortes duros y suaves.

y para que la fuerza en $-x < 0$,

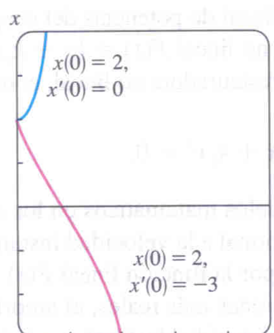
$$F(-x) = c_0 - c_1x + c_2x^2 - c_3x^3$$

tenga la misma magnitud pero actúe en dirección contraria, se debe tener $F(-x) = -F(x)$. Debido a que esto significa que F es una función impar, se debe tener $c_0 = 0$ y $c_2 = 0$ y por tanto, $F(x) = c_1x + c_3x^3$. Si se hubieran usado sólo los primeros dos términos de la serie, el mismo argumento produce la función lineal $F(x) = c_1x$. Se dice que una fuerza restauradora con potencias mixtas, como $F(x) = c_1x + c_2x^2$ y las vibraciones correspondientes, son asimétricas. En el análisis siguiente se escribe $c_1 = k$ y $c_3 = k_1$.

RESORTES DUROS Y SUAVES Analicemos con más detalle la ecuación (1) para el caso en que la fuerza restauradora está dada por $F(x) = kx + k_1x^3$, $k > 0$. Se dice que el resorte es **duro** si $k_1 > 0$ y **suave** si $k_1 < 0$. Las gráficas de tres tipos de fuerzas restauradoras se muestran en la figura 5.3.1. En el ejemplo siguiente se ilustran estos dos casos especiales de la ecuación diferencial $m\, d^2x/dt^2 + kx + k_1x^3 = 0$, $m > 0$, $k > 0$.



a) resorte duro



b) resorte suave

FIGURA 5.3.2 Curvas de solución numérica.

EJEMPLO 1 Comparación de resortes duros y suaves

Las ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + x^3 = 0 \tag{4}$$

y

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - x^3 = 0 \tag{5}$$

son casos especiales de la segunda ecuación en (2) y son modelos de un resorte duro y uno suave, respectivamente. En la figura 5.3.2a se muestran dos soluciones de (4) y en la figura 5.3.2b dos soluciones de (5) obtenidas de un programa de solución numérica. Las curvas mostradas en rojo son soluciones que satisfacen las condiciones iniciales $x(0) = 2$, $x'(0) = -3$; las dos curvas en rojo son soluciones que satisfacen $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$. Desde luego estas curvas solución indican que el movimiento de una masa en el resorte duro es oscilatorio, mientras que el movimiento de una masa en el resorte flexible al parecer es no oscilatorio. Pero se debe tener cuidado respecto a sacar conclusiones con base en un par de curvas de solución numérica. Un cuadro más complejo de la naturaleza de las soluciones de ambas ecuaciones, se obtiene del análisis cualitativo descrito en el capítulo 10. ■

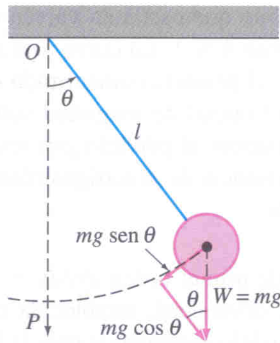


FIGURA 5.3.3 Péndulo simple.

PÉNDULO NO LINEAL Cualquier objeto que oscila de un lado a otro se llama **péndulo físico**. El **péndulo simple** es un caso especial del péndulo físico y consiste en una varilla de longitud l a la que se fija una masa m en un extremo. Al describir el movimiento de un péndulo simple en un plano vertical, se hacen las suposiciones de simplificación de que la masa de la varilla es despreciable y que ninguna fuerza externa de amortiguamiento o motriz actúa sobre el sistema. El ángulo de desplazamiento θ del péndulo, medido desde la vertical, como se ilustra en la figura 5.3.3, se considera positivo cuando se mide a la derecha de OP y negativo a la izquierda de OP. Ahora recuerde que el arco s de un círculo de radio l se relaciona con el ángulo central θ por la fórmula $s = l\theta$. Por tanto, la aceleración angular es

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l\,\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

De la segunda ley de Newton tenemos que

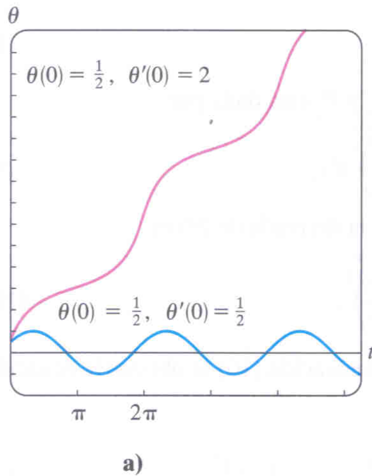
$$F = ma = ml\,\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

De la figura 5.3.3 se ve que la magnitud de la componente tangencial de la fuerza debida al peso W es mg sen θ. En cuanto a dirección esta fuerza es $-mg$ sen θ porque apunta a la izquierda para $\theta > 0$ y a la derecha para $\theta < 0$. Se igualan las dos versiones distintas de la fuerza tangencial para obtener $ml\, d^2\theta/dt^2 = -mg \operatorname{sen} \theta$, o

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0\,. \tag{6}$$

LINEALIZACIÓN Como resultado de la presencia de sen θ, el modelo en (6) es no lineal. En un intento por entender el comportamiento de las soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior, en ocasiones se trata de simplificar el problema sustituyendo términos no lineales por ciertas aproximaciones. Por ejemplo, la serie de Maclaurin para sen θ, está dada por

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$



a)



b) $\theta(0) = \frac{1}{2}$, $\theta'(0) = \frac{1}{2}$

c) $\theta(0) = \frac{1}{2}$, $\theta'(0) = 2$

FIGURA 5.3.4 Péndulo oscilante en b); péndulo giratorio en c).

así que si se usa la aproximación sen $\theta \approx \theta - \theta^3/6$, la ecuación (6) se convierte en $d^2\theta/dt^2 + (g/l)\theta - (g/6l)\theta^3 = 0$. Observe que esta última ecuación es la misma que la segunda ecuación lineal en (2) con $m = 1$, $k = g/l$ y $k_1 = -g/6l$. Sin embargo, si se supone que los desplazamientos θ son suficientemente pequeños para justificar el uso de la sustitución sen $\theta \approx \theta$, entonces la ecuación (6) se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0. \tag{7}$$

Vea el problema 22 en los ejercicios 5.3. Si se hace $\omega^2 = g/l$, se reconoce a (7) como la ecuación diferencial (2) de la sección 5.1 que es un modelo para las vibraciones libres no amortiguadas de un sistema lineal resorte/masa. En otras palabras, (7) es de nuevo la ecuación lineal básica $y'' + \lambda y = 0$ analizada en la página 201 de la sección 5.2. Como consecuencia se dice que la ecuación (7) es una **linealización** de la ecuación (6). Debido a que la solución general de (7) es $\theta(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$, esta linealización indica que para condiciones iniciales correspondientes a oscilaciones pequeñas el movimiento del péndulo descrito por (6) es periódico.

EJEMPLO 2 Dos problemas con valores iniciales

Las gráficas de la figura 5.3.4a se obtuvieron con ayuda de un programa de solución numérica y representan curvas solución de la ecuación (6) cuando $\omega^2 = 1$. La curva azul ilustra la solución de (6) que satisface las condiciones iniciales $\theta(0) = \frac{1}{2}$, $\theta'(0) = \frac{1}{2}$, mientras que la curva roja es la solución de (6) que satisface $\theta(0) = \frac{1}{2}$, $\theta'(0) = 2$. La

curva azul representa una solución periódica, el péndulo que oscila en vaivén como se muestra en la figura 5.3.4b con una amplitud aparente $A \leq 1$. La curva roja muestra que θ crece sin límite cuando aumenta el tiempo, el péndulo comenzando desde el mismo desplazamiento inicial recibe una velocidad inicial de magnitud suficientemente grande para enviarlo hasta arriba; en otras palabras, el péndulo gira respecto a su pivote como se ilustra en la figura 5.3.4c. En ausencia de amortiguamiento, el movimiento en cada caso continúa de forma indefinida. ■

CABLES TELEFÓNICOS La ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = W/T_1$ es la ecuación (17) de la sección 1.3. Esta ecuación diferencial, establecida con la ayuda de la figura 1.3.7 en la página 25, sirve como modelo matemático para la forma de un cable flexible suspendido entre dos soportes verticales cuando el cable lleva una carga vertical. En la sección 2.2 se resuelve esta ED simple bajo la suposición de que la carga vertical que soportan los cables de un puente suspendido era el peso de la carpeta asfáltica distribuida de modo uniforme a lo largo del eje x. Con $W = \rho x$, ρ el peso por unidad de longitud de la carpeta asfáltica, la forma de cada cable entre los apoyos verticales resultó ser parabólica. Ahora se está en condiciones de determinar la forma de un cable flexible uniforme que cuelga sólo bajo su propio peso, como un cable suspendido entre dos postes telefónicos. Ahora la carga vertical es el cable y por tanto, si ρ es la densidad lineal del alambre (medido, por ejemplo, en libras por pie) y s es la longitud del segmento P_1P_2 en la figura 1.3.7, entonces $W = \rho s$. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho s}{T_1}. \tag{8}$$

Puesto que la longitud de arco entre los puntos P_1 y P_2 está dada por

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \tag{9}$$

del teorema fundamental del cálculo se tiene que la derivada de (9) es

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{10}$$

Derivando la ecuación (8) respecto a x y usando la ecuación (10) se obtiene la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{T_1}\frac{ds}{dx} \quad \text{o} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{T_1}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{11}$$

En el ejemplo siguiente se resuelve la ecuación (11) y se muestra que la curva del cable suspendido es una **catenaria**. Antes de proceder, observe que la ecuación diferencial no lineal de segundo orden (11) es una de las ecuaciones que tienen la forma $F(x, y', y'') = 0$ analizadas en la sección 4.9. Recuerde que hay posibilidades de resolver una ecuación de este tipo al reducir el orden de la ecuación usando la sustitución $u = y'$.

EJEMPLO 3 Un problema con valores iniciales

De la posición del eje y en la figura 1.3.7 es evidente que las condiciones iniciales relacionadas con la segunda ecuación diferencial en (11) son $y(0) = a$ y $y'(0) = 0$. Si se sustituye $u = y'$, entonces la ecuación en (11) se convierte en $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\rho}{T_1}\sqrt{1 + u^2}$.

Separando las variables se encuentra que

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{\rho}{T_1}\int dx \quad \text{se obtiene} \quad \operatorname{senh}^{-1}u = \frac{\rho}{T_1}x + c_1.$$

Ahora, $y'(0) = 0$ es equivalente a $u(0) = 0$. Puesto que $\operatorname{senh}^{-1} 0 = 0$, $c_1 = 0$ y por tanto, $u = \operatorname{senh}(\rho x/T_1)$. Por último, integrando ambos lados de

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{senh}\frac{\rho}{T_1}x, \quad \text{obtenemos} \quad y = \frac{T_1}{\rho}\cosh\frac{\rho}{T_1}x + c_2.$$

Con $y(0) = a$, $\cosh 0 = 1$, se deduce de la última ecuación que $c_2 = a - T_1/\rho$. Por tanto vemos que la forma del cable que cuelga está dada por $y = (T_1/\rho)\cosh(\rho x/T_1) + a - T_1/\rho$. ■

Si en el ejemplo 3 hemos sabido escoger desde el principio $a = T_1/\rho$, entonces la solución del problema habría sido simplemente el coseno hiperbólico $y = (T_1/\rho)\cosh(\rho x/T_1)$.

MOVIMIENTO DE UN COHETE En la sección 1.3 se vio que la ecuación diferencial de un cuerpo de masa m en caída libre cerca de la superficie de la Tierra está dada por

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg, \quad \text{o simplemente} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -g,$$

donde s representa la distancia desde la superficie de la Tierra hasta el objeto y se considera que la dirección positiva es hacia arriba. Dicho de otra forma, la suposición básica en este caso es que la distancia s al objeto es pequeña cuando se compara con el radio R de la Tierra; en otras palabras, la distancia y desde el centro de la Tierra al objeto es aproximadamente la misma que R. Si, por otro lado, la distancia y al objeto, por ejemplo un cohete o una sonda espacial, es grande comparada con R, entonces se combina la segunda ley de Newton del movimiento y su ley de gravitación universal para obtener una ecuación diferencial en la variable y.

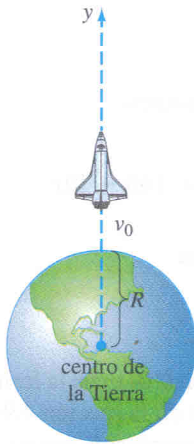


FIGURA 5.3.5 La distancia al cohete es grande comparada con R.

Suponga que se lanza verticalmente hacia arriba un cohete desde el suelo como se ilustra en la figura 5.3.5. Si la dirección positiva es hacia arriba y se desprecia la resistencia del aire, entonces la ecuación diferencial de movimiento después de consumir el combustible es

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{Mm}{y^2} \quad \text{o} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{M}{y^2}, \tag{12}$$

donde k es una constante de proporcionalidad, y es la distancia desde el centro de la Tierra al cohete, M es la masa de la Tierra y m es la masa del cohete. Para determinar la constante k, se usa el hecho de que cuando $y = R$, $kMm/R^2 = mg$ o $k = gR^2/M$. Así que la última ecuación en (12) se convierte en

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g\frac{R^2}{y^2}. \tag{13}$$

Véase el problema 14 en los ejercicios 5.3.

MASA VARIABLE Observe en la explicación anterior que se describe el movimiento del cohete después de que ha quemado todo su combustible, cuando supuestamente su masa m es constante. Por supuesto, durante su ascenso la masa total del cohete propulsado varía a medida que se consume el combustible. La segunda ley del movimiento, como la adelantó Newton en un principio, establece que cuando un cuerpo de masa m se mueve por un campo de fuerza con velocidad v, la rapidez de cambio respecto al tiempo de la cantidad de movimiento mv del cuerpo es igual a la fuerza aplicada o neta F que actúa sobre el cuerpo:

$$F = \frac{d}{dt}(mv). \tag{14}$$

Si m es constante, entonces la ecuación (14) produce la forma más familiar $F = m\,dv/dt = ma$, donde a es la aceleración. En el siguiente ejemplo se usa la forma de la segunda ley de Newton dada en la ecuación (14), en la que la masa m del cuerpo es variable.

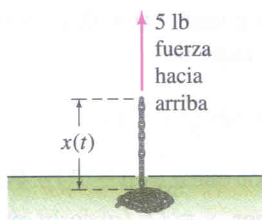


FIGURA 5.3.6 Cadena jalada hacia arriba por una fuerza constante.

EJEMPLO 4 Cadena jalada hacia arriba por una fuerza constante

Una cadena uniforme de 10 pies de largo se enrolla sin tensión sobre el piso. Un extremo de la cadena se jala verticalmente hacia arriba usando una fuerza constante de 5 libras. La cadena pesa 1 libra por pie. Determine la altura del extremo sobre el nivel de suelo al tiempo t. Véase la figura 5.3.6.

SOLUCIÓN Supongamos que $x = x(t)$ denota la altura del extremo de la cadena en el aire al tiempo t, $v = dx/dt$ y que la dirección positiva es hacia arriba. Para la porción de la cadena que está en el aire en el tiempo t se tienen las siguientes cantidades variables:

peso: $W = (x \text{ pie}) \cdot (1 \text{ lb/pie}) = x,$

masa: $m = W/g = x/32,$

fuerza neta: $F = 5 - W = 5 - x.$

Así de la ecuación (14) se tiene

regla del producto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{32}v\right) = 5 - x \quad \text{o} \quad x\frac{dv}{dt} + v\frac{dx}{dt} = 160 - 32x. \tag{15}$$

Debido a que $v = dx/dt$, la última ecuación se convierte en

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 32x = 160. \tag{16}$$

La segunda ecuación diferencial no lineal de segundo orden (16) tiene la forma $F(x, x', x'') = 0$, que es la segunda de las dos formas consideradas en la sección 4.9 que posiblemente se pueden resolver por reducción de orden. Para resolver la ecuación (16), se vuelve a (15) y se usa $v = x'$ junto con la regla de la cadena. De $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$ la segunda ecuación en (15) se puede escribir como

$$xv\frac{dv}{dx} + v^2 = 160 - 32x. \tag{17}$$

Al inspeccionar la ecuación (17) podría parecer de difícil solución, puesto que no se puede caracterizar como alguna de las ecuaciones de primer orden resueltas en el capítulo 2. Sin embargo, si se reescribe la ecuación (17) en la forma diferencial $M(x, v)dx + N(x, v)dv = 0$, se observa que, aunque la ecuación

$$(v^2 + 32x - 160)dx + xv\,dv = 0 \tag{18}$$

no es exacta, se puede transformar en una ecuación exacta al multiplicarla por un factor integrante. De $(M_y - N_x)/N = 1/x$ se ve de (13) de la sección 2.4 que un factor integrante es $e^{\int dx/x} = e^{\ln x} = x$. Cuando la ecuación (18) se multiplica por $\mu(x) = x$, la ecuación resultante es exacta (compruebe). Identificando $\partial f/\partial x = xv^2 + 32x^2 - 160x$, $\partial f/\partial v = x^2v$ y procediendo después como en la sección 2.4, se obtiene

$$\frac{1}{2}x^2v^2 + \frac{32}{3}x^3 - 80x^2 = c_1. \tag{19}$$

Puesto que se supuso que al principio toda la cadena está sobre el piso, se tiene $x(0) = 0$. Esta última condición aplicada a la ecuación (19) produce $c_1 = 0$. Resolviendo la ecuación algebraica $\frac{1}{2}x^2v^2 + \frac{32}{3}x^3 - 80x^2 = 0$ para $v = dx/dt > 0$, se obtiene otra ecuación diferencial de primer orden,

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{160 - \frac{64}{3}x}.$$

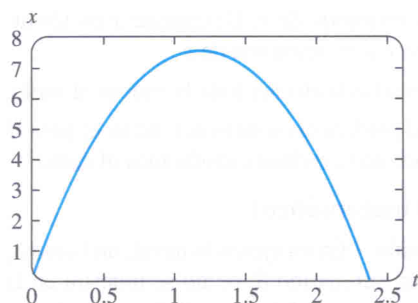


FIGURA 5.3.7 Gráfica de (21) para $x(t) \geq 0$.

La última ecuación se puede resolver por separación de variables. Se debe comprobar que

$$-\frac{3}{32}\left(160 - \frac{64}{3}x\right)^{1/2} = t + c_2. \qquad (20)$$

Esta vez la condición inicial $x(0) = 0$ indica que $c_2 = -3\sqrt{10}/8$. Por último, elevando al cuadrado ambos lados de (20) y despejando x, llegamos al resultado deseado,

$$x(t) = \frac{15}{2} - \frac{15}{2}\left(1 - \frac{4\sqrt{10}}{15}t\right)^2. \qquad (21)$$

La gráfica de la ecuación 21 que se presenta en la figura 5.3.7 no se debe, con bases físicas, aceptar tal cual. Véase el problema 15 de los ejercicios 5.3. ■

EJERCICIOS 5.3

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-8.

Al profesor Además de los problemas 24 y 25, todos o parte de los problemas 1 a 6, 8 a 13, 15, 20 y 21 podrían servir como tareas del laboratorio de computación.

Resortes no lineales

En los problemas 1 al 4, la ecuación diferencial dada es modelo de un sistema resorte/masa no amortiguado en el que la fuerza restauradora $F(x)$ en (1) es no lineal. Para cada ecuación utilice un programa de solución numérica para trazar las curvas solución que satisfacen las condiciones iniciales del problema. Si al parecer las soluciones son periódicas, use la curva solución para estimar el periodo T de las oscilaciones.

1. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x^3 = 0,$

$x(0) = 1, x'(0) = 1; \quad x(0) = \frac{1}{2}, x'(0) = -1$

2. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x - 16x^3 = 0,$

$x(0) = 1, x'(0) = 1; \quad x(0) = -2, x'(0) = 2$

3. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2x - x^2 = 0,$

$x(0) = 1, x'(0) = 1; \quad x(0) = \frac{3}{2}, x'(0) = -1$

4. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + xe^{0.01x} = 0,$

$x(0) = 1, x'(0) = 1; \quad x(0) = 3, x'(0) = -1$

5. En el problema 3, suponga que la masa se libera desde la posición inicial $x(0) = 1$ con una velocidad inicial $x'(0) = x_1$. Use un programa de solución numérica para estimar el valor más pequeño de $|x_1|$ en el que el movimiento de la masa es no periódico.

6. En el problema 3, suponga que la masa se libera desde una posición inicial $x(0) = x_0$ con velocidad inicial $x'(0) = 1$. Usando un programa de solución numérica estime un intervalo $a \leq x_0 \leq b$ para el cual el movimiento sea oscilatorio.

7. Determine una linealización de la ecuación diferencial del problema 4.

8. Considere el modelo de un sistema resorte/masa no lineal sin amortiguamiento dado por $x'' + 8x - 6x^3 + x^5 = 0$. Use un programa de solución numérica para analizar la naturaleza de las oscilaciones del sistema que corresponden a las condiciones iniciales:

$x(0) = 1, x'(0) = 1; \quad x(0) = -2, x'(0) = \frac{1}{2};$

$x(0) = \sqrt{2}, x'(0) = 1; \quad x(0) = 2, x'(0) = \frac{1}{2};$

$x(0) = 2, x'(0) = 0; \quad x(0) = -\sqrt{2}, x'(0) = -1.$

En los problemas 9 y 10 la ecuación diferencial dada es un modelo de un sistema resorte/masa no lineal amortiguado. Prediga el comportamiento de cada sistema cuando $t \to \infty$. Para cada ecuación use un programa de solución numérica para obtener las curvas solución que satisfacen las condiciones iniciales del problema dadas.

9. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + x + x^3 = 0,$

$x(0) = -3, x'(0) = 4; \quad x(0) = 0, x'(0) = -8$

10. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + x - x^3 = 0,$

$x(0) = 0, x'(0) = \frac{3}{2}; \quad x(0) = -1, x'(0) = 1$

11. El modelo $mx'' + kx + k_1x^3 = F_0 \cos \omega t$ de un sistema no amortiguado resorte/masa forzado en forma periódica se llama **ecuación diferencial de Duffing**. Considere el problema con valores iniciales $x'' + x + k_1x^3 = 5 \cos t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. Use un programa de solución numérica para investigar el comportamiento del sistema para valores de $k_1 > 0$ que van de $k_1 = 0.01$ a $k_1 = 100$. Exprese sus conclusiones.

12. a) Encuentre los valores de $k_1 < 0$ para los cuales el sistema del problema 11 es oscilatorio.

b) Considere el problema con valores iniciales

$$x'' + x + k_1x^3 = \cos \tfrac{3}{2}t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Encuentre valores para $k_1 < 0$ para los cuales el sistema es oscilatorio.

Péndulo no lineal

13. Considere el modelo del péndulo no lineal amortiguado libre dado por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda\frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \operatorname{sen}\theta = 0.$$

Use un programa de solución numérica para investigar si el movimiento en los dos casos $\lambda^2 - \omega^2 > 0$ y $\lambda^2 - \omega^2 < 0$ corresponde, respectivamente, a los casos sobreamortiguado y subamortiguado analizados en la sección 5.1 para sistemas resorte/masa. Elija las condiciones iniciales apropiadas y los valores de λ y ω.

Movimiento de un cohete

14. **a)** Use la sustitución $v = dy/dt$ para despejar de la ecuación (13) a v en términos de y. Suponiendo que la velocidad del cohete cuando se agota el combustible es $v = v_0$ y $y \approx R$ en ese instante, demuestre que el valor aproximado de la constante c de integración es $c = -gR + \frac{1}{2}v_0^2$.

b) Use la solución para v del inciso a) con el fin de demostrar que la velocidad de escape de un cohete está dada por $v_0 = \sqrt{2gR}$. [*Sugerencia*: Tome $y \to \infty$ y suponga que $v > 0$ para todo tiempo t.]

c) El resultado del inciso b) se cumple para cualquier cuerpo del sistema solar. Use los valores $g = 32$ pies/s² y $R = 4000$ millas para demostrar que la velocidad de escape de la Tierra es (aproximadamente) $v_0 = 25\,000$ mi/h.

d) Determine la velocidad de escape en la Luna si la aceleración debida a la gravedad es $0.165g$ y $R = 1080$ millas.

Masa variable

15. **a)** En el ejemplo 4, ¿qué longitud de la cadena se esperaría, por intuición, que pudiera levantar la fuerza constante de 5 libras?

b) ¿Cuál es la velocidad inicial de la cadena?

c) ¿Por qué el intervalo de tiempo que corresponde a $x(t) \geq 0$ ilustrado en la figura 5.3.7, no es el intervalo I de definición de la solución (21)? Determine el intervalo I. ¿Qué longitud de la cadena se levanta en realidad? Explique cualquier diferencia entre esta respuesta y la predicción del inciso a).

d) ¿Por qué esperaría que $x(t)$ fuese una solución periódica?

16. Una cadena uniforme de longitud L, medida en pies, se mantiene verticalmente por lo que el extremo inferior apenas toca el piso. La cadena pesa 2 lb/pie. El extremo superior que está sujeto se libera desde el reposo en $t = 0$ y la cadena cae recta. Si $x(t)$ denota la longitud de la cadena en el piso al tiempo t, se desprecia la resistencia del aire y se determina que la dirección positiva es hacia abajo, entonces

$$(L - x)\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = Lg.$$

a) Resuelva v en términos de x. Determine x en términos de t. Exprese v en términos de t.

b) Determine cuánto tarda en caer toda la cadena al suelo.

c) ¿Qué velocidad predice el modelo del inciso a) para el extremo superior de la cadena cuando toca el suelo?

Diferentes modelos matemáticos

17. **Curva de persecución** En un ejercicio naval, un barco S_1 es perseguido por un submarino S_2 como se muestra en la figura 5.3.8. El barco S_1 parte del punto (0, 0) en $t = 0$ y se mueve a lo largo de un curso en línea recta (el eje y) a una rapidez constante v_1. El submarino S_2 mantiene al barco S_1 en contacto visual, indicado por la línea punteada L en la figura mientras que viaja con una rapidez constante v_2 a lo largo de la curva C. Suponga que el barco S_2 comienza en el punto $(a, 0)$, $a > 0$, en $t = 0$ y que L es tangente a C.

a) Determine un modelo matemático que describe la curva C.

b) Encuentre una solución explícita de la ecuación diferencial. Por conveniencia defina $r = v_1/v_2$.

c) Determine si las trayectorias de S_1 y S_2 alguna vez se interceptarían al considerar los casos $r > 1$, $r < 1$ y $r = 1$.

[*Sugerencia*: $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dt}{ds}\dfrac{ds}{dx}$, donde s es la longitud de arco medida a lo largo de C.]

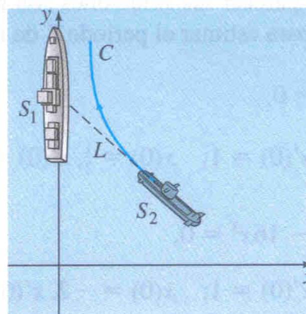


FIGURA 5.3.8 Curva de persecución del problema 17.

18. **Curva de persecución** En otro ejercicio naval, un destructor S_1 persigue a un submarino S_2. Suponga que S_1 en (9, 0) en el eje x detecta a S_2 en (0, 0) y que al mismo tiempo S_2 detecta a S_1. El capitán del destructor S_1 supone que el submarino emprenderá una acción evasiva inmediata y especula que su nuevo curso probable es la recta indicada en la figura 5.3.9. Cuando S_1 está en (3, 0), cambia de su curso en línea recta hacia el origen a una curva de persecución C. Suponga que la velocidad del destructor es, en todo momento, una constante de 30 millas/h y que la rapidez del submarino es constante de 15 millas/h.

a) Explique por qué el capitán espera hasta que S_1 llegue a (3, 0) antes de ordenar un cambio de curso a C.

b) Usando coordenadas polares, encuentre una ecuación $r = f(\theta)$ para la curva C.

c) Sea que T denote el tiempo, medido desde la detección inicial, en que el destructor intercepta al submarino. Determine un límite superior para T.

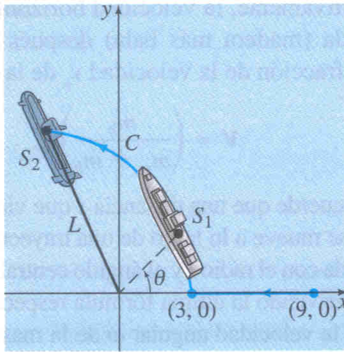


FIGURA 5.3.9 Curva de persecución del problema 18.

Problemas para analizar

19. Analice por qué el término de amortiguamiento de la ecuación (3) se escribe como

$$\beta\left|\frac{dx}{dt}\right|\frac{dx}{dt} \quad \text{en lugar de} \quad \beta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

20. **a)** Experimente con una calculadora para encontrar un intervalo $0 \le \theta \le \theta_1$, donde θ se mide en radianes, para el cual se considera que sen $\theta \approx \theta$ es una estimación bastante buena. Luego, use un programa de graficación para trazar las gráficas de $y = x$ y $y =$ sen x en el mismo eje de coordenadas para $0 \le x \le \pi/2$. ¿Las gráficas confirman sus observaciones con la calculadora?

b) Utilice un programa de solución numérica para trazar las curvas solución de los problemas de valor inicial.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \operatorname{sen}\theta = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0$$

y

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \theta = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0$$

para varios valores de θ_0 en el intervalo $0 \le \theta \le \theta_1$ determinado en el inciso a). Luego, trace la gráfica curvas de solución de los problemas con valores iniciales para varios valores de θ_0 para los cuales $\theta_0 > \theta_1$.

21. **a)** Considere el péndulo no lineal cuyas oscilaciones se definen por la ecuación (6). Use un programa de solución numérica como ayuda para determinar si un péndulo de longitud l oscilará más rápido en la Tierra o en la Luna. Use las mismas condiciones iniciales, pero elíjalas de tal modo que el péndulo oscile en vaivén.

b) ¿Para qué lugar del inciso a) el péndulo tiene mayor amplitud?

c) ¿Las conclusiones de los incisos a) y b) son las mismas cuando se emplea el modelo lineal (7)?

Tarea para el laboratorio de computación

22. Considere el problema con valores iniciales

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \operatorname{sen}\theta = 0, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{12}, \quad \theta'(0) = -\frac{1}{3}$$

para un péndulo no lineal. Puesto que no se puede resolver la ecuación diferencial, no es posible encontrar una solución explícita de este problema. Pero suponga que se desea determinar la primer $t_1 > 0$ para la cual el péndulo de la figura 5.3.3, comenzando desde su posición inicial a la derecha, alcanza la posición OP, es decir, la primera raíz positiva de $\theta(t) = 0$. En este problema y el siguiente, se examinan varias formas de cómo proceder.

a) Aproxime t_1 resolviendo el problema lineal $d^2\theta/dt^2 + \theta = 0$, $\theta(0) = \pi/12$, $\theta'(0) = -\frac{1}{3}$.

b) Use el método ilustrado en el ejemplo 3 de la sección 4.9 para encontrar los primeros cuatro términos no nulos de una solución en serie de Taylor $\theta(t)$ centrada en 0 para el problema con valores iniciales no lineal. Dé los valores exactos de los coeficientes.

c) Use los dos primeros términos de la serie de Taylor del inciso b) para aproximar t_1.

d) Emplee los tres primeros términos de la serie de Taylor del inciso b) para aproximar t_1.

e) Utilice una aplicación de un SAC (o una calculadora gráfica) para encontrar raíces y los primeros cuatro términos de la serie de Taylor del inciso b) para aproximar t_1.

f) En esta parte del problema se proporcionan las instrucciones de *Mathematica* que permiten aproximar la raíz t_1. El procedimiento se modifica con facilidad por lo que se puede aproximar cualquier raíz de $\theta(t) = 0$. (*Si no tiene Mathematica, adapte el procedimiento mediante la sintaxis correspondiente para el SAC que tiene.*) Reproduzca con precisión y luego, a su vez, ejecute cada línea de la secuencia dada de instrucciones.

```
sol = NDSolve[{y″[t] + Sin[y[t]] == 0,
        y[0] == Pi/12, y′[0] == −1/3},
        y, {t, 0, 5}]//Flatten
Solución = y[t]/.sol
Clear[y]
y[t_]: = Evaluate[Solución]
y[t]
gr1 = Plot[y[t], {t, 0, 5}]
root = FindRoot[y[t] == 0, {t, 1}]
```

g) Modifique de manera apropiada la sintaxis del inciso f) y determine las siguientes dos raíces positivas de $\theta(t) = 0$.

23. Considere un péndulo que se libera desde el reposo con un desplazamiento inicial de θ_0 radianes. Resolviendo el modelo lineal (7) sujeto a las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = 0$ se obtiene $\theta(t) = \theta_0 \cos\sqrt{g/l}\,t$. El periodo de oscilaciones que se predice con este modelo, se determina mediante la conocida fórmula $T = 2\pi/\sqrt{g/l} = 2\pi\sqrt{l/g}$. Lo interesante de esta fórmula para T es que no depende de la magnitud del desplazamiento inicial θ_0. En otras palabras, el modelo lineal predice que el tiempo que tardaría el péndulo en oscilar desde un desplazamiento inicial de, digamos, $\theta_0 = \pi/2$ (= 90°) a $-\pi/2$ y de regreso otra vez, sería exactamente el mismo que tardaría en completar el ciclo de, digamos, $\theta_0 = \pi/360$ (= 0.5°) a $-\pi/360$. Esto es ilógico desde el punto de vista intuitivo ya que el periodo real debe depender de θ_0.

Si se supone que $g = 32$ pies/s^2 y $l = 32$ pies, entonces el periodo de oscilación del modelo lineal es $T = 2\pi$ s. Compare este último número con el periodo predicho mediante el modelo no lineal cuando $\theta_0 = \pi/4$. Usando un programa de solución numérica que sea capaz de generar datos concretos y reales, aproxime la solución de

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \text{sen}\,\theta = 0, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{4}, \quad \theta'(0) = 0$$

en el intervalo a $0 \leq t \leq 2$. Como en el problema 22, si t_1 denota la primera vez que el péndulo alcanza la posición OP en la figura 5.3.3, entonces el periodo del péndulo no lineal es $4t_1$. Aquí está otra forma de resolver la ecuación $\theta(t) = 0$. Experimente con tamaños de paso y haga avanzar el tiempo, comenzando en $t = 0$ y terminando en $t = 2$. De sus datos concretos, observe el tiempo t_1 cuando $\theta(t)$ cambia, por primera vez de positiva a negativa. Use el valor t_1 para determinar el valor verdadero del periodo del péndulo no lineal. Calcule el error relativo porcentual en el periodo estimado por $T = 2\pi$.

Problema aportado

Warren S. Wright
Profesor del Departamento de Matemáticas, Universidad Loyola Marymount

24. El péndulo balístico Históricamente para mantener el control de calidad sobre las municiones (balas) producidas por una línea de montaje, el fabricante usaría un **péndulo balístico** para determinar la velocidad de la boca de un arma, es decir, la velocidad de una bala cuando deja el barril. El péndulo balístico (inventado en 1742) es simplemente un péndulo plano que consiste en una varilla de masa despreciable que está unida a un bloque de madera de masa m_w. El sistema se pone en movimiento por el impacto de una bala que se está moviendo horizontalmente con una velocidad desconocida v_b; al momento del impacto, que se toma como $t = 0$, la masa combinada es $m_w + m_b$, donde m_b es la masa de la bala incrustada en la madera. En (7) vimos que en el caso de pequeñas oscilaciones, el desplazamiento angular $\theta(t)$ del péndulo plano que se muestra en la figura 5.3.3 está dado por la ED lineal $\theta'' + (g/l)\theta = 0$, donde $\theta > 0$ corresponde al movimiento a la derecha de la vertical. La velocidad v_b se puede encontrar midiendo la altura h de la masa $m_w + m_b$ en el ángulo de desplazamiento máximo $\theta_{máx}$ que se muestra en la figura 5.3.10.

Intuitivamente, la velocidad horizontal V de la masa combinada (madera más bala) después del impacto es sólo una fracción de la velocidad v_b de la bala, es decir,

$$V = \left(\frac{m_b}{m_w + m_b}\right)v_b.$$

Ahora, recuerde que una distancia s que viaja por una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria circular está relacionada con el radio l y el ángulo central θ por la fórmula $s = l\theta$. Derivando la última fórmula respecto al tiempo t, se tiene que la velocidad angular ω de la masa y su velocidad lineal v está relacionada por $v = l\omega$. Por tanto, la velocidad angular ω_0 en el tiempo t para el que la bala impacta el bloque de madera está relacionada con V por $V = l\omega_0$ o

$$\omega_0 = \left(\frac{m_b}{m_w + m_b}\right)\frac{v_b}{l}.$$

a) Resuelva el problema con valores iniciales

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta'(0) = \omega_0.$$

b) Use el resultado del inciso a) para demostrar que

$$v_b = \left(\frac{m_w + m_b}{m_b}\right)\sqrt{lg}\,\theta_{máx}.$$

c) Use la figura 5.3.10 para expresar $\cos\theta_{máx}$ en términos de l y de h. Después utilice los primeros dos términos de la serie de Maclaurin para $\cos\theta$ para expresar $\theta_{máx}$ en términos de l y de h. Por último, demuestre que v_b está dado (aproximadamente) por

$$v_b = \left(\frac{m_w + m_b}{m_b}\right)\sqrt{2gh}.$$

d) Use el resultado del inciso c) para encontrar v_b cuando $m_b = 5$ g, $m_w = 1$ kg y $h = 6$ cm.

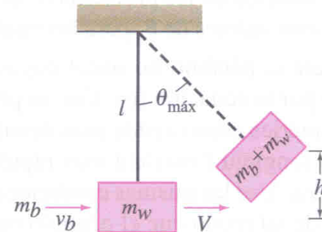


FIGURA 5.3.10 Péndulo balístico.

REPASO DEL CAPÍTULO 5

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-8.

Conteste los problemas 1 al 8 sin consultar el texto. Complete el espacio en blanco o conteste verdadero o falso.

1. Si una masa que pesa 10 libras alarga 2.5 pies un resorte, una masa que pesa 32 libras lo alarga _______ pies.

2. El periodo del movimiento armónico simple de una masa que pesa 8 libras, unida a un resorte cuya constante es 6.25 lb/pie es de _______ segundos.

3. La ecuación diferencial de un sistema resorte/masa es $x'' + 16x = 0$. Si la masa se libera inicialmente desde un

punto que está 1 metro arriba de la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 3 m/s, la amplitud de las vibraciones es de __________ metros.

4. La resonancia pura no tiene lugar en presencia de una fuerza de amortiguamiento. __________

5. En presencia de una fuerza de amortiguamiento, los desplazamientos de una masa en un resorte siempre tienden a cero cuando $t \to \infty$. __________

6. Una masa en un resorte cuyo movimiento está críticamente amortiguado tiene posibilidades de pasar por la posición de equilibrio dos veces. __________

7. En amortiguamiento crítico cualquier aumento de amortiguamiento dará como resultado un sistema __________.

8. Si el movimiento armónico simple se describe mediante $x = (\sqrt{2}/2)\operatorname{sen}(2t + \phi)$, cuando las condiciones iniciales son $x(0) = -\frac{1}{2}$ y $x'(0) = 1$.

En los problemas 9 y 10 los eigenvalores y las funciones propias del problema con valores en la frontera $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$ son $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, y $y = \cos nx$, respectivamente. Llene los espacios en blanco.

9. Una solución del PVF cuando $\lambda = 8$ es $y =$ __________ porque __________.

10. Una solución del PVF cuando $\lambda = 36$ es $y =$ __________ porque __________.

11. Un sistema resorte/masa libre no amortiguado oscila con un periodo de 3 segundos. Cuando se eliminan 8 libras del resorte, el sistema tiene un periodo de 2 segundos. ¿Cuál era el peso de la masa original en el resorte?

12. Una masa que pesa 12 libras alarga 2 pies un resorte. Al inicio la masa se libera desde un punto 1 pie abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 4 pies/s.
   a) Determine la ecuación de movimiento.
   b) ¿Cuáles son la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento armónico simple?
   c) ¿En qué instantes la masa vuelve al punto situado a 1 pie abajo de la posición de equilibrio?
   d) ¿En qué instantes la masa pasa por la posición de equilibrio en dirección hacia arriba? ¿En dirección hacia abajo?
   e) ¿Cuál es la velocidad de la masa en $t = 3\pi/16$ s?
   f) ¿En qué instantes la velocidad es cero?

13. Una fuerza de 2 libras estira 1 pie un resorte. Con un extremo fijo, se une al otro extremo una masa que pesa 8 libras. El sistema yace sobre una mesa que imparte una fuerza de fricción numéricamente igual a $\frac{3}{2}$ veces la velocidad instantánea. Al inicio, la masa se desplaza 4 pulgadas arriba de la posición de equilibrio y se libera desde el reposo. Encuentre la ecuación de movimiento si el movimiento tiene lugar a lo largo de la recta horizontal que se toma como el eje x.

14. Una masa que pesa 32 libras alarga 6 pulgadas un resorte. La masa se mueve en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento que es numéricamente igual a β veces la velocidad instantánea. Determine los valores de $\beta > 0$ para los que el sistema resorte/masa exhibe movimiento oscilatorio.

15. Un resorte con constante $k = 2$ se suspende en un líquido que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 4 veces la velocidad instantánea. Si una masa m se suspende del resorte, determine los valores de m para que el movimiento libre posterior sea no oscilatorio.

16. El movimiento vertical de una masa sujeta a un resorte se describe mediante el PVI $\frac{1}{4}x'' + x' + x = 0$, $x(0) = 4$, $x'(0) = 2$. Determine el desplazamiento vertical máximo de la masa.

17. Una masa que pesa 4 libras estira 18 pulgadas un resorte. Se aplica al sistema una fuerza periódica igual a $f(t) = \cos \gamma t + \operatorname{sen} \gamma t$ comenzando en $t = 0$. En ausencia de una fuerza de amortiguamiento, ¿para qué valor de γ el sistema está en un estado de resonancia pura?

18. Encuentre una solución particular para $x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = A$, donde A es una fuerza constante.

19. Una masa que pesa 4 libras se suspende de un resorte cuya constante es 3 lb/pie. Todo el sistema se sumerge en un líquido que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a la velocidad instantánea. Comenzando en $t = 0$, se aplica al sistema una fuerza externa igual $f(t) = e^{-t}$. Determine la ecuación de movimiento si la masa se libera al inicio desde el reposo en un punto que está 2 pies abajo de la posición de equilibrio.

20. a) Dos resortes se unen en serie como se muestra en la figura 5.R.1. Si se desprecia la masa de cada resorte, muestre que la constante de resorte efectiva k del sistema se define mediante $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$.
   b) Una masa que pesa W libras produce un alargamiento de $\frac{1}{2}$ pie en un resorte y uno de $\frac{1}{4}$ pie en otro resorte. Se unen los dos resortes y después se fija la masa al resorte doble como se ilustra en la figura 5.R.1. Suponga que el movimiento es libre y que no hay fuerza de amortiguamiento presente. Determine la ecuación de movimiento si la masa se libera al inicio en un punto situado 1 pie abajo de la posición de equilibrio con una velocidad de descenso de $\frac{2}{3}$ pie/s.
   c) Demuestre que la velocidad máxima de la masa es $\frac{2}{3}\sqrt{3g + 1}$.

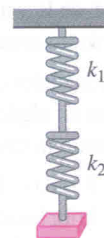


FIGURA 5.R.1 Resortes unidos del problema 20.

21. Un circuito en serie contiene una inductancia de $L = 1$ h, una capacitancia de $C = 10^{-4}$ f y una fuerza electromotriz de $E(t) = 100 \text{ sen } 50t$ V. Al inicio, la carga q y la corriente i son cero.

a) Determine la carga $q(t)$.

b) Determine la corriente $i(t)$.

c) Calcule los tiempos para los que la carga en el capacitor es cero.

22. a) Demuestre que la corriente $i(t)$ en un circuito en serie *LRC* satisface la ecuación $L\dfrac{d^2i}{dt^2} + R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}i = E'(t)$, donde $E'(t)$ denota la derivada de $E(t)$.

b) Se pueden especificar dos condiciones iniciales $i(0)$ e $i'(0)$ para la ED del inciso a). Si $i(0) = i_0$ y $q(0) = q_0$, ¿cuál es $i'(0)$?

23. Considere el problema con valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$$

Demuestre que excepto para el caso $\lambda = 0$, hay dos funciones propias independientes que corresponden a cada valor propio.

24. Una cuenta está restringida a deslizarse a lo largo de una varilla sin fricción de longitud L. La varilla gira en un plano vertical con velocidad angular constante ω respecto a un pivote P fijo en el punto medio de la varilla, pero el diseño del pivote permite que la cuenta se mueva a lo largo de toda la varilla. Sea $r(t)$ la posición de la cuenta respecto a este sistema de coordenadas giratorio según se ilustra en la figura 5.R.2. Con el fin de aplicar la segunda ley de Newton del movimiento a este marco de referencia rotatorio, es necesario usar el hecho de que la fuerza neta que actúa en la cuenta es la suma de las fuerzas reales (en este caso, la fuerza debida a la gravedad) y las fuerzas inerciales (coriolis, transversal y centrífuga). Las matemáticas del caso son un poco complicadas, así que sólo se da la ecuación diferencial resultante para r:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = m\omega^2 r - mg \text{ sen } \omega t.$$

a) Resuelva la ED anterior sujeta a las condiciones iniciales $r(0) = r_0$, $r'(0) = v_0$.

b) Determine las condiciones iniciales para las cuales la cuenta exhibe movimiento armónico simple. ¿Cuál es la longitud mínima L de la varilla para la cual puede ésta acomodar el movimiento armónico simple de la cuenta?

c) Para las condiciones iniciales distintas de las obtenidas en el inciso b), la cuenta en algún momento debe salir de la varilla. Explique usando la solución $r(t)$ del inciso a).

d) Suponga que $\omega = 1$ rad/s. Use una aplicación graficadora para trazar la solución $r(t)$ para las condiciones iniciales $r(0) = 0$, $r'(0) = v_0$, donde v_0 es 0, 10, 15, 16, 16.1 y 17.

e) Suponga que la longitud de la varilla es $L = 40$ pies. Para cada par de condiciones iniciales del inciso d), use una aplicación para encontrar raíces para calcular el tiempo total que la cuenta permanece en la varilla.

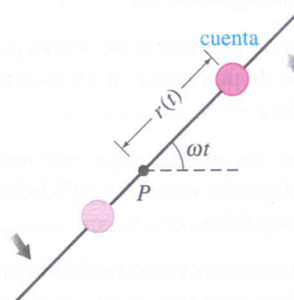


FIGURA 5.R.2 Varilla rotando del problema 24.

25. Suponga que una masa m que permanece sobre una superficie plana, seca y sin fricción está unida al extremo libre de un resorte cuya constante es k. En la figura 5.R.3a la masa se muestra en la posición de equilibrio $x = 0$, es decir, el resorte no está ni estirado ni comprimido. Como se ilustra en la figura 5.R.3b, el desplazamiento $x(t)$ de la masa a la derecha de la posición de equilibrio es positivo y negativo a la izquierda. Obtenga una ecuación diferencial para el movimiento (deslizante) horizontal libre de la masa. Describa la diferencia entre la obtención de esta ED y el análisis que da lugar a la ecuación (1) de la sección 5.1.

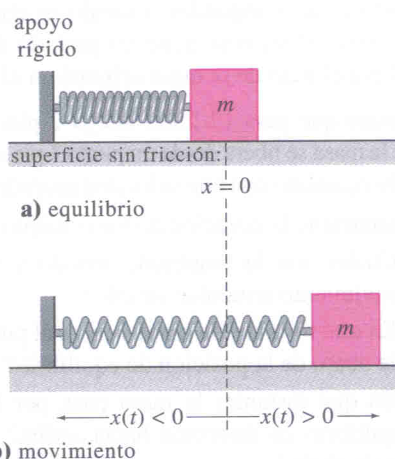
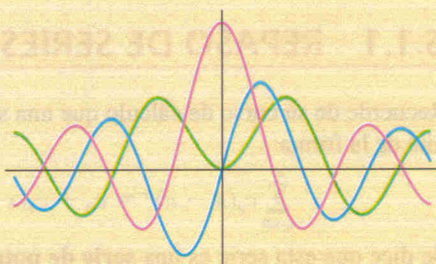


FIGURA 5.R.3 Sistema deslizante resorte/masa del problema 25.

26. ¿Cuál es la ecuación diferencial de movimiento en el problema 25 si la fricción cinética (pero ninguna otra fuerza de amortiguamiento) actúa en la masa deslizante? [*Sugerencia*: Suponga que la magnitud de la fuerza de fricción cinética es $f_k = \mu mg$, donde mg es el peso de la masa y la constante $\mu > 0$ es el coeficiente de fricción cinética. Luego considere dos casos, $x' > 0$ y $x' < 0$. Interprete estos casos desde un punto de vista físico.]

6 SOLUCIONES EN SERIES DE ECUACIONES LINEALES



Hasta ahora se han resuelto principalmente ecuaciones diferenciales de orden dos o superior cuando la ecuación tiene coeficientes constantes. La única excepción fue la ecuación de Cauchy-Euler que se estudió en la sección 4.7. En aplicaciones, las ecuaciones lineales de orden superior con coeficientes variables son tan importantes o quizá más que las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Como se indicó en la sección 4.7, aun una ecuación simple lineal de segundo orden con coeficientes variables tales como $y'' + xy = 0$ no tiene soluciones que sean funciones elementales. Pero podemos encontrar dos soluciones linealmente independientes de $y'' + xy = 0$; veremos en las secciones 6.1 y 6.3 que las soluciones de esta ecuación están definidas por series infinitas.

En este capítulo estudiaremos dos métodos de series infinitas para encontrar soluciones de ED lineales homogéneas de segundo orden $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ donde los coeficientes variables $a_2(x)$, $a_1(x)$ y $a_0(x)$ son, la mayoría de las veces, simples polinomios.

6.1 SOLUCIONES RESPECTO A PUNTOS ORDINARIOS

REPASO DE MATERIAL

- Series de potencias (véase cualquier libro de cálculo)

INTRODUCCIÓN En la sección 4.3 vimos que resolver una ED lineal homogénea con *coeficientes constantes* era en esencia un problema de álgebra. Encontrando las raíces de la ecuación auxiliar es posible escribir una solución general de la ED como una combinación lineal de funciones elementales x^k, $x^ke^{\alpha x}$, $x^ke^{\alpha x}\cos \beta x$ y $x^ke^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$, donde k es un entero no negativo. Pero como se indicó en la introducción de la sección 4.7, la *mayoría* de las ED lineales de orden superior con *coeficientes variables* no se resuelven en términos de funciones elementales. Una estrategia usual para ecuaciones de esta clase es suponer una solución en la forma de series infinitas y proceder de manera similar al método de coeficientes indeterminados (sección 4.4). En esta sección se consideran ED lineales de segundo orden con coeficientes variables que tienen soluciones de la forma de *series de potencias.*

Comenzamos con un repaso breve de algunos hechos importantes acerca de las series de potencias. Para un mejor tratamiento del tema consulte un libro de cálculo.

6.1.1 REPASO DE SERIES DE POTENCIAS

Recuerde de su curso de cálculo que una serie de potencias en $x - a$ es una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots.$$

Se dice que esta serie es una **serie de potencias centrada en a**. Por ejemplo, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$ está centrada en $a = -1$. En esta sección tratamos principalmente con las series de potencias en x, en otras palabras, series de potencias como $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^n = x + 2x^2 + 4x^3 + \cdots$ que están centradas en $a = 0$. La siguiente lista resume algunos hechos importantes acerca de las series de potencias.

- **Convergencia** Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ es convergente en un valor especificado de x si su sucesión de sumas parciales $\{S_N(x)\}$ converge, es decir, si el $\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} c_n(x-a)^n$ existe. Si el límite no existe en x, entonces se dice que la serie es divergente.
- **Intervalo de convergencia** Toda serie de potencias tiene un intervalo de convergencia. El intervalo de convergencia es el conjunto de todos los números reales x para los que converge la serie.
- **Radio de convergencia** Toda serie de potencias tiene un radio de convergencia R. Si $R > 0$, entonces la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge para $|x - a| < R$ y diverge para $|x - a| > R$. Si la serie converge sólo en su centro a, entonces $R = 0$. Si la serie converge para toda x, entonces se escribe $R = \infty$. Recuerde que la desigualdad de valor absoluto $|x - a| < R$ es equivalente a la desigualdad simultánea $a - R < x < a + R$. Una serie de potencias podría converger o no en los puntos extremos $a - R$ y $a + R$ de este intervalo.
- **Convergencia absoluta** Dentro de su intervalo de convergencia, una serie de potencias converge absolutamente. En otras palabras, si x es un número en el intervalo de convergencia y no es un extremo del intervalo, entonces la serie de valores absolutos $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n(x-a)^n|$ converge. Véase la figura 6.1.1.
- **Prueba de la razón** La convergencia de una serie de potencias suele determinarse mediante el criterio de la razón. Suponga que $c_n \neq 0$ para toda n y que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n}\right| = |x-a|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L.$$

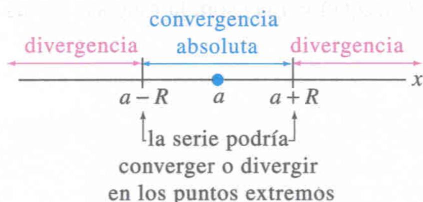


FIGURA 6.1.1 Convergencia absoluta dentro del intervalo de convergencia y divergencia fuera de este intervalo.

Si $L < 1$, la serie converge absolutamente; si $L > 1$, la serie diverge, y si $L = 1$, el criterio no es concluyente. Por ejemplo, para la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty}(x-3)^n/2^n n$ el criterio de la razón da

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}}{\dfrac{(x-3)^n}{2^n n}}\right| = |x-3|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}|x-3|;$$

la serie converge absolutamente para $\frac{1}{2}|x-3| < 1$ o $|x-3| < 2$ o $1 < x < 5$. Esta última desigualdad define el intervalo *abierto* de convergencia. La serie diverge para $|x-3| > 2$, es decir, para $x > 5$ o $x < 1$. En el extremo izquierdo $x = 1$ del intervalo abierto de convergencia, la serie de constantes $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n/n)$ es convergente por la prueba de series alternantes. En el extremo derecho $x = 5$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ es la serie armónica divergente. El intervalo de convergencia de la serie es $[1, 5)$ y el radio de convergencia es $R = 2$.

- **Una serie de potencias define una función** Una serie de potencias define una función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie. Si el radio de convergencia es $R > 0$, entonces f es continua, derivable e integrable en el intervalo $(a - R, a + R)$. Además, $f'(x)$ y $\int f(x)dx$ se encuentran derivando e integrando término a término. La convergencia en un extremo se podría perder por derivación o ganar por integración. Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es una serie de potencias en x, entonces las primeras dos derivadas son $y' = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$ y $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$. Observe que el primer término en la primera derivada y los dos primeros términos de la segunda derivada son cero. Se omiten estos términos cero y se escribe

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} \quad \text{y} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2}. \tag{1}$$

Estos resultados son importantes y se usan en breve.

- **Propiedad de identidad** Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = 0$, $R > 0$, para los números x en el intervalo de convergencia, entonces $c_n = 0$ para toda n.
- **Analítica en un punto** Una función f es analítica en un punto a si se puede representar mediante una serie de potencias en $x - a$ con un radio positivo o infinito de convergencia. En cálculo se ve que las funciones como e^x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\ln(1-x)$, etcétera, se pueden representar mediante series de Taylor. Recuerde, por ejemplo que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{2}$$

para $|x| < \infty$. Estas series de Taylor centradas en 0, llamadas series de Maclaurin, muestran que e^x, sen x y cos x son analíticas en $x = 0$.

- **Aritmética de series de potencias** Las series de potencias se combinan mediante operaciones de suma, multiplicación y división. Los procedimientos para las series de potencias son similares a los que se usan para sumar, multiplicar y dividir dos polinomios, es decir, se suman los coeficientes de potencias iguales de x, se usa la ley distributiva y se reúnen términos semejantes y se realiza la división larga. Por ejemplo, usando las series de (2), tenemos que

$$\begin{aligned} e^x \operatorname{sen} x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots\right) \\ &= (1)x + (1)x^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)x^4 + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right)x^5 + \cdots \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \cdots. \end{aligned}$$

Puesto que las series de potencias para e^x y sen x convergen para $|x| < \infty$, la serie de productos converge en el mismo intervalo. Los problemas relacionados con multiplicación o división de series de potencias se resuelven mejor usando un SAC.

CORRIMIENTO DEL ÍNDICE DE LA SUMA Para el resto de esta sección, así como este capítulo, es importante que se acostumbre a simplificar la suma de dos o más series de potencias, cada una expresada en notación de suma (sigma), en una expresión con una sola Σ. Como se muestra en el ejemplo siguiente, la combinación de dos o más sumas en una sola suele requerir que se vuelva a indizar la serie, es decir, que se realice un cambio en el índice de la suma.

EJEMPLO 1 Suma de dos series de potencias

Escriba $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$ como una sola serie de potencias cuyo término general implica a x^k.

SOLUCIÓN Para sumar las dos series es necesario que ambos índices de las sumas comiencen con el mismo número y las potencias de x en cada caso estén "en fase"; es decir, si una serie comienza con un múltiplo de, por ejemplo, x a la primera potencia, entonces se quiere que la otra serie comience con la misma potencia. Observe que en el problema la primera serie empieza con x^0, mientras que la segunda comienza con x^1. Si se escribe el primer término de la primera serie fuera de la notación de suma,

serie comienza con x para $n = 3$ — serie comienza con x para $n = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 2\cdot 1 c_2 x^0 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1},$$

vemos que ambas series del lado derecho empiezan con la misma potencia de x, en particular x^1. Ahora, para obtener el mismo índice de la suma, se toman como guía los exponentes de x; se establece $k = n - 2$ en la primera serie y al mismo tiempo $k = n + 1$ en la segunda serie. El lado derecho se convierte en

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k. \qquad (3)$$

(igual — igual)

Recuerde que el índice de la suma es una variable "muda"; el hecho de que $k = n - 1$ en un caso y $k = n + 1$ en el otro no debe causar confusión si se considera que lo importante es el *valor* del índice de suma. En ambos casos k toma los mismos valores sucesivos $k = 1, 2, 3, \ldots$ cuando n toma los valores $n = 2, 3, 4, \ldots$ para $k = n - 1$ y $n = 0, 1, 2, \ldots$ para $k = n + 1$. Ahora es posible sumar las series de (3) término a término:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} + c_{k-1}]x^k. \qquad (4) \blacksquare$$

Si no está convencido del resultado en (4), entonces escriba algunos términos de ambos lados de la igualdad.

6.1.2 SOLUCIONES EN SERIES DE POTENCIAS

UNA DEFINICIÓN Suponga que la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{5}$$

se escribe en forma estándar

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{6}$$

dividiendo entre el coeficiente principal $a_2(x)$. Se tiene la definición siguiente.

DEFINICIÓN 6.1.1 Puntos ordinarios y singulares

Se dice que un punto x_0 es un **punto ordinario** de la ecuación diferencial (5) si tanto $P(x)$ como $Q(x)$ en la forma estándar (6) son analíticas en x_0. Se dice que un punto que no es punto ordinario es un **punto singular** de la ecuación.

Cada valor finito de x es un punto ordinario de la ecuación diferencial $y'' + (e^x)y' + (\text{sen } x)y = 0$. En particular, $x = 0$ es un punto ordinario porque, como ya se vio en (2), tanto e^x como sen x son analíticas en este punto. La negación en el segundo enunciado de la definición 6.1.1 establece que si por lo menos una de las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ en (6) no es analítica en x_0, entonces x_0 es un punto singular. Observe que $x = 0$ es un punto singular de la ecuación diferencial $y'' + (e^x)y' + (\ln x)y = 0$ porque $Q(x) = \ln x$ es discontinua en $x = 0$ y, por tanto, no se puede representar con una serie de potencias en x.

COEFICIENTES POLINOMIALES Se pone atención sobre todo al caso cuando (5) tiene coeficientes polinomiales. Un polinomio es analítico en cualquier valor x y una función racional es analítica *excepto* en los puntos donde su denominador es cero. Por tanto si $a_2(x)$, $a_1(x)$ y $a_0(x)$ son *polinomios* sin factores comunes, entonces ambas funciones racionales $P(x) = a_1(x)/a_2(x)$ y $Q(x) = a_0(x)/a_2(x)$ son analíticas excepto donde $a_2(x) = 0$. Entonces, se tiene que

$x = x_0$ es un punto ordinario de (5) si $a_2(x_0) \neq 0$ mientras que $x = x_0$ es un punto singular de (5) si $a_2(x_0) = 0$.

Por ejemplo, los únicos puntos singulares de la ecuación $(x^2 - 1)y'' + 2xy' + 6y = 0$ son soluciones de $x^2 - 1 = 0$ o $x = \pm 1$. Todos los otros valores finitos* de x son puntos ordinarios. La inspección de la ecuación de Cauchy-Euler $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ muestra que tiene un punto singular en $x = 0$. Los puntos singulares no necesitan ser números reales. La ecuación $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$ tiene puntos singulares en las soluciones $x^2 + 1 = 0$, en particular, $x = \pm i$. Los otros valores de x, reales o complejos, son puntos ordinarios.

Establecemos el siguiente teorema acerca de la existencia de soluciones en series de potencias sin demostración.

TEOREMA 6.1.1 Existencia de soluciones en series de potencias

Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial (5), siempre es posible encontrar dos soluciones linealmente independientes en la forma de una serie de potencias centrada en x_0, es decir, $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$. Una solución en serie converge por lo menos en un intervalo definido por $|x - x_0| < R$, donde R es la distancia desde x_0 al punto singular más cercano.

*Para nuestros propósitos, los puntos ordinarios y puntos singulares siempre serán puntos finitos. Es posible que una EDO tenga un punto singular en el infinito.

Se dice que una solución de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ es una **solución respecto a un punto ordinario x_0**. La distancia R en el teorema 6.1.1 es el *valor mínimo* o *límite inferior* del radio de convergencia de las soluciones en serie de la ecuación diferencial respecto a x_0.

En el ejemplo siguiente, se usa el hecho de que en el plano complejo, la distancia entre dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ es exactamente la distancia entre los puntos (a, b) y (c, d).

EJEMPLO 2 Límite inferior para el radio de convergencia

Los números complejos $1 \pm 2i$ son puntos singulares de la ecuación diferencial $(x^2 - 2x + 5)y'' + xy' - y = 0$. Ya que $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación, el teorema 6.1.1 garantiza que es posible encontrar dos soluciones en serie de potencias centradas en 0, es decir, soluciones que se parecen a $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Sin realmente encontrar estas soluciones, se sabe que *cada* serie debe converger *al menos* para $|x| < \sqrt{5}$ porque $R = \sqrt{5}$ es la distancia en el plano complejo desde 0 (el punto (0, 0)) a cualquiera de los números $1 + 2i$ (el punto (1, 2)) o $1 - 2i$ (el punto (1, −2)). Sin embargo, una de estas dos soluciones es válida en un intervalo mucho mayor que $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$; de hecho, esta solución es válida en $(-\infty, \infty)$ porque se puede demostrar que una de las dos soluciones en serie de potencias respecto a 0 se reduce a un polinomio. Por tanto también se dice que $\sqrt{5}$ es el límite inferior para el radio de convergencia de soluciones en serie de la ecuación diferencial respecto a 0.

Si se buscan soluciones de la ED dada respecto a un punto ordinario diferente, por ejemplo, $x = -1$, entonces cada serie $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x + 1)^n$ converge al menos para $|x| < 2\sqrt{2}$ porque la distancia de -1 a $1 + 2i$ o a $1 - 2i$ es $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. ■

NOTA En los ejemplos que siguen, así como en los ejercicios 6.1, por razones de simplicidad, encontraremos soluciones en serie de potencias sólo respecto al punto ordinario $x = 0$. Si es necesario encontrar una solución en serie de potencias de una ED lineal respecto a un punto ordinario $x_0 \neq 0$, simplemente se hace el cambio de variable $t = x - x_0$ en la ecuación (esto traduce $x = x_0$ en $t = 0$), para encontrar las soluciones de la nueva ecuación de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ y después volver a sustituir $t = x - x_0$.

DETERMINACIÓN DE UNA SOLUCIÓN EN SERIES DE POTENCIAS La determinación real de una solución en serie de potencias de una ED lineal homogénea de segundo orden es bastante similar a lo que se hizo en la sección 4.4 para encontrar soluciones particulares de ED no homogéneas con el método de coeficientes indeterminados. De hecho, el método de serie de potencias para resolver una ED lineal con coeficientes variables con frecuencia se describe como "método de coeficientes indeterminados de *series*". En resumen, la idea es la siguiente: sustituimos $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ en la ecuación diferencial, se combina la serie como se hizo en el ejemplo 1 y luego se igualan los coeficientes del miembro derecho de la ecuación para determinar los coeficientes c_n. Pero como el miembro derecho es cero, el último paso requiere, por la propiedad de identidad en la lista de propiedades anterior, que todos los coeficientes de x se deban igualar a cero. Esto *no* significa que los coeficientes *son* cero; esto no tendría sentido después de todo; el teorema 6.1.1 garantiza que se pueden encontrar dos soluciones. En el ejemplo 3 se ilustra cómo la sola suposición de $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ conduce a dos conjuntos de coeficientes, por lo que se tienen dos series de potencias distintas $y_1(x)$ y $y_2(x)$, ambas desarrolladas respecto al punto ordinario $x = 0$. La solución general de la ecuación diferencial es $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$; de hecho, se puede demostrar que $C_1 = c_0$ y $C_2 = c_1$.

EJEMPLO 3 Soluciones en series de potencias

Resuelva $y'' + xy = 0$.

SOLUCIÓN Puesto que no hay puntos singulares finitos el teorema 6.1.1 garantiza dos soluciones en serie de potencias centradas en 0, convergentes para $|x| < \infty$.

Sustituyendo $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y la segunda derivada $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$ (véase (1)) en la ecuación diferencial, se obtiene

$$y'' + xy = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}. \tag{7}$$

En el ejemplo 1 ya se sumaron las dos últimas series en el miembro derecho de la igualdad en (7) corriendo el índice de la suma. Del resultado dado en (4),

$$y'' + xy = 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)(k+2)c_{k+2} + c_{k-1}]x^k = 0. \tag{8}$$

En este punto se invoca la propiedad de identidad. Puesto que (8) es idénticamente cero, es necesario que el coeficiente de cada potencia de x se iguale a cero, es decir, $2c_2 = 0$ (es el coeficiente de x^0) y

$$(k+1)(k+2)c_{k+2} + c_{k-1} = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Ahora $2c_2 = 0$ obviamente dice que $c_2 = 0$. Pero la expresión en (9), llamada **relación de recurrencia**, determina la c_k de tal manera que se puede elegir que cierto subconjunto del conjunto de coeficientes sea *diferente de cero*. Puesto que $(k+1)(k+2) \neq 0$ para los valores de k, se puede resolver (9) para c_{k+2} en términos de c_{k-1}:

$$c_{k+2} = -\frac{c_{k-1}}{(k+1)(k+2)}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{10}$$

Esta relación genera coeficientes consecutivos de la solución supuesta, una vez que k toma los enteros sucesivos indicados en (10):

$$k = 1, \qquad c_3 = -\frac{c_0}{2 \cdot 3}$$

$$k = 2, \qquad c_4 = -\frac{c_1}{3 \cdot 4}$$

$$k = 3, \qquad c_5 = -\frac{c_2}{4 \cdot 5} = 0 \qquad \leftarrow c_2 \text{ es cero}$$

$$k = 4, \qquad c_6 = -\frac{c_3}{5 \cdot 6} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}c_0$$

$$k = 5, \qquad c_7 = -\frac{c_4}{6 \cdot 7} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}c_1$$

$$k = 6, \qquad c_8 = -\frac{c_5}{7 \cdot 8} = 0 \qquad \leftarrow c_5 \text{ es cero}$$

$$k = 7, \qquad c_9 = -\frac{c_6}{8 \cdot 9} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}c_0$$

$$k = 8, \qquad c_{10} = -\frac{c_7}{9 \cdot 10} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}c_1$$

$$k = 9, \qquad c_{11} = -\frac{c_8}{10 \cdot 11} = 0 \qquad \leftarrow c_8 \text{ es cero}$$

etcétera. Ahora sustituyendo los coeficientes obtenidos en la suposición original

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + c_8x^8 + c_9x^9 + c_{10}x^{10} + c_{11}x^{11} + \cdots,$$

obtenemos

$$y = c_0 + c_1x + 0 - \frac{c_0}{2\cdot 3}x^3 - \frac{c_1}{3\cdot 4}x^4 + 0 + \frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}x^6$$

$$+ \frac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + 0 - \frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}x^9 - \frac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}x^{10} + 0 + \cdots.$$

Después de agrupar los términos que contienen c_0 y los que contienen c_1, se obtiene $y = c_0y_1(x) + c_1y_2(x)$, donde

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}x^6 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}x^9 + \cdots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2\cdot 3\cdots(3k-1)(3k)}x^{3k}$$

$$y_2(x) = x - \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}x^{10} + \cdots = x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3\cdot 4\cdots(3k)(3k+1)}x^{3k+1}.$$

Debido a que el uso recursivo de (10) deja a c_0 y a c_1 completamente indeterminadas, se pueden elegir en forma arbitraria. Como ya se mencionó antes de este ejemplo, la combinación lineal $y = c_0y_1(x) + c_1y_2(x)$ representa en realidad la solución general de la ecuación diferencial. Aunque se sabe del teorema 6.1.1 que cada solución en serie converge para $|x| < \infty$, este hecho también se puede comprobar con el criterio de la razón. ■

La ecuación diferencial del ejemplo 3 se llama **ecuación de Airy** y se encuentra en el estudio de la difracción de la luz, la difracción de ondas de radio alrededor de la superficie de la Tierra, la aerodinámica y la deflexión de una columna vertical delgada uniforme que se curva bajo su propio peso. Otras formas comunes de la ecuación de Airy son $y'' - xy = 0$ y $y'' + \alpha^2xy = 0$. Véase el problema 41 de los ejercicios 6.3 para una aplicación de la última ecuación.

EJEMPLO 4 Solución con series de potencias

Resuelva $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$.

SOLUCIÓN Como se vio en la página 223, la ecuación diferencial dada tiene puntos singulares en $x = \pm i$ y, por tanto, una solución en serie de potencias centrada en 0 que converge al menos para $|x| < 1$, donde 1 es la distancia en el plano complejo desde 0 a i o $-i$. La suposición $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ y sus primeras dos derivadas (véase (1)) conducen a

$$(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$$

$$= 2c_2x^0 - c_0x^0 + 6c_3x + c_1x - c_1x + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^n}_{k=n}$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2}}_{k=n-2} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} nc_nx^n}_{k=n} - \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_nx^n}_{k=n}$$

$$= 2c_2 - c_0 + 6c_3x + \sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} + kc_k - c_k]x^k$$

$$= 2c_2 - c_0 + 6c_3x + \sum_{k=2}^{\infty}[(k+1)(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2}]x^k = 0.$$

De esta identidad se concluye que $2c_2 - c_0 = 0$, $6c_3 = 0$, y

$$(k+1)(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} = 0.$$

Por tanto,

$$c_2 = \frac{1}{2}c_0$$
$$c_3 = 0$$
$$c_{k+2} = \frac{1-k}{k+2}c_k, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots$$

Sustituyendo $k = 2, 3, 4, \ldots$ en la última fórmula se obtiene

$$c_4 = -\frac{1}{4}c_2 = -\frac{1}{2\cdot 4}c_0 = -\frac{1}{2^2 2!}c_0$$
$$c_5 = -\frac{2}{5}c_3 = 0 \qquad \leftarrow c_3 \text{ es cero}$$
$$c_6 = -\frac{3}{6}c_4 = \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}c_0 = \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}c_0$$
$$c_7 = -\frac{4}{7}c_5 = 0 \qquad \leftarrow c_5 \text{ es cero}$$
$$c_8 = -\frac{5}{8}c_6 = -\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}c_0 = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}c_0$$
$$c_9 = -\frac{6}{9}c_7 = 0, \qquad \leftarrow c_7 \text{ es cero}$$
$$c_{10} = -\frac{7}{10}c_8 = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}c_0 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5 5!}c_0,$$

etcétera. Por tanto,

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + c_8x^8 + c_9x^9 + c_{10}x^{10} + \cdots$$
$$= c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2^2 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}x^6 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}x^8 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5 5!}x^{10} - \cdots\right] + c_1x$$
$$= c_0y_1(x) + c_1y_2(x).$$

Las soluciones son el polinomio $y_2(x) = x$ y la serie de potencias

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^{2n}, \qquad |x| < 1. \quad ■$$

EJEMPLO 5 Relación de recurrencia de tres términos

Si se busca una solución en serie de potencias $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ para la ecuación diferencial

$$y'' - (1 + x)y = 0,$$

se obtiene $c_2 = \frac{1}{2}c_0$ y la relación de recurrencia de tres términos

$$c_{k+2} = \frac{c_k + c_{k-1}}{(k+1)(k+2)}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Se deduce a partir de estos dos resultados que los coeficientes c_n, para $n \geq 3$, se expresan en términos de c_0 y c_1. Para simplificar, se puede elegir primero $c_0 \neq 0$, $c_1 = 0$;

esto conduce a coeficientes para una solución expresada por completo en términos de c_0. A continuación, si elegimos $c_0 = 0$, $c_1 \neq 0$, entonces los coeficientes para la otra solución se expresan en términos de c_1. Usando $c_2 = \frac{1}{2}c_0$ en ambos casos, la relación de recurrencia para $k = 1, 2, 3, \ldots$ se obtiene

$c_0 \neq 0, c_1 = 0$	$c_0 = 0, c_1 \neq 0$
$c_2 = \dfrac{1}{2}c_0$	$c_2 = \dfrac{1}{2}c_0 = 0$
$c_3 = \dfrac{c_1 + c_0}{2 \cdot 3} = \dfrac{c_0}{2 \cdot 3} = \dfrac{c_0}{6}$	$c_3 = \dfrac{c_1 + c_0}{2 \cdot 3} = \dfrac{c_1}{2 \cdot 3} = \dfrac{c_1}{6}$
$c_4 = \dfrac{c_2 + c_1}{3 \cdot 4} = \dfrac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \dfrac{c_0}{24}$	$c_4 = \dfrac{c_2 + c_1}{3 \cdot 4} = \dfrac{c_1}{3 \cdot 4} = \dfrac{c_1}{12}$
$c_5 = \dfrac{c_3 + c_2}{4 \cdot 5} = \dfrac{c_0}{4 \cdot 5}\left[\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2}\right] = \dfrac{c_0}{30}$	$c_5 = \dfrac{c_3 + c_2}{4 \cdot 5} = \dfrac{c_1}{4 \cdot 5 \cdot 6} = \dfrac{c_1}{120}$

etcétera. Por último, vemos que la solución general de la ecuación es $y = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$, donde

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \cdots$$

y

$$y_2(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots.$$

Cada serie converge para todos los valores finitos de x. ■

COEFICIENTES NO POLINOMIALES En el siguiente ejemplo se muestra cómo encontrar una solución en serie de potencias respecto a un punto ordinario $x_0 = 0$ de una ecuación diferencial cuando sus coeficientes no son polinomios. En este ejemplo vemos una aplicación de la multiplicación de dos series de potencias.

EJEMPLO 6 ED con coeficientes no polinomiales

Resuelva $y'' + (\cos x)y = 0$.

SOLUCIÓN Vemos que $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación porque, como ya hemos visto, $\cos x$ es analítica en ese punto. Usando la serie de Maclaurin para $\cos x$ dada en (2), junto con la suposición usual $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y los resultados de (1), se encuentra

$$\begin{aligned} y'' + (\cos x)y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \cdots + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots) \\ &= 2c_2 + c_0 + (6c_3 + c_1)x + \left(12c_4 + c_2 - \frac{1}{2}c_0\right)x^2 + \left(20c_5 + c_3 - \frac{1}{2}c_1\right)x^3 + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Se tiene que

$$2c_2 + c_0 = 0, \qquad 6c_3 + c_1 = 0, \qquad 12c_4 + c_2 - \frac{1}{2}c_0 = 0, \qquad 20c_5 + c_3 - \frac{1}{2}c_1 = 0,$$

etcétera. Esto da $c_2 = -\frac{1}{2}c_0, c_3 = -\frac{1}{6}c_1, c_4 = \frac{1}{12}c_0, c_5 = \frac{1}{30}c_1, \ldots$. Agrupando términos se llega a la solución general $y = c_0y_1(x) + c_1y_2(x)$, donde

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \cdots \quad \text{y} \quad y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}x^5 - \cdots.$$

Debido a que la ecuación diferencial no tiene puntos singulares finitos, ambas series de potencias convergen para $|x| < \infty$. ■

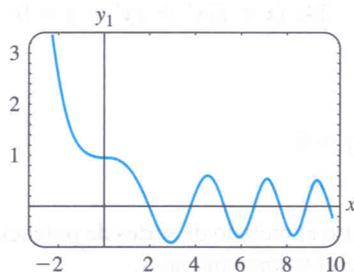
CURVAS SOLUCIÓN La gráfica aproximada de una solución en serie de potencias $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ se puede obtener de varias maneras. Siempre se puede recurrir a trazar la gráfica de los términos en la sucesión de sumas parciales de la serie; en otras palabras, las gráficas de los polinomios $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_nx^n$. Para valores grandes de N, $S_N(x)$ debe darnos una indicación del comportamiento de $y(x)$ cerca del punto ordinario $x = 0$. También se puede obtener una curva solución aproximada o numérica usando un programa, como se hizo en la sección 4.9. Por ejemplo, si se examinan cuidadosamente las soluciones en serie de la ecuación de Airy del ejemplo 3, se debe ver que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son, a su vez, las soluciones de los problemas de valores iniciales

$$\begin{aligned} y'' + xy &= 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \\ y'' + xy &= 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{aligned} \tag{11}$$

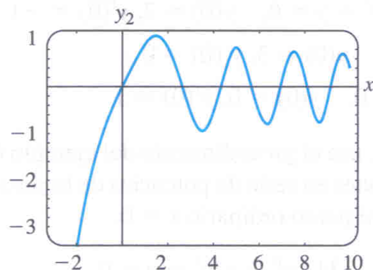
Las condiciones iniciales especificadas "seleccionan" las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de $y = c_0y_1(x) + c_1y_2(x)$, puesto que debe ser evidente de la suposición básica de series $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ que $y(0) = c_0$ y $y'(0) = c_1$. Ahora, si el programa de solución numérica requiere un sistema de ecuaciones, la sustitución $y' = u$ en $y'' + xy = 0$ produce $y'' = u' = -xy$ y, por consiguiente, un sistema de dos ecuaciones de primer orden equivalente a la ecuación de Airy es

$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= -xy. \end{aligned} \tag{12}$$

Las condiciones iniciales para el sistema en (12) son los dos conjuntos de condiciones iniciales en (11) reescritas como $y(0) = 1$, $u(0) = 0$ y $y(0) = 0$, $u(0) = 1$. Las gráficas de $y_1(x)$ y $y_2(x)$ que se muestran en la figura 6.1.2 se obtuvieron con la ayuda de un programa de solución numérica. El hecho de que las curvas solución numéricas parezcan oscilatorias es consistente con el hecho de que la ecuación de Airy se presentó en la sección 5.1 (página 186) en la forma $mx'' + ktx = 0$ como el modelo de un resorte cuya "constante de resorte" $K(t) = kt$ se incrementa con el tiempo.



a) Gráfica de $y_1(x)$ contra x



b) Gráfica de $y_2(x)$ contra x

FIGURA 6.1.2 Curvas de solución numérica para la ED de Airy.

COMENTARIOS

i) En los problemas que siguen no espere poder escribir una solución en términos de la notación de suma en cada caso. Aun cuando se puedan generar tantos términos como se desee en una solución en serie $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ ya sea usando una relación de recurrencia o como en el ejemplo 6, por multiplicación, podría no ser posible deducir ningún término general para los coeficientes c_n. Podríamos tener que conformarnos, como se hizo en los ejemplos 5 y 6, con los primeros términos de la serie.

ii) Un punto x_0 es un punto ordinario de una ED lineal *no homogénea* de segundo orden $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ si $P(x)$, $Q(x)$ y $f(x)$ son analíticas en x_0. Además, el teorema 6.1.1 se amplía a esta clase de ED; en otras palabras, podemos encontrar soluciones en serie de potencias $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ de ED lineales no homogéneas de la misma manera que en los ejemplos 3 a 6. Véase el problema 36 de los ejercicios 6.1.

EJERCICIOS 6.1 *Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-8.*

6.1.1 REPASO DE SERIES DE POTENCIAS

En los problemas 1 a 4, determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia para las series de potencias.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$ **2.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100)^n}{n!}(x+7)^n$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{10^k}(x-5)^k$ **4.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k!(x-1)^k$

En los problemas 5 y 6 la función dada es analítica en $x = 0$. Encuentre los primeros cuatro términos de una serie de potencias en x. Efectúe la multiplicación a mano o use un SAC, como se indica.

5. $\operatorname{sen} x \cos x$ **6.** $e^{-x} \cos x$

En los problemas 7 y 8, la función dada es analítica en $x = 0$. Encuentre los primeros cuatro términos de una serie de potencias en x. Efectúe a mano la división larga o use un SAC, como se indica. Dé un intervalo abierto de convergencia.

7. $\dfrac{1}{\cos x}$ **8.** $\dfrac{1-x}{2+x}$

En los problemas 9 y 10, reescriba la serie de potencias de modo que en su término general tenga x^k.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n+2}$ **10.** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (2n-1)c_n x^{n-3}$

En los problemas 11 y 12, reescriba la expresión dada como una sola serie de potencias en cuyo término general tenga x^k.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6c_n x^{n+1}$

12. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 3\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n$

En los problemas 13 y 14, compruebe por sustitución directa que la serie de potencias dada es una solución particular de la ecuación diferencial dada.

13. $\displaystyle y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad (x+1)y'' + y' = 0$

14. $\displaystyle y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}, \quad xy'' + y' + xy = 0$

6.1.2 SOLUCIONES EN SERIES DE POTENCIAS

En los problemas 15 y 16, sin realmente resolver la ecuación diferencial dada, encuentre un límite inferior para el radio de convergencia de las soluciones en serie de potencias respecto al punto ordinario $x = 0$. Respecto al punto ordinario $x = 1$.

15. $(x^2 - 25)y'' + 2xy' + y = 0$

16. $(x^2 - 2x + 10)y'' + xy' - 4y = 0$

En los problemas 17 a 28, encuentre dos series de potencias de la ecuación diferencial dada respecto al punto ordinario $x = 0$.

17. $y'' - xy = 0$ **18.** $y'' + x^2y = 0$

19. $y'' - 2xy' + y = 0$ **20.** $y'' - xy' + 2y = 0$

21. $y'' + x^2y' + xy = 0$ **22.** $y'' + 2xy' + 2y = 0$

23. $(x - 1)y'' + y' = 0$ **24.** $(x + 2)y'' + xy' - y = 0$

25. $y'' - (x + 1)y' - y = 0$

26. $(x^2 + 1)y'' - 6y = 0$

27. $(x^2 + 2)y'' + 3xy' - y = 0$

28. $(x^2 - 1)y'' + xy' - y = 0$

En los problemas 29 a 32, use el método de series de potencias para resolver el problema con valores iniciales.

29. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad y(0) = -2, y'(0) = 6$

30. $(x + 1)y'' - (2 - x)y' + y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1$

31. $y'' - 2xy' + 8y = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = 0$

32. $(x^2 + 1)y'' + 2xy' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

En los problemas 33 y 34, use el procedimiento del ejemplo 6 para encontrar dos soluciones en serie de potencias de la ecuación diferencial respecto al punto ordinario $x = 0$.

33. $y'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$ **34.** $y'' + e^x y' - y = 0$

Problemas para analizar

35. Sin resolver en su totalidad la ecuación diferencial $(\cos x)y'' + y' + 5y = 0$, encuentre un límite inferior para el radio de convergencia de las soluciones en serie de potencias respecto a $x = 0$. Respecto a $x = 1$.

36. ¿Cómo se puede usar el método descrito en esta sección para encontrar una solución en serie de potencias de la ecuación *no homogénea* $y'' - xy = 1$ respecto al punto ordinario $x = 0$? ¿De $y'' - 4xy' - 4y = e^x$? Lleve a cabo sus ideas al resolver ambas ED.

37. ¿Es $x = 0$ un punto ordinario o singular de la ecuación diferencial $xy'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$? Defienda su respuesta con matemáticas convincentes.

38. Para propósitos de este problema ignore las gráficas presentadas en la figura 6.1.2. Si la ED de Airy se escribe como $y'' = -xy$, ¿qué se puede decir respecto a la forma de una curva solución si $x > 0$ y $y > 0$? ¿Si $x > 0$ y $y < 0$?

Tarea para el laboratorio de computación

39. a) Determine dos soluciones en serie de potencias para $y'' + xy' + y = 0$ y exprese las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ en términos de la notación de suma.

b) Use un SAC para graficar las sumas parciales $S_N(x)$ para $y_1(x)$. Use $N = 2, 3, 5, 6, 8, 10$. Repita con las sumas parciales $S_N(x)$ para $y_2(x)$.

c) Compare las gráficas obtenidas en el inciso b) con la curva obtenida por medio de un programa de solución numérica. Use las condiciones iniciales $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ y $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$.

d) Reexamine la solución $y_1(x)$ del inciso a). Exprese esta serie como una función elemental. Después use la ecuación (5) de la sección 4.2 para encontrar una segunda solución de la ecuación. Compruebe que esta segunda solución es la misma que la solución en serie de potencias $y_2(x)$.

40. a) Encuentre un término diferente de cero para cada una de las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ del ejemplo 6.

b) Determine una solución en serie $y(x)$ del problema de valor inicial $y'' + (\cos x)y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$.

c) Use un SAC para trazar las gráficas de las sumas parciales $S_N(x)$ para la solución $y(x)$ del inciso b). Use $N = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

d) Compare las gráficas obtenidas en el inciso c) con la curva obtenida usando un programa de solución numérica para el problema con valores iniciales del inciso b).

6.2 SOLUCIONES EN TORNO A PUNTOS SINGULARES

REPASO DE MATERIAL

- Sección 4.2 (especialmente (5) de esa sección)

INTRODUCCIÓN Las dos ecuaciones diferenciales

$$y'' + xy = 0 \quad \text{y} \quad xy'' + y = 0$$

son similares sólo en que son ejemplos de ED lineales simples de segundo orden con coeficientes variables. Eso es todo lo que tienen en común. Debido a que $x = 0$ es un *punto ordinario* de $y'' + xy = 0$, vimos en la sección anterior que no hubo problema en encontrar dos soluciones en serie de potencias distintas centradas en ese punto. En contraste, debido a que $x = 0$ es un *punto singular* de $xy'' + y = 0$, encontrar dos soluciones en series infinitas —observe que no se dijo *series de potencias*—, de la ecuación diferencial respecto a ese punto se vuelve una tarea más difícil.

El método de solución analizado en esta sección, no siempre produce dos soluciones en series infinitas. Cuando sólo se encuentra una solución, se puede usar la fórmula dada en (5) de la sección 4.2 para encontrar una segunda solución.

UNA DEFINICIÓN Un punto singular x_0 de una ecuación diferencial lineal

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{1}$$

se clasifica más bien como regular o irregular. La clasificación de nuevo depende de las funciones P y Q en la forma estándar

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{2}$$

DEFINICIÓN 6.2.1 Puntos singulares regulares e irregulares

Se dice que un punto singular x_0 es un **punto singular regular** de la ecuación diferencial (l) si las funciones $p(x) = (x - x_0)P(x)$ y $q(x) = (x - x_0)^2Q(x)$ son analíticas en x_0. Un punto singular que no es regular es un **punto singular irregular** de la ecuación.

El segundo enunciado en la definición 6.2.1 indica que si una o ambas funciones $p(x) = (x - x_0)P(x)$ y $q(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$ no son analíticas en x_0, entonces x_0 es un punto singular irregular.

COEFICIENTES POLINOMIALES Como en la sección 6.1, estamos principalmente interesados en ecuaciones lineales (1) donde los coeficientes $a_2(x)$, $a_1(x)$ y $a_0(x)$ son polinomios sin factores comunes. Ya se ha visto que si $a_2(x_0) = 0$, entonces $x = x_0$ es un punto singular de (1), ya que al menos una de las funciones racionales $P(x) = a_1(x)/a_2(x)$ y $Q(x) = a_0(x)/a_2(x)$ en la forma estándar (2) no es analítica en ese punto. Pero como $a_2(x)$ es un polinomio y x_0 es una de sus raíces, se deduce del teorema del factor del álgebra que $x - x_0$ es un factor de $a_2(x)$. Esto significa que después de que $a_1(x)/a_2(x)$ y $a_0(x)/a_2(x)$ se reducen a términos mínimos, el factor $x - x_0$ debe permanecer, para alguna potencia entera positiva, en uno o en ambos denominadores. Ahora suponga que $x = x_0$ es un punto singular de (1) pero ambas funciones definidas por los productos $p(x) = (x - x_0)P(x)$ y $q(x) = (x - x_0)^2Q(x)$ son analíticas en x_0. Llegamos a la conclusión de que multiplicar $P(x)$ por $x - x_0$ y $Q(x)$ por $(x - x_0)^2$ tiene el efecto (por eliminación) de que $x - x_0$ ya no aparezca en ninguno de los denominadores. Ahora se puede determinar si x_0 es regular con una comprobación visual rápida de los denominadores:

> Si $x - x_0$ aparece *a lo más* a la primera potencia en el denominador de $P(x)$ y *a lo más* a la segunda potencia en el denominador de $Q(x)$, entonces $x = x_0$ es un punto singular regular.

Además, observe que si $x = x_0$ es un punto singular regular y se multiplica la ecuación (2) por $(x - x_0)^2$, entonces la ED original se puede escribir en la forma

$$(x - x_0)^2y'' + (x - x_0)p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad (3)$$

donde p y q son analíticas en $x = x_0$.

EJEMPLO 1 Clasificación de puntos singulares

Se debe aclarar que $x = 2$ y $x = -2$ son puntos singulares de

$$(x^2 - 4)^2y'' + 3(x - 2)y' + 5y = 0.$$

Después de dividir la ecuación entre $(x^2 - 4)^2 = (x - 2)^2(x + 2)^2$ y de reducir los coeficientes a los términos mínimos, se encuentra que

$$P(x) = \frac{3}{(x - 2)(x + 2)^2} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{5}{(x - 2)^2(x + 2)^2}.$$

Ahora se prueba $P(x)$ y $Q(x)$ en cada punto singular.

Para que $x = 2$ sea un punto singular regular, el factor $x - 2$ puede aparecer elevado a la primera potencia en el denominador de $P(x)$ y a lo más a la segunda potencia en el denominador de $Q(x)$. Una comprobación de los denominadores de $P(x)$ y $Q(x)$ muestra que ambas condiciones se satisfacen, por lo que $x = 2$ es un punto singular regular. En forma alternativa, llegamos a la misma conclusión al notar que ambas funciones racionales

$$p(x) = (x - 2)P(x) = \frac{3}{(x + 2)^2} \quad \text{y} \quad q(x) = (x - 2)^2Q(x) = \frac{5}{(x + 2)^2}$$

son analíticas en $x = 2$.

Ahora, puesto que el factor $x - (-2) = x + 2$ aparece a la segunda potencia en el denominador de $P(x)$, se concluye de inmediato que $x = -2$ es un punto singular irregular de la ecuación. Esto también se deduce del hecho de que

$$p(x) = (x + 2)P(x) = \frac{3}{(x - 2)(x + 2)}$$

es no analítica en $x = -2$. ■

En el ejemplo 1, observe que como $x = 2$ es un punto singular regular, la ecuación original se puede escribir como

$$(x-2)^2y'' + (x-2)\underbrace{\frac{3}{(x+2)^2}}_{\substack{p(x) \text{ analítica} \\ \text{en } x=2}}y' + \underbrace{\frac{5}{(x+2)^2}}_{\substack{q(x) \text{ analítica} \\ \text{en } x=2}}y = 0.$$

Como otro ejemplo, se puede ver que $x = 0$ es punto singular irregular de $x^3y'' -2xy' + 8y = 0$ por inspección de los denominadores de $P(x) = -2/x^2$ y $Q(x) = 8/x^3$. Por otro lado, $x = 0$ es un punto singular regular de $xy'' - 2xy' + 8y = 0$, puesto que $x - 0$ y $(x - 0)^2$ incluso no aparecen en los denominadores respectivos de $P(x) = -2$ y $Q(x) = 8/x$. Para un punto singular $x = x_0$, cualquier potencia no negativa de $x - x_0$ menor que uno (en particular, cero) y cualquier potencia no negativa menor que dos (en particular, cero y uno) en los denominadores de $P(x)$ y $Q(x)$, respectivamente, indican que x_0 es un punto singular irregular. Un punto singular puede ser un número complejo. Se debe comprobar que $x = 3i$ y que $x = -3i$ son dos puntos singulares regulares de $(x^2 + 9)y'' - 3xy' + (1 - x)y = 0$.

Cualquier ecuación de Cauchy-Euler de segundo orden $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, donde a, b y c son constantes reales, tiene un punto singular regular en $x = 0$. Se debe comprobar que dos soluciones de la ecuación de Cauchy-Euler $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ en el intervalo $(0,\infty)$ son $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 \ln x$. Si se intenta encontrar una solución en serie de potencias respecto al punto singular regular $x = 0$ (en particular, $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$), se tendría éxito en obtener sólo la solución polinomial $y_1 = x^2$. El hecho de que no se obtuviera la segunda solución no es sorprendente porque $\ln x$ (y en consecuencia $y_2 = x^2 \ln x$) no es analítica en $x = 0$, es decir, y_2 no tiene un desarrollo en serie de Taylor centrado en $x = 0$.

MÉTODO DE FROBENIUS Para resolver una ecuación diferencial (1) respecto a un punto singular regular, se emplea el siguiente teorema debido a Frobenius.

TEOREMA 6.2.1 Teorema de Frobenius

Si $x = x_0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial (1), entonces existe al menos una solución de la forma

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^{n+r}, \tag{4}$$

donde el número r es una constante por determinar. La serie converge por lo menos en algún intervalo $0 < x - x_0 < R$.

Observe las palabras *al menos* en el primer enunciado del teorema 6.2.1. Esto significa que en contraste con el teorema 6.1.1 el teorema 6.2.1 no garantiza que sea posible encontrar *dos* soluciones en serie del tipo indicado en (4). El **método de Frobenius**, para encontrar soluciones en serie respecto a un punto singular regular x_0, es similar al método de coeficientes indeterminados de series de la sección anterior en la que se sustituye $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^{n+r}$ en la ecuación diferencial dada y se determinan los coeficientes desconocidos c_n con una relación de recurrencia. Sin embargo, se tiene una tarea más en este procedimiento: antes de determinar los coeficientes, se debe encontrar el exponente desconocido r. Si se encuentra que r es un número que no es un entero negativo, entonces la solución correspondiente $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^{n+r}$ no es una serie de potencias.

Como se hizo en el análisis de soluciones respecto a puntos ordinarios siempre supondremos, por razones de simplicidad al resolver ecuaciones diferenciales, que el punto singular regular es $x = 0$.

EJEMPLO 2 Dos soluciones en series

Debido a que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial

$$3xy'' + y' - y = 0, \tag{5}$$

tratamos de encontrar una solución de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$. Ahora

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)c_n x^{n+r-1} \quad \text{y} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)c_n x^{n+r-2},$$

por lo que

$$\begin{aligned}
3xy'' + y' - y &= 3\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(3n + 3r - 2)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\
&= x^r\Bigg[r(3r - 2)c_0 x^{-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (n + r)(3n + 3r - 2)c_n x^{n-1}}_{k=n-1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{k=n}\Bigg] \\
&= x^r\Bigg[r(3r - 2)c_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k + r + 1)(3k + 3r + 1)c_{k+1} - c_k]x^k\Bigg] = 0,
\end{aligned}$$

lo que implica que $\quad r(3r - 2)c_0 = 0$

y $\quad (k + r + 1)(3k + 3r + 1)c_{k+1} - c_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

Ya que no se ha ganado nada al hacer $c_0 = 0$, entonces debemos tener

$$r(3r - 2) = 0 \tag{6}$$

y

$$c_{k+1} = \frac{c_k}{(k + r + 1)(3k + 3r + 1)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Cuando se sustituye en (7), los dos valores de r que satisfacen la ecuación cuadrática (6), $r_1 = \frac{2}{3}$ y $r_2 = 0$, se obtienen dos relaciones de recurrencia diferentes:

$$r_1 = \tfrac{2}{3}, \qquad c_{k+1} = \frac{c_k}{(3k + 5)(k + 1)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

$$r_2 = 0, \qquad c_{k+1} = \frac{c_k}{(k + 1)(3k + 1)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

De (8) encontramos

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{c_0}{5 \cdot 1} \\
c_2 &= \frac{c_1}{8 \cdot 2} = \frac{c_0}{2!5 \cdot 8} \\
c_3 &= \frac{c_2}{11 \cdot 3} = \frac{c_0}{3!5 \cdot 8 \cdot 11} \\
c_4 &= \frac{c_3}{14 \cdot 4} = \frac{c_0}{4!5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} \\
&\vdots \\
c_n &= \frac{c_0}{n!5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n + 2)}.
\end{aligned}$$

De (9) encontramos

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{c_0}{1 \cdot 1} \\
c_2 &= \frac{c_1}{2 \cdot 4} = \frac{c_0}{2!1 \cdot 4} \\
c_3 &= \frac{c_2}{3 \cdot 7} = \frac{c_0}{3!1 \cdot 4 \cdot 7} \\
c_4 &= \frac{c_3}{4 \cdot 10} = \frac{c_0}{4!1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} \\
&\vdots \\
c_n &= \frac{c_0}{n!1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n - 2)}.
\end{aligned}$$

Aquí se encuentra algo que no ocurrió cuando se obtuvieron soluciones respecto a un punto ordinario; se tiene lo que parecen ser dos conjuntos de coeficientes diferentes, pero cada conjunto contiene el *mismo* múltiplo c_0. Si se omite este término, las soluciones en serie son

$$y_1(x) = x^{2/3}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)} x^n\right] \tag{10}$$

$$y_2(x) = x^0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)} x^n\right]. \tag{11}$$

Con el criterio de la razón se puede demostrar que (10) y (11) convergen para todos los valores de x; es decir, $|x| < \infty$. También debe ser evidente de la forma de estas soluciones que ninguna serie es un múltiplo constante de la otra y, por tanto $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente independientes en todo el eje x. Así, por el principio de superposición, $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ es otra solución de (5). En cualquier intervalo que no contenga al origen, tal como $(0,\infty)$, esta combinación lineal representa la solución general de la ecuación diferencial. ■

ECUACIÓN INDICIAL La ecuación (6) se llama **ecuación indicial** del problema y los valores $r_1 = \frac{2}{3}$ y $r_2 = 0$ se llaman **raíces indiciales**, o **exponentes**, de la singularidad $x = 0$. En general, después de sustituir $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ en la ecuación diferencial dada y simplificando, la ecuación indicial es una ecuación cuadrática en r que resulta de *igualar a cero el coeficiente total de la potencia mínima de x*. Se encuentran los dos valores de r y se sustituyen en una relación de recurrencia como (7). El teorema 6.2.1 garantiza que al menos se puede encontrar una solución de la supuesta forma en serie.

Es posible obtener la ecuación indicial antes de sustituir $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ en la ecuación diferencial. Si $x = 0$ es un punto singular regular de (1), entonces por la definición 6.2.1 ambas funciones $p(x) = xP(x)$ y $q(x) = x^2Q(x)$, donde P y Q se definen por la forma estándar (2), son analíticas en $x = 0$; es decir, los desarrollos en serie de potencias

$$p(x) = xP(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \quad \text{y} \quad q(x) = x^2Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots \tag{12}$$

son válidas en intervalos que tienen un radio de convergencia positivo. Multiplicando (2) por x^2, se obtiene la forma dada en (3):

$$x^2y'' + x[xP(x)]y' + [x^2Q(x)]y = 0. \tag{13}$$

Después de sustituir $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ y las dos series en las ecuaciones (12) y (13) y realizando la multiplicación de la serie, se encuentra que la ecuación indicial general es

$$r(r-1) + a_0r + b_0 = 0, \tag{14}$$

donde a_0 y b_0 son como se define en (12). Véanse los problemas 13 y 14 de los ejercicios 6.2.

EJEMPLO 3 Dos soluciones en series

Resuelva $2xy'' + (1 + x)y' + y = 0$.

SOLUCIÓN Sustituyendo $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ se obtiene

$$2xy'' + (1 + x)y' + y = 2\sum_{n=0}^{\infty}(n + r)(n + r - 1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)c_n x^{n+r-1}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)(2n + 2r - 1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n + r + 1)c_n x^{n+r}$$

$$= x^r\Bigg[r(2r - 1)c_0 x^{-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n + r)(2n + 2r - 1)c_n x^{n-1}}_{k=n-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n + r + 1)c_n x^{n}}_{k=n}\Bigg]$$

$$= x^r\left[r(2r - 1)c_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}[(k + r + 1)(2k + 2r + 1)c_{k+1} + (k + r + 1)c_k]x^k\right],$$

lo que implica que $\qquad r(2r - 1) = 0 \qquad (15)$

y $\qquad (k + r + 1)(2k + 2r + 1)c_{k+1} + (k + r + 1)c_k = 0, \qquad (16)$

$k = 0, 1, 2, \ldots$ De (15) vemos que las raíces indiciales son $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = 0$.

Para $r_1 = \frac{1}{2}$ se puede dividir entre $k + \frac{3}{2}$ en (16) para obtener

$$c_{k+1} = \frac{-c_k}{2(k + 1)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (17)$$

mientras que para $r_2 = 0$, (16) se convierte en

$$c_{k+1} = \frac{-c_k}{2k + 1}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (18)$$

De (17) encontramos

$$c_1 = \frac{-c_0}{2 \cdot 1}$$

$$c_2 = \frac{-c_1}{2 \cdot 2} = \frac{c_0}{2^2 \cdot 2!}$$

$$c_3 = \frac{-c_2}{2 \cdot 3} = \frac{-c_0}{2^3 \cdot 3!}$$

$$c_4 = \frac{-c_3}{2 \cdot 4} = \frac{c_0}{2^4 \cdot 4!}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{2^n n!}.$$

De (18) encontramos

$$c_1 = \frac{-c_0}{1}$$

$$c_2 = \frac{-c_1}{3} = \frac{c_0}{1 \cdot 3}$$

$$c_3 = \frac{-c_2}{5} = \frac{-c_0}{1 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$c_4 = \frac{-c_3}{7} = \frac{c_0}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n - 1)}.$$

Por lo que para la raíz indicial $r_1 = \frac{1}{2}$ se obtiene la solución

$$y_1(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}x^{n+1/2},$$

donde de nuevo se omitió c_0. Esta serie converge para $x \geq 0$; como se ha dado, la serie no está definida para valores negativos de x debido a la presencia de $x^{1/2}$. Para $r_2 = 0$, una segunda solución es

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n - 1)}x^n, \qquad |x| < \infty.$$

En el intervalo $(0,\infty)$ la solución general es $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. ■

EJEMPLO 4 Sólo una solución en serie

Resuelva $xy'' + y = 0$.

SOLUCIÓN De $xP(x) = 0$, $x^2Q(x) = x$ y el hecho de que 0 y x son sus propias series de potencias centradas en 0, se concluye que $a_0 = 0$ y $b_0 = 0$, por tanto, de la ecuación (14) la ecuación indicial es $r(r - 1) = 0$. Se debe comprobar que las dos relaciones de recurrencia correspondientes a las raíces indiciales $r_1 = 1$ y $r_2 = 0$ producen exactamente el mismo conjunto de coeficientes. En otras palabras, en este caso el método de Frobenius produce sólo una solución en serie

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} x^{n+1} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \cdots. \quad ■$$

TRES CASOS Por razones de análisis, de nuevo se supone que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación (1) y que las raíces indiciales r_1 y r_2 de la singularidad son reales. Cuando usamos el método de Frobenius, se distinguen tres casos que corresponden a la naturaleza de las raíces indiciales r_1 y r_2. En los dos primeros casos el símbolo r_1 denota la más grande de dos raíces distintas, es decir, $r_1 > r_2$. En el último caso $r_1 = r_2$.

CASO I: Si r_1 y r_2 son distintas y la diferencia $r_1 - r_2$ no es un entero positivo, entonces existen dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (1) de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, \quad c_0 \neq 0, \qquad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, \quad b_0 \neq 0.$$

Este es el caso que se ilustra en los ejemplos 2 y 3.

A continuación suponemos que la diferencia de las raíces es N, donde N es un entero positivo. En este caso la segunda solución *podría* contener un logaritmo.

CASO II: Si r_1 y r_2 son distintas y la diferencia $r_1 - r_2$ es un entero positivo, entonces existen dos soluciones de la ecuación (1) linealmente independientes de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, \qquad c_0 \neq 0, \tag{19}$$

$$y_2(x) = Cy_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, \qquad b_0 \neq 0, \tag{20}$$

donde C es una constante que podría ser cero.

Finalmente, en el último caso, el caso cuando $r_1 = r_2$, una segunda solución *siempre* tiene un logaritmo. La situación es similar a la solución de la ecuación de Cauchy-Euler cuando las raíces de la ecuación auxiliar son iguales.

CASO III: Si r_1 y r_2 son iguales, entonces existen dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (1) de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, \qquad c_0 \neq 0, \tag{21}$$

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r_1}. \tag{22}$$

DETERMINACIÓN DE UNA SEGUNDA SOLUCIÓN Cuando la diferencia $r_1 - r_2$ es un entero positivo (caso II), se *podría* o *no* encontrar dos soluciones de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$. Esto es algo que no se sabe con anticipación, pero se determina des-

pués de haber encontrado las raíces indiciales y haber examinado con cuidado la relación de recurrencia que definen los coeficientes c_n. Se podría tener la fortuna de encontrar dos soluciones que impliquen sólo potencias de x, es decir, $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}$ (ecuación (19)) y $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$ (ecuación (20) con $C = 0$). Véase el problema 31 de los ejercicios 6.2. Por otro lado, en el ejemplo 4 se ve que la diferencia de las raíces indiciales es un entero positivo ($r_1 - r_2 = 1$) y el método de Frobenius falla en obtener una segunda solución en serie. En esta situación, la ecuación (20), con $C \neq 0$, indica que la segunda solución se parece. Por último, cuando la diferencia $r_1 - r_2$ es un cero (caso III), el método de Frobenius no da una solución en serie; la segunda solución (22) siempre contiene un logaritmo y se puede demostrar que es equivalente a (20) con $C = 1$. Una forma de obtener la segunda solución con el término logarítmico es usar el hecho de que

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx \tag{23}$$

también es una solución de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, siempre y cuando $y_1(x)$ sea una solución conocida. En el ejemplo siguiente, se ilustra cómo usar la ecuación (23).

EJEMPLO 5 Volver a analizar el ejemplo 4 usando un SAC

Encuentre la solución general de $xy'' + y = 0$.

SOLUCIÓN De la conocida solución dada del ejemplo 4,

$$y_1(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \cdots,$$

se puede construir una segunda solución $y_2(x)$ usando la fórmula (23). Quienes tengan tiempo, energía y paciencia pueden realizar el aburrido trabajo de elevar al cuadrado una serie, la división larga y la integración del cociente a mano. Pero todas estas operaciones se realizan con relativa facilidad con la ayuda un SAC. Se obtienen los resultados:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int 0\,dx}}{[y_1(x)]^2}\,dx = y_1(x) \int \frac{dx}{\left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \cdots\right]^2}$$

$$= y_1(x) \int \frac{dx}{\left[x^2 - x^3 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{7}{72}x^5 + \cdots\right]} \quad \leftarrow \text{después de elevar al cuadrado}$$

$$= y_1(x) \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{7}{12} + \frac{19}{72}x + \cdots\right] dx \quad \leftarrow \text{después de la división larga}$$

$$= y_1(x) \left[-\frac{1}{x} + \ln x + \frac{7}{12}x + \frac{19}{144}x^2 + \cdots\right] \quad \leftarrow \text{después de integrar}$$

$$= y_1(x) \ln x + y_1(x) \left[-\frac{1}{x} + \frac{7}{12}x + \frac{19}{144}x^2 + \cdots\right],$$

o $$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \left[-1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots\right]. \quad \leftarrow \text{después de multiplicar}$$

En el intervalo $(0,\infty)$ la solución general es $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, ■

Observe que la forma final de y_2 en el ejemplo 5 corresponde a (20) con $C = 1$; la serie entre paréntesis corresponde a la suma en (20) con $r_2 = 0$.

COMENTARIOS

i) Las tres formas distintas de una ecuación diferencial lineal de segundo orden en (1), (2) y (3) se usaron para analizar varios conceptos teóricos. Pero a nivel práctico, cuando se tiene que resolver una ecuación diferencial con el método de Frobenius, se recomienda trabajar con la forma de la ED dada en (1).

ii) Cuando la diferencia de las raíces indiciales $r_1 - r_2$ es un entero positivo ($r_1 > r_2$), a veces da resultado iterar la relación de recurrencia usando primero la raíz r_2 más pequeña. Véanse los problemas 31 y 32 en los ejercicios 6.2.

iii) Debido a que una raíz indicial r es una solución de una ecuación cuadrática, ésta podría ser compleja. Sin embargo, este caso no se analiza.

iv) Si $x = 0$ es punto singular irregular, entonces es posible que no se encuentre *ninguna* solución de la ED de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$.

EJERCICIOS 6.2

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-9.

En los problemas 1 a 10, determine los puntos singulares de la ecuación diferencial dada. Clasifique cada punto singular como regular o irregular.

1. $x^3y'' + 4x^2y' + 3y = 0$
2. $x(x + 3)^2y'' - y = 0$
3. $(x^2 - 9)^2y'' + (x + 3)y' + 2y = 0$
4. $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{(x - 1)^3}y = 0$
5. $(x^3 + 4x)y'' - 2xy' + 6y = 0$
6. $x^2(x - 5)^2y'' + 4xy' + (x^2 - 25)y = 0$
7. $(x^2 + x - 6)y'' + (x + 3)y' + (x - 2)y = 0$
8. $x(x^2 + 1)^2y'' + y = 0$
9. $x^3(x^2 - 25)(x - 2)^2y'' + 3x(x - 2)y' + 7(x + 5)y = 0$
10. $(x^3 - 2x^2 + 3x)^2y'' + x(x - 3)^2y' - (x + 1)y = 0$

En los problemas 11 y 12 escriba la ecuación diferencial dada en la forma (3) para cada punto singular regular de la ecuación. Identifique las funciones $p(x)$ y $q(x)$.

11. $(x^2 - 1)y'' + 5(x + 1)y' + (x^2 - x)y = 0$
12. $xy'' + (x + 3)y' + 7x^2y = 0$

En los problemas 13 y 14, $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial dada. Use la forma general de la ecuación indicial en (14) para encontrar las raíces indiciales de la singularidad. Sin resolver, indique el número de soluciones en serie que se esperaría encontrar usando el método de Frobenius.

13. $x^2y'' + \left(\frac{5}{3}x + x^2\right)y' - \frac{1}{3}y = 0$
14. $xy'' + y' + 10y = 0$

En los problemas 15 a 24, $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial. Muestre que las raíces indiciales de la singularidad no difieren por un entero. Use el método de Frobenius para obtener dos soluciones en serie linealmente independientes respecto a $x = 0$. Forme la solución general en $(0, \infty)$.

15. $2xy'' - y' + 2y = 0$
16. $2xy'' + 5y' + xy = 0$
17. $4xy'' + \frac{1}{2}y' + y = 0$
18. $2x^2y'' - xy' + (x^2 + 1)y = 0$
19. $3xy'' + (2 - x)y' - y = 0$
20. $x^2y'' - \left(x - \frac{2}{9}\right)y = 0$
21. $2xy'' - (3 + 2x)y' + y = 0$
22. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{4}{9}\right)y = 0$
23. $9x^2y'' + 9x^2y' + 2y = 0$
24. $2x^2y'' + 3xy' + (2x - 1)y = 0$

En los problemas 25 a 30, $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial dada. Demuestre que las raíces indi-

ciales de la singularidad difieren por un entero. Use el método de Frobenius para obtener al menos una solución en serie respecto a $x = 0$. Use la ecuación (23) donde sea necesario y un SAC, como se indica, para encontrar una segunda solución. Forme la solución general en $(0,\infty)$.

25. $xy'' + 2y' - xy = 0$

26. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$

27. $xy'' - xy' + y = 0$

28. $y'' + \dfrac{3}{x}y' - 2y = 0$

29. $xy'' + (1 - x)y' - y = 0$

30. $xy'' + y' + y = 0$

En los problemas 31 y 32, $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial dada. Demuestre que las raíces indiciales de la singularidad difieren por un entero. Use la relación de recurrencia encontrada por el método de Frobenius primero con la raíz más grande r_1. ¿Cuántas soluciones encontró? A continuación use la relación de recurrencia con la raíz más pequeña r_2. ¿Cuántas soluciones encontró?

31. $xy'' + (x - 6)y' - 3y = 0$

32. $x(x - 1)y'' + 3y' - 2y = 0$

33. **a)** La ecuación diferencial $x^4y'' + \lambda y = 0$ tiene un punto singular irregular en $x = 0$. Demuestre que la sustitución $t = 1/x$ produce la ED

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{t}\frac{dy}{dt} + \lambda y = 0,$$

que ahora tiene un punto singular regular en $t = 0$.

b) Use el método de esta sección para encontrar dos soluciones en serie de la segunda ecuación del inciso a) respecto a un punto singular regular $t = 0$.

c) Exprese cada solución en serie de la ecuación original en términos de funciones elementales.

Modelo matemático

34. Pandeo de una columna cónica En el ejemplo 3 de la sección 5.2, vimos que cuando una fuerza compresiva vertical constante o carga P se aplica a una columna delgada de sección transversal uniforme, la deflexión $y(x)$ fue una solución del problema con valores en la frontera

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0. \qquad (24)$$

La suposición aquí es que la columna está abisagrada en ambos extremos. La columna se pandea sólo cuando la fuerza compresiva es una carga crítica P_n.

a) En este problema se supone que la columna es de longitud L, está abisagrada en ambos extremos, tiene secciones transversales circulares y es cónica como se muestra en la figura 6.2.1a. Si la columna, un cono truncado, tiene un afilamiento lineal $y = cx$, como se muestra en la sección transversal de la figura 6.2.1b, el momento de inercia de una sección transversal respecto a un eje perpendicular al plano xy es $I = \frac{1}{4}\pi r^4$, donde $r = y$ y $y = cx$. Por tanto, escribimos $I(x) = I_0(x/b)^4$, donde $I_0 = I(b) = \frac{1}{4}\pi(cb)^4$ Sustituyendo $I(x)$ en la ecuación diferencial en (24), vemos que la deflexión en este caso se determina del PVF

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0,$$

donde $\lambda = Pb^4/EI_0$. Use los resultados del problema 33 para encontrar las cargas críticas P_n para la columna cónica. Use una identidad apropiada para expresar los modos de pandeo $y_n(x)$ como una sola función.

b) Use un SAC para trazar la gráfica del primer modo de pandeo $y_1(x)$ correspondiente a la carga de Euler P_1 cuando $b = 11$ y $a = 1$.

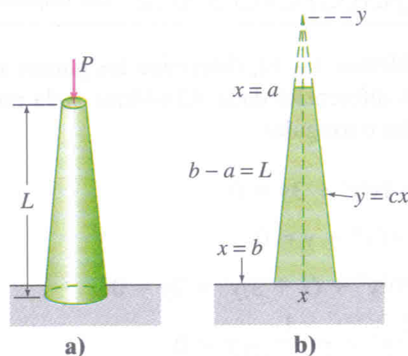


FIGURA 6.2.1 Columna cónica del problema 34.

Problemas para analizar

35. Analice cómo definiría un punto singular regular para la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$a_3(x)y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

36. Cada una de las ecuaciones diferenciales

$$x^3y'' + y = 0 \quad \text{y} \quad x^2y'' + (3x - 1)y' + y = 0$$

tiene un punto singular irregular en $x = 0$. Determine si el método de Frobenius produce una solución en serie de cada ecuación diferencial respecto a $x = 0$. Analice y explique sus hallazgos.

37. Se ha visto que $x = 0$ es un punto singular regular de cualquier ecuación de Cauchy-Euler $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$. ¿Están relacionadas la ecuación indicial (14) para una ecuación de Cauchy-Euler y su ecuación auxiliar? Analice.

6.3 FUNCIONES ESPECIALES

REPASO DE MATERIAL

- Secciones 6.1 y 6.2

INTRODUCCIÓN Las dos ecuaciones diferenciales

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \qquad (1)$$

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0 \qquad (2)$$

se presentan en estudios avanzados de matemáticas aplicadas, física e ingeniería. Se llaman **ecuación de Bessel de orden** ν y **ecuación de Legendre de orden** n, respectivamente. Cuando resolvemos la ecuación (1) se supone que $\nu \geq 0$, mientras que en (2) sólo consideraremos el caso cuando n es un entero no negativo.

6.3.1 ECUACIÓN DE BESSEL

LAS SOLUCIÓN Debido a que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación de Bessel, se sabe que existe al menos una solución de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$. Sustituyendo la última expresión en (1), se obtiene

$$\begin{aligned} x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n + r)(n + r - 1)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n + r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\ &= c_0(r^2 - r + r - \nu^2)x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n[(n + r)(n + r - 1) + (n + r) - \nu^2]x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} \\ &= c_0(r^2 - \nu^2)x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n[(n + r)^2 - \nu^2]x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}. \qquad (3) \end{aligned}$$

De (3) se ve que la ecuación indicial es $r^2 - \nu^2 = 0$, de modo que las raíces indiciales son $r_1 = \nu$ y $r_2 = -\nu$. Cuando $r_1 = \nu$, la ecuación (3) se convierte en

$$\begin{aligned} x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n + 2\nu)x^n + x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} &= x^\nu \Bigg[(1 + 2\nu)c_1 x + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n + 2\nu)x^n}_{k = n-2} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}}_{k = n}\Bigg] \\ &= x^\nu \Bigg[(1 + 2\nu)c_1 x + \sum_{k=0}^{\infty} [(k + 2)(k + 2 + 2\nu)c_{k+2} + c_k]x^{k+2}\Bigg] = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, por el argumento usual podemos escribir $(1 + 2\nu)c_1 = 0$ y

$$(k + 2)(k + 2 + 2\nu)c_{k+2} + c_k = 0$$

o

$$c_{k+2} = \frac{-c_k}{(k + 2)(k + 2 + 2\nu)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

La elección $c_1 = 0$ en (4) implica que $c_3 = c_5 = c_7 = \cdots = 0$, por lo que para $k = 0, 2, 4, \ldots$ se encuentra, después de establecer $k + 2 = 2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, que

$$c_{2n} = -\frac{c_{2n-2}}{2^2 n(n + \nu)}. \qquad (5)$$

Por lo que
$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (1+\nu)}$$
$$c_4 = -\frac{c_2}{2^2 \cdot 2(2+\nu)} = \frac{c_0}{2^4 \cdot 1 \cdot 2(1+\nu)(2+\nu)}$$
$$c_6 = -\frac{c_4}{2^2 \cdot 3(3+\nu)} = -\frac{c_0}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}$$
$$\vdots$$
$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

En la práctica se acostumbra elegir a c_0 como
$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)},$$
donde $\Gamma(1+\nu)$ es la función gamma. Véase el apéndice I. Puesto que esta última función posee la propiedad conveniente $\Gamma(1+\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha)$, se puede reducir el producto indicado en el denominador de (6) a un término. Por ejemplo,
$$\Gamma(1+\nu+1) = (1+\nu)\Gamma(1+\nu)$$
$$\Gamma(1+\nu+2) = (2+\nu)\Gamma(2+\nu) = (2+\nu)(1+\nu)\Gamma(1+\nu).$$

Por tanto, se puede escribir (6) como
$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu)\Gamma(1+\nu)} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n!\Gamma(1+\nu+n)}$$
para $n = 0, 1, 2, \ldots$

FUNCIONES DE BESSEL DE PRIMERA CLASE Si se usan los coeficientes c_{2n} apenas obtenidos y $r = \nu$, una solución en serie de la ecuación (1) es $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n+\nu}$. Esta solución usualmente se denota por $J_\nu(x)$:
$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \tag{7}$$

Si $\nu \geq 0$, la serie converge al menos en el intervalo $[0, \infty)$. También, para el segundo exponente $r_2 = -\nu$ se obtiene exactamente de la misma manera,
$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu} \tag{8}$$

Las funciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ se llaman **funciones de Bessel de primera clase** de orden ν y $-\nu$, respectivamente. Dependiendo del valor de ν, (8) puede contener potencias negativas de x y, por tanto, converger en $(0, \infty)$.*

Ahora se debe tener cuidado al escribir la solución general de (1). Cuando $\nu = 0$, es evidente que (7) y (8) son las mismas. Si $\nu > 0$ y $r_1 - r_2 = \nu - (-\nu) = 2\nu$ no es un entero positivo, se tiene del caso I de la sección 6.2 que $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son soluciones linealmente independientes de (1) en $(0, \infty)$ y, por tanto, la solución general del intervalo es $y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$. Pero se sabe que del caso II de la sección 6.2 que cuando $r_1 - r_2 = 2\nu$ es un entero positivo, *podría* existir una segunda solución en serie de (1). En este segundo caso se distinguen dos posibilidades. Cuando $\nu = m =$ entero positivo, $J_{-m}(x)$ definida por (8) y $J_m(x)$ no son soluciones linealmente independientes. Se puede demostrar que J_{-m} es un múltiplo constante de J_m (véase la propiedad *i*) en la página 245). Además, $r_1 - r_2 = 2\nu$ puede ser un entero positivo cuando ν es la mitad de

*Cuando reemplazamos x por $|x|$, las series dadas en (7) y en (8) convergen para $0 < |x| < \infty$.

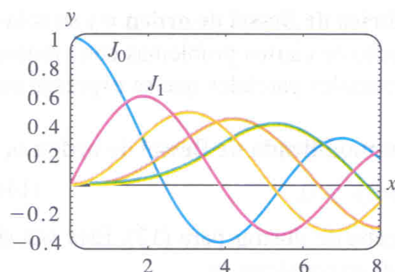


FIGURA 6.3.1 Funciones de Bessel de primera clase para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

un entero positivo impar. En este último caso se puede demostrar que $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes. En otras palabras, la solución general de (1) en $(0, \infty)$ es

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x), \qquad \nu \neq \text{entero}. \tag{9}$$

En la figura 6.3.1 se presentan las gráficas de $y = J_0(x)$ y $y = J_1(x)$.

EJEMPLO 1 Ecuaciones de Bessel de orden $\frac{1}{2}$

Al identificar $\nu^2 = \frac{1}{4}$ y $\nu = \frac{1}{2}$, se puede ver de la ecuación (9) que la solución general de la ecuación $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$ en $(0, \infty)$ es $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$. ■

FUNCIONES DE BESSEL DE SEGUNDA CLASE Si $\nu \neq$ entero, la función definida por la combinación lineal

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\text{sen } \nu\pi} \tag{10}$$

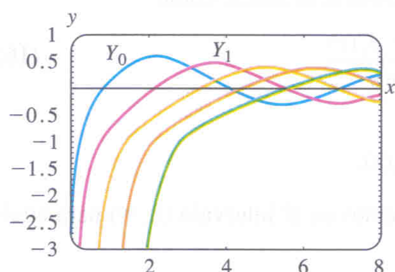


FIGURA 6.3.2 Funciones de Bessel de segunda clase para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

y la función $J_\nu(x)$ son soluciones linealmente independientes de (1), por lo que otra forma de la solución general de (1) es $y = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x)$ siempre que $\nu \neq$ entero. Conforme $\nu \to m$ con m entero (10) tiene la forma indeterminada 0/0. Sin embargo, se puede demostrar por la regla de L'Hôpital que el $\lim_{\nu \to m} Y_\nu(x)$ existe. Además, la función

$$Y_m(x) = \lim_{\nu \to m} Y_\nu(x)$$

y $J_m(x)$ son soluciones linealmente independientes de $x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$. Por tanto, para *cualquier* valor de ν la solución general de (1) en $(0, \infty)$ se puede escribir como

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x). \tag{11}$$

$Y_\nu(x)$ se llama **función de Bessel de segunda clase** de orden ν. La figura 6.3.2 muestra las gráficas de $Y_0(x)$ y $Y_1(x)$.

EJEMPLO 2 Ecuación de Bessel de orden 3

Identificando $\nu^2 = 9$ y $\nu = 3$ vemos de la ecuación (11) que la solución general de la ecuación $x^2y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0$ en $(0, \infty)$ es $y = c_1 J_3(x) + c_2 Y_3(x)$. ■

ED RESOLUBLES EN TÉRMINOS DE FUNCIONES DE BESSEL Algunas veces es posible convertir una ecuación diferencial en la ecuación (1) por medio de un cambio de variable. Podemos entonces expresar la solución de la ecuación original en términos de funciones de Bessel. Por ejemplo, si se establece que $t = \alpha x$, $\alpha > 0$, en

$$x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{12}$$

entonces por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \alpha\frac{dy}{dt} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \alpha^2\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Por lo que (12) se convierte en

$$\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2\alpha^2\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{t}{\alpha}\right)\alpha\frac{dy}{dt} + (t^2 - \nu^2)y = 0 \quad \text{o} \quad t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - \nu^2)y = 0.$$

La última ecuación es la ecuación de Bessel de orden ν cuya solución es $y = c_1 J_\nu(t) + c_2 Y_\nu(t)$. Volviendo a sustituir $t = \alpha x$ en la última expresión, se encuentra que la solución general de (12) es

$$y = c_1 J_\nu(\alpha x) + c_2 Y_\nu(\alpha x). \tag{13}$$

La ecuación (12), que se llama **ecuación paramétrica de Bessel de orden ν** y su solución general (13) son muy importantes en el estudio de ciertos problemas con valores en la frontera relacionados con ecuaciones diferenciales parciales que se expresan en coordenadas cilíndricas.

Otra ecuación semejante a (1) es la **ecuación modificada de Bessel de orden ν,**

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0. \tag{14}$$

Esta ED se puede resolver en la forma que se acaba de ilustrar para (12). Esta vez si hacemos que $t = ix$, donde $i^2 = -1$, entonces (14) se convierte en

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - \nu^2)y = 0.$$

Debido a que las soluciones de la ultima ED son $J_\nu(t)$ y $Y_\nu(t)$, las soluciones de *valores complejos* de la ecuación (14) son $J_\nu(ix)$ y $Y_\nu(ix)$. Una solución de valores reales, que se llama **función modificada de Bessel de primera clase** de orden ν, está definida en términos de $J_\nu(ix)$:

$$I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix). \tag{15}$$

Véase el problema 21 en los ejercicios 6.3. Análogamente a (10), la **función modificada de Bessel de segunda clase** de orden $\nu \neq$ entero, se define como

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\operatorname{sen}\nu\pi}, \tag{16}$$

y para $\nu = n$ entero,

$$K_n(x) = \lim_{\nu\to n} K_\nu(x).$$

Debido a que I_ν y K_ν son linealmente independientes en el intervalo $(0, \infty)$ para cualquier valor de ν, la solución general de (14) es

$$y = c_1I_\nu(x) + c_2K_\nu(x). \tag{17}$$

Pero otra ecuación, importante debido a que muchas ED se ajustan a su forma mediante elecciones apropiadas de los parámetros, es

$$y'' + \frac{1-2a}{x}y' + \left(b^2c^2x^{2c-2} + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2}\right)y = 0, \qquad p \geq 0. \tag{18}$$

Aunque no se dan los detalles, la solución general de (18),

$$y = x^a\left[c_1J_p(bx^c) + c_2Y_p(bx^c)\right], \tag{19}$$

se puede encontrar haciendo un cambio de las variables independiente y dependiente: $z = bx^c$, $y(x) = \left(\frac{z}{b}\right)^{a/c} w(z)$. Si p no es un entero, entonces Y_p en (19) se puede reemplazar por J_{-p}.

EJEMPLO 3 Usando (18)

Encuentre la solución general $xy'' + 3y' + 9y = 0$ en $(0, \infty)$.

SOLUCIÓN Escribiendo la ED como

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{9}{x}y = 0,$$

podemos hacer las siguientes identificaciones con (18):

$$1 - 2a = 3, \qquad b^2c^2 = 9, \qquad 2c - 2 = -1 \quad \text{y} \quad a^2 - p^2c^2 = 0.$$

Las ecuaciones primera y tercera implican que $a = -1$ y $c = \frac{1}{2}$. Con estos valores las ecuaciones segunda y cuarta se satisfacen haciendo $b = 6$ y $p = 2$.

De (19) se encuentra que la solución general de la ED en el intervalo $(0, \infty)$ es $y = x^{-1}[c_1 J_2(6x^{1/2}) + c_2 Y_2(6x^{1/2})]$. ■

EJEMPLO 4 Volver a revisar el problema del resorte envejecido

Recuerde que en la sección 5.1 vimos que $mx'' + ke^{-\alpha t}x = 0$, $\alpha > 0$ es un modelo matemático para el movimiento amortiguado libre de una masa en un resorte envejecido. Ahora se está en posición de encontrar la solución general de la ecuación. Se deja como problema demostrar que el cambio de variables $s = \dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,e^{-\alpha t/2}$ transforma la ecuación diferencial del resorte envejecido en

$$s^2\frac{d^2x}{ds^2} + s\frac{dx}{ds} + s^2x = 0.$$

La última ecuación se reconoce como (1) con $\nu = 0$ y donde los símbolos x y s juegan los papeles de y y x, respectivamente. La solución general de la nueva ecuación es $x = c_1J_0(s) + c_2Y_0(s)$. Si se sustituye nuevamente s, entonces se ve que la solución general de $mx'' + ke^{-\alpha t}x = 0$ es

$$x(t) = c_1J_0\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}\,e^{-\alpha t/2}\right) + c_2Y_0\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}\,e^{-\alpha t/2}\right).$$

Véanse los problemas 33 y 39 de los ejercicios 6.3. ■

El otro modelo analizado en la sección 5.1 de un resorte cuyas características cambian con el tiempo fue $mx'' + ktx = 0$. Si se divide entre m, vemos que la ecuación $x'' + \dfrac{k}{m}tx = 0$ es la ecuación de Airy $y'' + \alpha^2xy = 0$. Véase el ejemplo 3 en la sección 6.1. La solución general de la ecuación diferencial de Airy también se puede escribir en términos de funciones de Bessel. Véanse los problemas 34, 35 y 40 de los ejercicios 6.3.

PROPIEDADES Se listan a continuación algunas de las propiedades más útiles de las funciones de Bessel de orden m, $m = 0, 1, 2, \ldots$:

$$i)\ J_{-m}(x) = (-1)^mJ_m(x), \qquad ii)\ J_m(-x) = (-1)^mJ_m(x),$$

$$iii)\ J_m(0) = \begin{cases} 0, & m > 0 \\ 1, & m = 0, \end{cases} \qquad iv)\ \lim_{x\to 0^+} Y_m(x) = -\infty.$$

Observe que la propiedad *ii*) indica que $J_m(x)$ es una función par si m es un entero par y una función impar si m es un entero impar. Las gráficas de $Y_0(x)$ y $Y_1(x)$ en la figura 6.3.2 muestran la propiedad *iv*), en particular, $Y_m(x)$ no está acotada en el origen. Este último hecho no es obvio a partir de la ecuación (10). Las soluciones de la ecuación de Bessel de orden 0 se obtienen por medio de las soluciones $y_1(x)$ en (21) y $y_2(x)$ en (22) de la sección 6.2. Se puede demostrar que la ecuación (21) de la sección 6.2 es $y_1(x) = J_0(x)$, mientras que la ecuación (22) de esa sección es

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Entonces, la función de Bessel de segunda clase de orden 0, $Y_0(x)$ se define como la combinación lineal $Y_0(x) = \dfrac{2}{\pi}(\gamma - \ln 2)y_1(x) + \dfrac{2}{\pi}y_2(x)$ para $x > 0$. Es decir,

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}J_0(x)\left[\gamma + \ln\frac{x}{2}\right] - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

donde $\gamma = 0.57721566 \ldots$ es la **constante de Euler**. Debido a la presencia del término logarítmico, es evidente que $Y_0(x)$ es discontinua en $x = 0$.

VALORES NUMÉRICOS En la tabla 6.1 se presentan las primeras cinco raíces no negativas de $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$ y $Y_1(x)$. En la tabla 6.2 se presentan algunos otros valores de la función de estas cuatro funciones.

TABLA 6.1 Raíces no negativas de J_0, J_1, Y_0, y Y_1.

$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
2.4048	0.0000	0.8936	2.1971
5.5201	3.8317	3.9577	5.4297
8.6537	7.0156	7.0861	8.5960
11.7915	10.1735	10.2223	11.7492
14.9309	13.3237	13.3611	14.8974

TABLA 6.2 Valores numéricos de J_0, J_1, Y_0, y Y_1.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0	1.0000	0.0000	—	—
1	0.7652	0.4401	0.0883	−0.7812
2	0.2239	0.5767	0.5104	−0.1070
3	−0.2601	0.3391	0.3769	0.3247
4	−0.3971	−0.0660	−0.0169	0.3979
5	−0.1776	−0.3276	−0.3085	0.1479
6	0.1506	−0.2767	−0.2882	−0.1750
7	0.3001	−0.0047	−0.0259	−0.3027
8	0.1717	0.2346	0.2235	−0.1581
9	−0.0903	0.2453	0.2499	0.1043
10	−0.2459	0.0435	0.0557	0.2490
11	−0.1712	−0.1768	−0.1688	0.1637
12	0.0477	−0.2234	−0.2252	−0.0571
13	0.2069	−0.0703	−0.0782	−0.2101
14	0.1711	0.1334	0.1272	−0.1666
15	−0.0142	0.2051	0.2055	0.0211

RELACIÓN DE RECURRENCIA DIFERENCIAL Las fórmulas de recurrencia que relacionan las funciones de Bessel de diferentes órdenes son importantes en la teoría y en las aplicaciones. En el ejemplo siguiente se deduce una **relación de recurrencia diferencial**.

EJEMPLO 5 Deducción usando la definición de serie

Deduzca la fórmula $xJ'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x)$.

SOLUCIÓN De la ecuación (7) se tiene que

$$xJ'_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+\nu)}{n!\Gamma(1+\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

$$= \nu\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n!\Gamma(1+\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

$$= \nu J_\nu(x) + x\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,\Gamma(1+\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu-1}}_{k=n-1}$$

$$= \nu J_\nu(x) - x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(2+\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1} = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x).$$ ■

El resultado del ejemplo 5 se puede escribir en una forma alternativa. Dividiendo $xJ'_\nu(x) - \nu J_\nu(x) = -xJ_{\nu+1}(x)$ entre x, se obtiene

$$J'_\nu(x) - \frac{\nu}{x}J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x).$$

Esta última expresión se reconoce como una ecuación diferencial lineal de primer orden en $J_\nu(x)$. Multiplicando ambos lados de la igualdad por el factor integrante $x^{-\nu}$, se obtiene

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_\nu(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x). \tag{20}$$

Se puede demostrar de manera similar que

$$\frac{d}{dx}[x^{\nu}J_\nu(x)] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x). \tag{21}$$

Véase el problema 27 en los ejercicios 6.3. Las relaciones de recurrencia diferenciales (20) y (21) también son válidas para la función de Bessel de segunda clase $Y_\nu(x)$. Observe que cuando $\nu = 0$ se deduce de (20) que

$$J_0'(x) = -J_1(x) \quad \text{y} \quad Y_0'(x) = -Y_1(x). \tag{22}$$

En el problema 39 de los ejercicios 6.3 se presenta una aplicación de estos resultados.

FUNCIONES DE BESSEL ESFÉRICAS Cuando el orden ν es la mitad de un entero impar, es decir, $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots$, las funciones de Bessel de primera clase $J_\nu(x)$ se pueden expresar en términos de las funciones elementales sen x, cos x y potencias de x. Este tipo de funciones de Bessel se llaman **funciones esféricas de Bessel**. Consideraremos el caso cuando $\nu = \frac{1}{2}$. De (7),

$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma\left(1+\frac{1}{2}+n\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2}.$$

En vista de la propiedad $\Gamma(1+\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha)$ y del hecho de que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ los valores de $\Gamma\left(1+\frac{1}{2}+n\right)$ para $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ son, respectivamente,

$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1+\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \Gamma\left(1+\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{3}{2}\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{3}{2^2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right) = \Gamma\left(1+\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{5}{2}\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \frac{5\cdot 3}{2^3}\sqrt{\pi} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2^3 4\cdot 2}\sqrt{\pi} = \frac{5!}{2^5 2!}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{9}{2}\right) = \Gamma\left(1+\tfrac{7}{2}\right) = \tfrac{7}{2}\Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right) = \frac{7\cdot 5}{2^6\cdot 2!}\sqrt{\pi} = \frac{7\cdot 6\cdot 5!}{2^6\cdot 6\cdot 2!}\sqrt{\pi} = \frac{7!}{2^7 3!}\sqrt{\pi}.$$

En general,
$$\Gamma\left(1+\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}.$$

Por lo que
$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\dfrac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Puesto que la serie infinita en la última línea es la serie de Maclaurin para sen x, se ha demostrado que

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\text{sen}\,x. \tag{23}$$

Se deja como ejercicio demostrar que

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{24}$$

Véanse los problemas 31 y 32 de los ejercicios 6.3.

6.3.2 ECUACIÓN DE LEGENDRE

SOLUCIÓN Puesto que $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación de Legendre (2), sustituyendo la serie $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, corriendo los índices de la suma y combinando la serie se obtiene

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = [n(n+1)c_0 + 2c_2] + [(n-1)(n+2)c_1 + 6c_3]x$$
$$+ \sum_{j=2}^{\infty} [(j+2)(j+1)c_{j+2} + (n-j)(n+j+1)c_j]x^j = 0$$

lo que implica que

$$n(n+1)c_0 + 2c_2 = 0$$
$$(n-1)(n+2)c_1 + 6c_3 = 0$$
$$(j+2)(j+1)c_{j+2} + (n-j)(n+j+1)c_j = 0$$

o

$$c_2 = -\frac{n(n+1)}{2!}c_0$$
$$c_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}c_1$$
$$c_{j+2} = -\frac{(n-j)(n+j+1)}{(j+2)(j+1)}c_j, \qquad j = 2, 3, 4, \ldots \tag{25}$$

Si se deja que j tome los valores 2, 3, 4, . . . , la relación de recurrencia (25) produce

$$c_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{4 \cdot 3}c_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}c_0$$
$$c_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{5 \cdot 4}c_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}c_1$$
$$c_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{6 \cdot 5}c_4 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}c_0$$
$$c_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{7 \cdot 6}c_5 = -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}c_1$$

etcétera. Entonces para al menos $|x| < 1$, se obtienen dos soluciones en serie de potencias linealmente independientes:

$$y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + \cdots\right]$$
$$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7 + \cdots\right]. \tag{26}$$

Observe que si n es un entero par, la primera serie termina, mientras que $y_2(x)$ es una serie infinita. Por ejemplo, si $n = 4$, entonces

$$y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{4 \cdot 5}{2!}x^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7}{4!}x^4\right] = c_0\left[1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4\right].$$

De manera similar, cuando n es un entero impar, la serie para $y_2(x)$ termina con x^n; es decir, *cuando n es un entero no negativo, obtenemos una solución polinomial de grado n de la ecuación de Legendre.*

Debido a que se sabe que un múltiplo constante de una solución de la ecuación de Legendre también es una solución, se acostumbra elegir valores específicos para c_0 y c_1, dependiendo de si n es un entero positivo par o impar, respectivamente. Para $n = 0$ elegimos $c_0 = 1$, y para $n = 2, 4, 6, \ldots$

$$c_0 = (-1)^{n/2}\frac{1 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdots n},$$

mientras que para $n = 1$ se elige $c_1 = 1$ y para $n = 3, 5, 7, \ldots$

$$c_1 = (-1)^{(n-1)/2}\frac{1 \cdot 3 \cdots n}{2 \cdot 4 \cdots (n-1)}.$$

Por ejemplo, cuando $n = 4$, se tiene

$$y_1(x) = (-1)^{4/2}\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\left[1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4\right] = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

POLINOMIOS DE LEGENDRE Estas soluciones polinomiales específicas de n-ésimo grado se llaman **polinomios de Legendre** y se denotan mediante $P_n(x)$. De las series para $y_1(x)$ y $y_2(x)$ y de las opciones anteriores de c_0 y c_1 se encuentra que los primeros polinomios de Legendre son

$$\begin{aligned} &P_0(x) = 1, && P_1(x) = x, \\ &P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), && P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ &P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), && P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned} \tag{27}$$

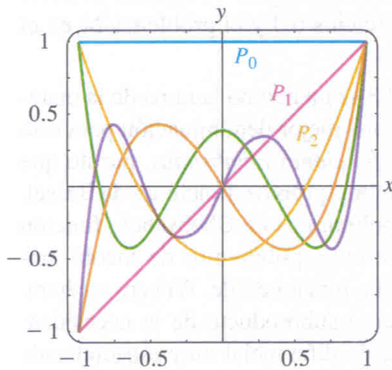


FIGURA 6.3.3 Polinomios de Legendre para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Recuerde que $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), \ldots$ son, a su vez, soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} n = 0: &\quad (1 - x^2)y'' - 2xy' = 0, \\ n = 1: &\quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \\ n = 2: &\quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0, \\ n = 3: &\quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0, \\ &\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned} \tag{28}$$

En la figura 6.3.3 se presentan las gráficas en el intervalo $[-1,1]$, de los seis polinomios de Legendre en (27).

PROPIEDADES Se recomienda que compruebe las siguientes propiedades usando los polinomios de Legendre en (27).

$$i)\ P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

$$ii)\ P_n(1) = 1 \qquad iii)\ P_n(-1) = (-1)^n$$

$$iv)\ P_n(0) = 0,\quad n \text{ impar}, \qquad v)\ P_n'(0) = 0,\quad n \text{ par}$$

La propiedad *i)* indica, como es evidente en la figura 6.3.3, que $P_n(x)$ es una función par o impar concordantemente con la condición de si n es par o impar.

RELACIÓN DE RECURRENCIA Las relaciones de recurrencia que vinculan polinomios de Legendre de diferentes grados también son importantes en algunos aspectos de sus aplicaciones. Se establece, sin comprobación, la relación de recurrencia de tres términos

$$(k + 1)P_{k+1}(x) - (2k + 1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0, \tag{29}$$

que es válida para $k = 1, 2, 3, \ldots$. En (27) se listan los primeros seis polinomios de Legendre. Si decimos que se desea encontrar $P_6(x)$, se puede usar la ecuación (29) con $k = 5$. Esta relación expresa $P_6(x)$ en términos de los conocidos $P_4(x)$ y $P_5(x)$. Véase el problema 45 de los ejercicios 6.3.

Otra fórmula, que aunque no es una relación de recurrencia, puede generar los polinomios de Legendre por derivación, es la **fórmula de Rodrigues** que, para estos polinomios es

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{30}$$

Véase el problema 48 de los ejercicios 6.3.

COMENTARIOS

i) Aunque se ha supuesto que el parámetro n en la ecuación diferencial de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$, representa un entero no negativo, en una forma más general n puede representar cualquier número real. Cualquier solución de la ecuación de Legendre se llama **función de Legendre**. Si n *no* es un entero no negativo, entonces ambas funciones de Legendre $y_1(x)$ y $y_2(x)$ dadas en (26) son series infinitas convergentes en el intervalo abierto $(-1, 1)$ y divergentes (sin límite) en $x = \pm 1$. Si n es un entero no negativo, entonces, como se ha visto, una de las funciones de Legendre en (26) es un polinomio y la otra es una serie infinita convergente para $-1 < x < 1$. Se debe tener presente que la ecuación de Legendre tiene soluciones que están acotadas en el intervalo *cerrado* $[-1, 1]$ sólo en el caso cuando $n = 0, 1, 2, \ldots$ Más concretamente, las únicas funciones de Legendre que están acotadas en el intervalo cerrado $[-1, 1]$ son los polinomios de Legendre $P_n(x)$ o múltiplos constantes de estos polinomios. Véase el problema 47 de los ejercicios 6.3 y el problema 24 en el Repaso del capítulo 6.

ii) En los *Comentarios* al final de la sección 2.3 se mencionó la rama de la matemática llamada **funciones especiales**. Quizá una mejor denominación para esta área de las matemáticas aplicadas podría ser *funciones nombradas*, puesto que muchas de las funciones estudiadas llevan nombres propios: funciones de Bessel, funciones de Legendre, funciones de Airy, polinomios de Chebyshev, función hipergeométrica de Gauss, polinomios de Hermite, polinomios de Jacobi, polinomios de Laguerre, funciones de Mathieu, funciones de Weber, etcétera. Históricamente, las funciones especiales fueron subproducto de la necesidad; alguien necesitaba una solución de una ecuación diferencial muy especializada que surgió de un intento por resolver un problema físico.

EJERCICIOS 6.3

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-10.

6.3.1 ECUACIÓN DE BESSEL

En los problemas 1 a 6 use la ecuación (1) para encontrar la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo $(0, \infty)$.

1. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$
2. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$
3. $4x^2y'' + 4xy' + (4x^2 - 25)y = 0$
4. $16x^2y'' + 16xy' + (16x^2 - 1)y = 0$
5. $xy'' + y' + xy = 0$
6. $\dfrac{d}{dx}[xy'] + \left(x - \dfrac{4}{x}\right)y = 0$

En los problemas 7 a 10, use la ecuación (12) para encontrar la solución general de la ecuación diferencial dada en $(0, \infty)$.

7. $x^2y'' + xy' + (9x^2 - 4)y = 0$
8. $x^2y'' + xy' + \left(36x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$
9. $x^2y'' + xy' + \left(25x^2 - \frac{4}{9}\right)y = 0$
10. $x^2y'' + xy' + (2x^2 - 64)y = 0$

En los problemas 11 y 12 use el cambio de variable indicado para determinar la solución general de la ecuación diferencial en $(0, \infty)$.

11. $x^2y'' + 2xy' + \alpha^2x^2y = 0; \quad y = x^{-1/2}v(x)$
12. $x^2y'' + \left(\alpha^2x^2 - \nu^2 + \frac{1}{4}\right)y = 0; \quad y = \sqrt{x}\,v(x)$

En los problemas 13 a 20 use la ecuación (18) para encontrar la solución general de la ecuación diferencial en $(0, \infty)$.

13. $xy'' + 2y' + 4y = 0$ **14.** $xy'' + 3y' + xy = 0$

15. $xy'' - y' + xy = 0$ **16.** $xy'' - 5y' + xy = 0$

17. $x^2y'' + (x^2 - 2)y = 0$

18. $4x^2y'' + (16x^2 + 1)y = 0$

19. $xy'' + 3y' + x^3y = 0$

20. $9x^2y'' + 9xy' + (x^6 - 36)y = 0$

21. Use la serie en (7) para comprobar que $I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix)$ es una función real.

22. Suponga que b en la ecuación (18) puede ser un número imaginario puro, es decir, $b = \beta i$, $\beta > 0$, $i^2 = -1$. Use esta suposición para expresar la solución general de la ecuación diferencial en términos de las funciones modificadas de Bessel I_n y K_n.

a) $y'' - x^2y = 0$ **b)** $xy'' + y' - 7x^3y = 0$

En los problemas 23 a 26, use primero la ecuación (18) para expresar la solución general de la ecuación diferencial en términos de funciones de Bessel. Luego use (23) y (24) para expresar la solución general en términos de funciones elementales.

23. $y'' + y = 0$

24. $x^2y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = 0$

25. $16x^2y'' + 32xy' + (x^4 - 12)y = 0$

26. $4x^2y'' - 4xy' + (16x^2 + 3)y = 0$

27. a) Proceda como en el ejemplo 5 para demostrar que

$$xJ'_\nu(x) = -\nu J_\nu(x) + xJ_{\nu-1}(x).$$

[*Sugerencia*: Escriba $2n + \nu = 2(n + \nu) - \nu$.]

b) Utilice el resultado del inciso a) para deducir (21).

28. Utilice la fórmula del ejemplo 5 junto con el inciso a) del problema 27 para deducir la relación de recurrencia.

$$2\nu J_\nu(x) = xJ_{\nu+1}(x) + xJ_{\nu-1}(x).$$

En los problemas 29 y 30 use la ecuación (20) o (21) para obtener el resultado dado.

29. $\int_0^x rJ_0(r)\,dr = xJ_1(x)$ **30.** $J'_0(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x)$

31. Proceda como en la página 247 para deducir la forma elemental de $J_{-1/2}(x)$ dada en (24).

32. a) Use la relación de recurrencia del problema 28 junto con (23) y (24) para expresar $J_{3/2}(x)$, $J_{-3/2}(x)$ y $J_{5/2}(x)$ en términos de sen x, cos x y potencias de x.

b) Use un programa de graficación para trazar $J_{1/2}(x)$, $J_{-1/2}(x)$, $J_{3/2}(x)$, $J_{-3/2}(x)$ y $J_{5/2}(x)$.

33. Use el cambio de variables $s = \dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,e^{-\alpha t/2}$ para demostrar que la ecuación diferencial del resorte envejecido $mx'' + ke^{-\alpha t}x = 0$, $\alpha > 0$, se convierte en

$$s^2\frac{d^2x}{ds^2} + s\frac{dx}{ds} + s^2x = 0.$$

34. Demuestre que $y = x^{1/2}w\left(\frac{2}{3}\alpha x^{3/2}\right)$ es una solución de la ecuación diferencial de Airy $y'' + \alpha^2xy = 0$, $x > 0$, siempre que w sea una solución de la ecuación de Bessel de orden $\frac{1}{3}$, es decir, $t^2w'' + tw' + \left(t^2 - \frac{1}{9}\right)w = 0$, $t > 0$. [*Sugerencia*: Después de derivar, sustituir y simplificar, entonces se hace $t = \frac{2}{3}\alpha x^{3/2}$.]

35. a) Use el resultado del problema 34 para expresar la solución general de la ecuación diferencial de Airy para $x > 0$ en términos de funciones de Bessel.

b) Compruebe los resultados del inciso a) usando la ecuación (18).

36. Use la tabla 6.1 para encontrar los primeros tres valores propios positivos y las funciones propias correspondientes del problema de valores en la frontera.

$$xy'' + y' + \lambda xy = 0,$$
$$y(x),\ y'(x) \text{ acotada conforme } x \to 0^+,\ y(2) = 0.$$

[*Sugerencia*: Identificando $\lambda = \alpha^2$, la ED es la ecuación de Bessel paramétrica de orden cero.]

37. a) Use la ecuación (18) para demostrar que la solución general de la ecuación diferencial $xy'' + \lambda y = 0$ en el intervalo $(0,\infty)$ es

$$y = c_1\sqrt{x}J_1\left(2\sqrt{\lambda x}\right) + c_2\sqrt{x}Y_1\left(2\sqrt{\lambda x}\right).$$

b) Compruebe por sustitución directa que $y = \sqrt{x}J_1\left(2\sqrt{x}\right)$ es una solución particular de la ED en el caso $\lambda = 1$.

Tarea para el laboratorio de computación

38. Use un SAC para trazar las gráficas de las funciones modificadas de Bessel $I_0(x)$, $I_1(x)$, $I_2(x)$ y $K_0(x)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$. Compare estas gráficas con las que se muestran en las figuras 6.3.1 y 6.3.2. ¿Qué diferencia principal es evidente entre las funciones de Bessel y las funciones modificadas de Bessel?

39. a) Use la solución general dada en el ejemplo 4 para resolver el PVI

$$4x'' + e^{-0.1t}x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -\tfrac{1}{2}.$$

También use $J'_0(x) = -J_1(x)$ y $Y'_0(x) = -Y_1(x)$ junto con la tabla 6.1 o un SAC para evaluar los coeficientes.

b) Use un SAC para trazar la gráfica de la solución obtenida en el inciso a) en el intervalo $0 \le t \le \infty$.

40. **a)** Use la solución general obtenida en el problema 35 para resolver el PVI

$$4x'' + tx = 0, \quad x(0.1) = 1, \quad x'(0.1) = -\tfrac{1}{2}.$$

Use un SAC para evaluar los coeficientes.

b) Use un SAC para trazar la gráfica de la solución obtenida en el inciso a) en el intervalo $0 \leq t \leq 200$.

41. Columna doblada bajo su propio peso Una columna delgada uniforme de longitud L, colocada verticalmente con un extremo insertado en el suelo, se curva desde la vertical bajo la influencia de su propio peso cuando su longitud o altura excede un cierto valor crítico. Se puede demostrar que la deflexión angular $\theta(x)$ de la columna desde la vertical en un punto $P(x)$ es una solución del problema con valores en la frontera:

$$EI\frac{d^2\theta}{dx^2} + \delta g(L - x)\theta = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta'(L) = 0,$$

donde E es el módulo de Young, I es el momento de inercia de sección transversal, δ es la densidad lineal constante y x es la distancia a lo largo de la columna medida desde su base. Véase la figura 6.3.4. La columna se dobla sólo para aquellos valores de L para los que el problema con valores en la frontera tiene una solución no trivial.

a) Establezca de nuevo el problema con valores en la frontera haciendo el cambio de variables $t = L - x$. Luego utilice los resultados del problema anterior en este conjunto de ejercicios para expresar la solución general de la ecuación diferencial en términos de funciones de Bessel.

b) Use la solución general encontrada en el inciso a) para encontrar una solución del PVF y una ecuación que defina la longitud crítica L, es decir, el valor más pequeño de L para la que se comience a doblar la columna.

c) Con ayuda de un SAC, encuentre la longitud L de una varilla de acero sólida de radio $r = 0.05$ pulg, $\delta g = 0.28\,A$ lb/pulg, $E = 2.6 \times 10^7$ lb/pulg², $A = \pi r^2$ e $I = \frac{1}{4}\pi r^4$.

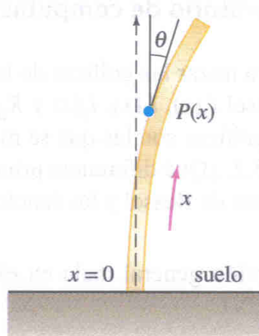


FIGURA 6.3.4 Viga del problema 41.

42. Pandeo de una columna vertical delgada En el ejemplo 3 de la sección 5.2 vimos que cuando se aplica una fuerza compresiva vertical constante o carga P a una columna delgada de sección transversal uniforme y abisagrada en ambos extremos, la deflexión $y(x)$ es una solución del PVF:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

a) Si el factor de rigidez a la flexión EI es proporcional a x, entonces $EI(x) = kx$, donde k es una constante de proporcionalidad. Si $EI(L) = kL = M$ es el factor de rigidez máxima entonces $k = M/L$ y, por tanto, $EI(x) = Mx/L$. Use la información del problema 37 para encontrar una solución de

$$M\frac{x}{L}\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

si se sabe que $\sqrt{x}Y_1(2\sqrt{\lambda x})$ *no* es cero en $x = 0$.

b) Use la tabla 6.1 para encontrar la carga de Euler P_1 para la columna.

c) Use un SAC para graficar el primer modo de pandeo $y_1(x)$ correspondiente a la carga de Euler P_1. Por simplicidad suponga que $c_1 = 1$ y $L = 1$.

43. Péndulo de longitud variable Para el péndulo simple descrito en la página 209 de la sección 5.3, suponga que la varilla que sostiene la masa m en un extremo se sustituye por un alambre flexible o cuerda y que el alambre pasa por una polea en el punto de apoyo O en la figura 5.3.3. De esta manera, mientras está en movimiento en el plano vertical la masa m puede subir o bajar. En otras palabras, la longitud $l(t)$ del péndulo varía con el tiempo. Bajo las mismas suposiciones que conducen a la ecuación (6) en la sección 5.3, se puede demostrar* que la ecuación diferencial para el ángulo de desplazamiento θ ahora es

$$l\theta'' + 2l'\theta' + g\,\mathrm{sen}\,\theta = 0.$$

a) Si l aumenta a una razón constante v y si $l(0) = l_0$, demuestre que una linealización de la ED anterior es

$$(l_0 + vt)\theta'' + 2v\theta' + g\theta = 0. \tag{31}$$

b) Realice el cambio de variables $x = (l_0 + vt)/v$ y demuestre que la ecuación (31) se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d\theta}{dx} + \frac{g}{vx}\theta = 0.$$

c) Use el inciso b) y la ecuación (18) para expresar la solución general de la ecuación (31) en términos de funciones de Bessel.

d) Use la solución general del inciso c) para resolver el problema con valores iniciales que consiste en la ecuación (31) y las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = 0$. [*Sugerencias*: para simplificar los cálculos, use un cambio de variable adicional

$$u = \frac{2}{v}\sqrt{g(l_0 + vt)} = 2\sqrt{\frac{g}{v}}\,x^{1/2}.$$

*Véase *Mathematical Methods in Physical Sciences*, Mary Boas, John Wiley & Sons, Inc., 1966. También vea el artículo de Borelli, Coleman and Hobson en *Mathematicas Magazine*, vol. 58, núm. 2, marzo de 1985.

Además, recuerde que la ecuación (20) vale para $J_1(u)$ y $Y_1(u)$. Por último, la identidad

$$J_1(u)Y_2(u) - J_2(u)Y_1(u) = -\frac{2}{\pi u} \text{ será muy útil].}$$

e) Use un SAC para trazar la gráfica de la solución $\theta(t)$ del PVI del inciso d) cuando $l_0 = 1$ pie, $\theta_0 = \frac{1}{10}$ radián y $v = \frac{1}{60}$ pie/s. Experimente con la gráfica usando diferentes intervalos de tiempo, como [0, 10], [0, 30], etcétera.

f) ¿Qué indican las gráficas acerca del ángulo de desplazamiento $\theta(t)$ cuando la longitud l del alambre se incrementa con el tiempo?

6.3.2 ECUACIÓN DE LEGENDRE

44. a) Use las soluciones explícitas $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ecuación de Legendre dada en (26) y la elección apropiada de c_0 y c_1 para encontrar los polinomios de Legendre $P_6(x)$ y $P_7(x)$.

b) Escriba las ecuaciones diferenciales para las cuales $P_6(x)$ y $P_7(x)$ son soluciones particulares.

45. Use la relación de recurrencia (29) y $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, para generar los siguientes seis polinomios de Legendre.

46. Demuestre que la ecuación diferencial

$$\operatorname{sen}\theta\,\frac{d^2y}{d\theta^2} + \cos\theta\,\frac{dy}{d\theta} + n(n+1)(\operatorname{sen}\theta)y = 0$$

puede convertirse en la ecuación de Legendre por medio de la sustitución $x = \cos\theta$.

47. Encuentre los primeros tres valores positivos de λ para los cuales el problema

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y(x),\ y'(x) \text{ está acotada en } [-1,1]$$

tiene soluciones no triviales.

Tarea para el laboratorio de computación

48. En la realización de este problema, ignore la lista de polinomios de Legendre que se presenta en la página 249 y las gráficas de la figura 6.3.3. Use la fórmula de Rodrigues (30) para generar los polinomios de Legendre $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_7(x)$. Use un SAC para realizar las derivadas y las simplificaciones.

49. Use un SAC para trazar las gráficas de $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_7(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$.

50. Use un programa de cálculo de raíces para determinar las raíces de $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_7(x)$. Si los polinomios de Legendre son funciones incorporadas en su SAC, encuentre los polinomios de Legendre de grado superior. Haga una suposición acerca de la localización de las raíces de algún polinomio de Legendre $P_n(x)$ y luego investigue si es verdad.

REPASO DEL CAPÍTULO 6

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-10.

En los problemas 1 y 2 conteste falso o verdadero sin consultar de nuevo el texto.

1. La solución general de $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$ es $y = c_1J_1(x) + c_2J_{-1}(x)$. ____________

2. Debido a que $x = 0$ es un punto singular irregular de $x^3y'' - xy' + y = 0$, la ED no tiene solución que sea analítica en $x = 0$. ____________

3. ¿En *cuál* de los siguientes intervalos se garantiza que convergen para toda x ambas soluciones en serie de potencias de $y'' + \ln(x + 1)y' + y = 0$ centradas en el punto ordinario $x = 0$?

a) $(-\infty, \infty)$ b) $(-1, \infty)$

c) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ d) $[-1, 1]$

4. $x = 0$ es un punto ordinario de cierta ecuación diferencial lineal. Después que se sustituye la solución supuesta $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ en la ED, se obtiene el siguiente sistema algebraico cuando los coeficientes de x^0, x^1, x^2 y x^3 se igualan a cero:

$$2c_2 + 2c_1 + c_0 = 0$$

$$6c_3 + 4c_2 + c_1 = 0$$

$$12c_4 + 6c_3 + c_2 - \tfrac{1}{3}c_1 = 0$$

$$20c_5 + 8c_4 + c_3 - \tfrac{2}{3}c_2 = 0.$$

Teniendo en mente que c_0 y c_1 son constantes arbitrarias, escriba los primeros cinco términos de dos series de potencias que son solución de la ecuación diferencial.

5. Suponga que se sabe que la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - 4)^k$ converge en -2 y diverge en 13. Analice si la serie converge en -7, 0, 7, 10 y 11. Las respuestas posibles son *si*, *no*, *podría*.

6. Use la serie de Maclaurin para sen x y cos x junto con la división larga para encontrar los primeros tres términos diferentes de cero de una serie de potencias en x para la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

En los problemas 7 y 8 construya una ecuación diferencial lineal de segundo orden que tenga las propiedades dadas.

7. Un punto singular regular en $x = 1$ y un punto singular irregular en $x = 0$.

8. Puntos singulares regulares en $x = 1$ y en $x = -3$.

En los problemas 9 a 14 use un método de series infinitas apropiado respecto a $x = 0$ para encontrar dos soluciones de la ecuación diferencial dada.

9. $2xy'' + y' + y = 0$ **10.** $y'' - xy' - y = 0$

11. $(x-1)y'' + 3y = 0$ **12.** $y'' - x^2y' + xy = 0$

13. $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$ **14.** $(\cos x)y'' + y = 0$

En los problemas 15 y 16, resuelva el problema con valores iniciales dado.

15. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = -2$

16. $(x+2)y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

17. Sin realmente resolver la ecuación diferencial $(1 - 2\operatorname{sen} x)y'' + xy = 0$, encuentre un límite inferior para el radio de convergencia de las soluciones en serie de potencias respecto al punto ordinario $x = 0$.

18. Aunque $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial, explique por qué no es una buena idea tratar de encontrar una solución del PVI

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(1) = -6, \quad y'(1) = 3$$

de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Por medio de series de potencias, determine una mejor forma de resolver el problema.

En los problemas 19 y 20, investigue si $x = 0$ es un punto ordinario, singular o singular irregular de la ecuación diferencial dada. [*Sugerencia*: Recuerde la serie de Maclaurin para cos x y e^x.]

19. $xy'' + (1 - \cos x)y' + x^2y = 0$

20. $(e^x - 1 - x)y'' + xy = 0$

21. Observe que $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial $y'' + x^2y' + 2xy = 5 - 2x + 10x^3$. Use la suposición $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para encontrar la solución general $y = y_c + y_p$ que consiste en tres series de potencias centradas en $x = 0$.

22. La ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = x^2 + y^2$ no se puede resolver en términos de funciones elementales. Sin embargo, una solución se puede expresar en términos de funciones de Bessel.

a) Demuestre que la sustitución $y = -\dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$ conduce a la ecuación $u'' + x^2u = 0$.

b) Use la ecuación (18) de la sección 6.3 para encontrar la solución general de $u'' + x^2u = 0$.

c) Use las ecuaciones (20) y (21) de la sección 6.3 en las formas

$$J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$$

$$\text{y} \quad J'_\nu(x) = -\frac{\nu}{x}J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x)$$

como ayuda para demostrar que una familia uniparamétrica de soluciones de $dy/dx = x^2 + y^2$ está dada por

$$y = x\,\frac{J_{3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - cJ_{-3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{cJ_{1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + J_{-1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}.$$

23. a) Use las ecuaciones (23) y (24) de la sección 6.3 para demostrar que

$$Y_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

b) Use la ecuación (15) de la sección 6.3 para demostrar que

$$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{senh} x \quad \text{y} \quad I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cosh x.$$

c) Use el inciso b) para demostrar que

$$K_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}.$$

24. a) De las ecuaciones (27) y (28) de la sección 6.3 se sabe que cuando $n = 0$, la ecuación diferencial de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0$ tiene la solución polinomial $y = P_0(x) = 1$. Use la ecuación (5) de la sección 4.2 para demostrar que una segunda función de Legendre que satisface la ED en el intervalo $-1 < x < 1$ es

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

b) También sabemos de las ecuaciones (27) y (28) de la sección 6.3 que cuando $n = 1$ la ecuación diferencial de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ tiene la solución polinomial $y = P_1(x) = x$. Use la ecuación (5) de la sección 4.2 para demostrar que una segunda función de Legendre que satisface la ED en el intervalo $-1 < x < 1$ es

$$y = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1.$$

c) Use un programa de graficación para trazar las funciones de Legendre logarítmicas dadas en los incisos a) y b).

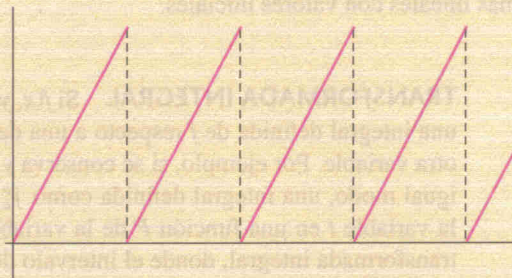
25. a) Use series binomiales para mostrar formalmente que

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

b) Use el resultado obtenido en el inciso a) para demostrar que $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$. Véanse las propiedades *ii)* y *iii)* de la página 249.

7

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE



En los modelos matemáticos lineales para sistemas físicos tales como un sistema resorte/masa o un circuito eléctrico en serie, el miembro del lado derecho o entrada, de las ecuaciones diferenciales

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t) \qquad \text{o} \qquad L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

es una función de conducción y representa ya sea una fuerza externa $f(t)$ o un voltaje aplicado $E(t)$. En la sección 5.1 consideramos problemas en los que las funciones f y E eran continuas. Sin embargo, las funciones de conducción discontinuas son comunes. Por ejemplo, el voltaje aplicado a un circuito podría ser continuo en tramos y periódico tal como la función "diente de sierra" que se muestra arriba. En este caso, resolver la ecuación diferencial del circuito es difícil usando las técnicas del capítulo 4. La transformada de Laplace que se estudia en este capítulo es una valiosa herramienta que simplifica la solución de problemas como éste.

7.1 DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

REPASO DE MATERIAL

- Integrales impropias con límites de integración infinitos.
- Descomposición en fracciones parciales.

INTRODUCCIÓN En cálculo elemental aprendió que la derivación y la integración son *transformadas*; esto significa, a grandes rasgos, que estas operaciones transforman una función en otra. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ se transforma, a su vez, en una función lineal y en una familia de funciones polinomiales cúbicas con las operaciones de derivación e integración:

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x \qquad \text{y} \qquad \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c.$$

Además, estas dos transformadas tienen la **propiedad de linealidad** tal que la transformada de una combinación lineal de funciones es una combinación lineal de las transformadas. Para α y β constantes

$$\frac{d}{dx}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

y

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

siempre que cada derivada e integral exista. En esta sección se examina un tipo especial de transformada integral llamada **transformada de Laplace**. Además de tener la propiedad de linealidad, la transformada de Laplace tiene muchas otras propiedades interesantes que la hacen muy útil para resolver problemas lineales con valores iniciales.

TRANSFORMADA INTEGRAL Si $f(x, y)$ es una función de dos variables, entonces una integral definida de f respecto a una de las variables conduce a una función de la otra variable. Por ejemplo, si se conserva y constante, se ve que $\int_1^2 2xy^2\,dx = 3y^2$. De igual modo, una integral definida como $\int_a^b K(s, t)\,f(t)\,dt$ transforma una función f de la variable t en una función F de la variable s. Tenemos en particular interés en una transformada integral, donde el intervalo de integración es el intervalo no acotado $[0, \infty)$. Si $f(t)$ se define para $t \geq 0$, entonces la integral impropia $\int_0^\infty K(s, t)\,f(t)\,dt$ se define como un límite:

$$\int_0^\infty K(s, t)\,f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b K(s, t)\,f(t)\,dt. \tag{1}$$

Si existe el límite en (1), entonces se dice que la integral existe o es **convergente**; si no existe el límite, la integral no existe y es **divergente**. En general, el límite en (1) existirá sólo para ciertos valores de la variable s.

UNA DEFINICIÓN La función $K(s, t)$ en (1) se llama **kernel** o **núcleo** de la transformada. La elección de $K(s, t) = e^{-st}$ como el núcleo nos proporciona una transformada integral especialmente importante.

DEFINICIÓN 7.1.1 Transformada de Laplace

Sea f una función definida para $t \geq 0$. Entonces se dice que la integral

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \tag{2}$$

es la **transformada de Laplace** de f, siempre que la integral converja.

Cuando la integral de la definición (2) converge, el resultado es una función de s. En el análisis general se usa una letra minúscula para denotar la función que se transforma y la letra mayúscula correspondiente para denotar su transformada de Laplace, por ejemplo,

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s), \qquad \mathscr{L}\{g(t)\} = G(s), \qquad \mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s).$$

EJEMPLO 1 Aplicando la definición 7.1.1

Evalúe $\mathscr{L}\{1\}$.

SOLUCIÓN De (2),

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\,dt$$
$$= \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-st}}{s}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-sb}+1}{s} = \frac{1}{s}$$

siempre que $s > 0$. En otras palabras, cuando $s > 0$, el exponente $-sb$ es negativo y $e^{-sb} \to 0$ conforme $b \to \infty$. La integral diverge para $s < 0$. ■

El uso del signo de límite se vuelve un poco tedioso, por lo que se adopta la notación $|_0^\infty$ como abreviatura para escribir $\lim_{b\to\infty}(\ )|_0^b$. Por ejemplo,

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt = \frac{-e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}, \qquad s > 0.$$

En el límite superior, se sobreentiende lo que significa $e^{-st} \to 0$ conforme $t \to \infty$ para $s > 0$.

EJEMPLO 2 Aplicando la definición 7.1.1

Evalúe $\mathscr{L}\{t\}$.

SOLUCIÓN De la definición 7.1.1 se tiene $\mathscr{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}\,t\,dt$. Al integrar por partes y usando $\lim_{t\to\infty} te^{-st} = 0$, $s > 0$, junto con el resultado del ejemplo 1, se obtiene

$$\mathscr{L}\{t\} = \frac{-te^{-st}}{s}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}.$$

■

EJEMPLO 3 Aplicando la definición 7.1.1

Evalúe $\mathscr{L}\{e^{-3t}\}$.

SOLUCIÓN De la definición 7.1.1 se tiene

$$\mathscr{L}\{e^{-3t}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{-3t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+3)t}\,dt$$
$$= \frac{-e^{-(s+3)t}}{s+3}\Big|_0^\infty$$
$$= \frac{1}{s+3}, \qquad s > -3.$$

El resultado se deduce del hecho de que $\lim_{t\to\infty} e^{-(s+3)t} = 0$ para $s + 3 > 0$ o $s > -3$. ■

EJEMPLO 4 Aplicando la definición 7.1.1

Evalúe $\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\}$.

SOLUCIÓN De la definición 7.1.1 e integrando por partes se tiene que

$$\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\} = \int_0^\infty e^{-st} \text{sen } 2t \, dt = \frac{-e^{-st} \text{sen } 2t}{s} \bigg|_0^\infty + \frac{2}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos 2t \, dt$$

$$= \frac{2}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos 2t \, dt, \qquad s > 0$$

$\lim_{t \to \infty} e^{-st} \cos 2t = 0,\ s > 0$ ↓ Transformada de Laplace de sen $2t$ ↓

$$= \frac{2}{s}\left[\frac{-e^{-st} \cos 2t}{s} \bigg|_0^\infty - \frac{2}{s} \int_0^\infty e^{-st} \text{sen } 2t \, dt\right]$$

$$= \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2} \mathscr{L}\{\text{sen } 2t\}.$$

En este punto se tiene una ecuación con $\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\}$ en ambos lados de la igualdad. Si se despeja esa cantidad el resultado es

$$\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4}, \qquad s > 0.$$

■

$\mathscr{L}$ ES UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL Para una combinación lineal de funciones podemos escribir

$$\int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)] \, dt = \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t) \, dt$$

siempre que ambas integrales converjan para $s > c$. Por lo que se tiene que

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathscr{L}\{f(t)\} + \beta \mathscr{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s). \tag{3}$$

Como resultado de la propiedad dada en (3), se dice que $\mathscr{L}$ es una **transformación lineal**. Por ejemplo, de los ejemplos 1 y 2

$$\mathscr{L}\{1 + 5t\} = \mathscr{L}\{1\} + 5\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s} + \frac{5}{s^2},$$

y de los ejemplos 3 y 4

$$\mathscr{L}\{4e^{-3t} - 10 \text{ sen } 2t\} = 4\mathscr{L}\{e^{-3t}\} - 10\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\} = \frac{4}{s + 3} - \frac{20}{s^2 + 4}.$$

Se establece la generalización de algunos ejemplos anteriores por medio del siguiente teorema. A partir de este momento se deja de expresar cualquier restricción en s; se sobreentiende que s está lo suficientemente restringida para garantizar la convergencia de la adecuada transformada de Laplace.

TEOREMA 7.1.1 Transformada de algunas funciones básicas

a) $\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$

b) $\mathscr{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s - a}$

d) $\mathscr{L}\{\text{sen } kt\} = \dfrac{k}{s^2 + k^2}$

e) $\mathscr{L}\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2 + k^2}$

f) $\mathscr{L}\{\text{senh } kt\} = \dfrac{k}{s^2 - k^2}$

g) $\mathscr{L}\{\cosh kt\} = \dfrac{s}{s^2 - k^2}$

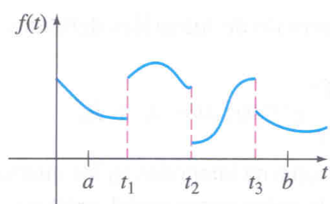


FIGURA 7.1.1 Función continua por tramos.

CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE $\mathscr{L}\{f(t)\}$ La integral que define la transformada de Laplace no tiene que converger. Por ejemplo, no existe $\mathscr{L}\{1/t\}$ ni $\mathscr{L}\{e^{t^2}\}$. Las condiciones suficientes que garantizan la existencia de $\mathscr{L}\{f(t)\}$ son que f sea continua por tramos en $[0,\infty)$ y que f sea de orden exponencial para $t > T$. Recuerde que la función es **continua por tramos** en $[0,\infty)$ si, en cualquier intervalo $0 \le a \le t \le b$, hay un número finito de puntos t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ $(t_{k-1} < t_k)$ en los que f tiene discontinuidades finitas y es continua en cada intervalo abierto (t_{k-1}, t_k). Vea la figura 7.1.1. El concepto de **orden exponencial** se define de la siguiente manera.

DEFINICIÓN 7.1.2 Orden exponencial

Se dice que f es de **orden exponencial** c si existen constantes c, $M > 0$ y $T > 0$ tales que $|f(t)| \le Me^{ct}$ para toda $t > T$.

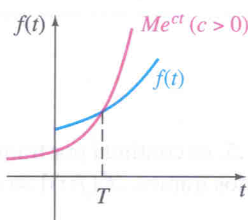


FIGURA 7.1.2 f es de orden exponencial c.

Si f es una función *creciente*, entonces la condición $|f(t)| \le Me^{ct}$, $t > T$, simplemente establece que la gráfica de f en el intervalo (T, ∞) no crece más rápido que la gráfica de la función exponencial Me^{ct}, donde c es una constante positiva. Vea la figura 7.1.2. Las funciones $f(t) = t$, $f(t) = e^{-t}$ y $f(t) = 2\cos t$ son de orden exponencial $c = 1$ para $t > 0$ puesto que se tiene, respectivamente,

$$|t| \le e^t, \quad |e^{-t}| \le e^t, \quad \text{y} \quad |2\cos t| \le 2e^t.$$

Una comparación de las gráficas en el intervalo $(0, \infty)$ se muestra en la figura 7.1.3.

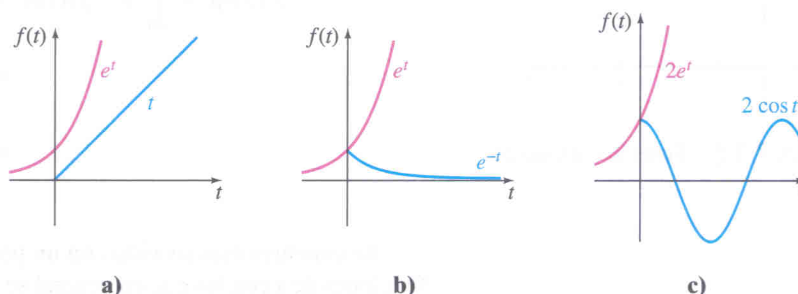


FIGURA 7.1.3 Tres funciones de orden exponencial $c = 1$.

Una función como $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial puesto que, como se muestra en la figura 7.1.4, su gráfica crece más rápido que cualquier potencia lineal positiva de e para $t > c > 0$.

Un exponente entero positivo de t siempre es de orden exponencial puesto que, para $c > 0$,

$$|t^n| \le Me^{ct} \quad \text{o} \quad \left|\frac{t^n}{e^{ct}}\right| \le M \quad \text{para} \quad t > T$$

es equivalente a demostrar que el $\lim_{t\to\infty} t^n/e^{ct}$ es finito para $n = 1, 2, 3, \ldots$ El resultado se deduce con n aplicaciones de la regla de L'Hôpital.

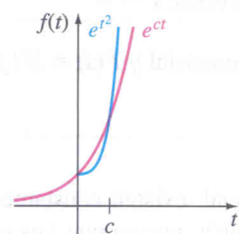


FIGURA 7.1.4 e^{t^2} no es de orden exponencial.

TEOREMA 7.1.2 Condiciones suficientes para la existencia

Si f es una función continua por tramos en $[0,\infty)$ y de orden exponencial c, entonces $\mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$.

DEMOSTRACIÓN Por la propiedad aditiva del intervalo de integrales definidas podemos escribir

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt = I_1 + I_2.$$

La integral I_1 existe ya que se puede escribir como la suma de integrales en los intervalos en los que $e^{-st}f(t)$ es continua. Ahora puesto que f es de orden exponencial, existen constantes c, $M > 0$, $T > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t > T$. Entonces podemos escribir

$$|I_2| \leq \int_T^\infty |e^{-st} f(t)|\,dt \leq M\int_T^\infty e^{-st}e^{ct}dt = M\int_T^\infty e^{-(s-c)t}dt = M\frac{e^{-(s-c)T}}{s-c}$$

para $s > c$. Puesto que $\int_T^\infty Me^{-(s-c)t}\,dt$ converge, la integral $\int_T^\infty |e^{-st} f(t)|\,dt$ converge por la prueba de comparación para integrales impropias. Esto, a su vez, significa que I_2 existe para $s > c$. La existencia de I_1 e I_2 implica que existe $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ para $s > c$. ■

EJEMPLO 5 Transformada de una función continua por tramos

Evalúe $\mathscr{L}\{f(t)\}$ donde $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3 \\ 2, & t \geq 3. \end{cases}$

SOLUCIÓN La función que se muestra en la figura 7.1.5, es continua por tramos y de orden exponencial para $t > 0$. Puesto que f se define en dos tramos, $\mathscr{L}\{f(t)\}$ se expresa como la suma de dos integrales:

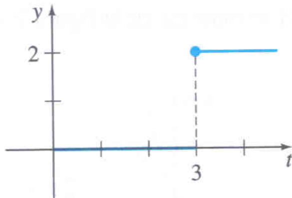


FIGURA 7.1.5 Función continua por tramos.

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^3 e^{-st}(0)\,dt + \int_3^\infty e^{-st}(2)\,dt$$

$$= 0 + \left.\frac{2e^{-st}}{-s}\right|_3^\infty$$

$$= \frac{2e^{-3s}}{s}, \qquad s > 0.$$ ■

Se concluye esta sección con un poco más de teoría relacionada con los tipos de funciones de s con las que en general se estará trabajando. El siguiente teorema indica que no toda función arbitraria de s es una transformada de Laplace de una función continua por tramos de orden exponencial.

TEOREMA 7.1.3 Comportamiento de $F(s)$ conforme $s \to \infty$

Si f es continua por partes en $(0, \infty)$ y de orden exponencial y $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, entonces el $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Puesto que f es de orden exponencial, existen constantes γ, $M_1 > 0$ y $T > 0$ tales que $|f(t)| \leq M_1e^{\gamma t}$ para $t > T$. También, puesto que f es continua por tramos en el intervalo $0 \leq t \leq T$, está necesariamente acotada en el intervalo; es decir, $|f(t)| \leq M_2 = M_2e^{0t}$ Si M denota el máximo del conjunto $\{M_1, M_2\}$ y c denota el máximo de $\{0, \gamma\}$, entonces

$$|F(s)| \leq \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt \leq M\int_0^\infty e^{-st}e^{ct}\,dt = M\int_0^\infty e^{-(s-c)t}\,dt = \frac{M}{s-c}$$

para $s > c$. Conforme $s \to \infty$, se tiene $|F(s)| \to 0$ y por tanto $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} \to 0$. ■

COMENTARIOS

i) En este capítulo nos dedicaremos principalmente a funciones que son continuas por tramos y de orden exponencial. Sin embargo, se observa que estas dos condiciones son suficientes pero no necesarias para la existencia de la transformada de Laplace. La función $f(t) = t^{-1/2}$ no es continua por tramos en el intervalo $[0, \infty)$, pero existe su transformada de Laplace. Vea el problema 42 en los ejercicios 7.1.

ii) Como consecuencia del teorema 7.1.3 se puede decir que las funciones de s como $F_1(s) = 1$ y $F_2(s) = s/(s + 1)$ no son las transformadas de Laplace de funciones continuas por tramos de orden exponencial, puesto que $F_1(s) \not\to 0$ y $F_2(s) \not\to 0$ conforme $s \to \infty$. Pero no se debe concluir de esto que $F_1(s)$ y $F_2(s)$ *no* son transformadas de Laplace. Hay otras clases de funciones.

EJERCICIOS 7.1

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-10.

En los problemas 1 a 18 use la definición 7.1 para encontrar $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

1. $f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} 4, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$

4. $f(t) = \begin{cases} 2t + 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$

5. $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$

6. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi/2 \\ \cos t, & t \ge \pi\ 2 \end{cases}$

7.

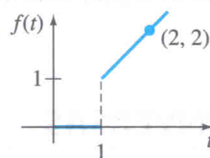


FIGURA 7.1.6 Gráfica para el problema 7.

8.

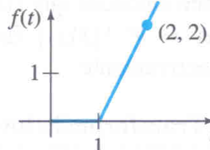


FIGURA 7.1.7 Gráfica para el problema 8.

9.

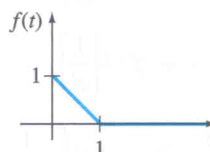


FIGURA 7.1.8 Gráfica para el problema 9.

10.

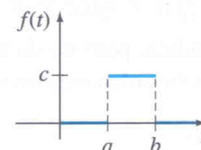


FIGURA 7.1.9 Gráfica para el problema 10.

11. $f(t) = e^{t+7}$

12. $f(t) = e^{-2t-5}$

13. $f(t) = te^{4t}$

14. $f(t) = t^2e^{-2t}$

15. $f(t) = e^{-t} \operatorname{sen} t$

16. $f(t) = e^t \cos t$

17. $f(t) = t \cos t$

18. $f(t) = t \operatorname{sen} t$

En los problemas 19 a 36 use el teorema 7.1.1 para encontrar $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

19. $f(t) = 2t^4$

20. $f(t) = t^5$

21. $f(t) = 4t - 10$

22. $f(t) = 7t + 3$

23. $f(t) = t^2 + 6t - 3$

24. $f(t) = -4t^2 + 16t + 9$

25. $f(t) = (t + 1)^3$

26. $f(t) = (2t - 1)^3$

27. $f(t) = 1 + e^{4t}$

28. $f(t) = t^2 - e^{-9t} + 5$

29. $f(t) = (1 + e^{2t})^2$

30. $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$

31. $f(t) = 4t^2 - 5 \operatorname{sen} 3t$

32. $f(t) = \cos 5t + \operatorname{sen} 2t$

33. $f(t) = \operatorname{senh} kt$

34. $f(t) = \cosh kt$

35. $f(t) = e^t \operatorname{senh} t$

36. $f(t) = e^{-t} \cosh t$

En los problemas 37 a 40 encuentre $\mathscr{L}\{f(t)\}$ usando primero una identidad trigonométrica.

37. $f(t) = \operatorname{sen} 2t \cos 2t$

38. $f(t) = \cos^2 t$

39. $f(t) = \operatorname{sen}(4t + 5)$

40. $f(t) = 10 \cos\left(t - \dfrac{\pi}{6}\right)$

41. Una definición de la **función gamma** está dada por la integral impropia $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt,\ \alpha > 0$.

a) Demuestre que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

b) Demuestre que $\mathscr{L}\{t^\alpha\} = \dfrac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1.$

42. Use el hecho de que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ y el problema 41 para encontrar la transformada de Laplace de

a) $f(t) = t^{-1/2}$ **b)** $f(t) = t^{1/2}$ **c)** $f(t) = t^{3/2}$.

Problemas para analizar

43. Construya una función $F(t)$ que sea de orden exponencial pero donde $f(t) = F'(t)$ no sea de orden exponencial. Construya una función f que no sea de orden exponencial, pero cuya transformada de Laplace exista.

44. Suponga que $\mathscr{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ para $s > c_1$ y que $\mathscr{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$ para $s > c_2$. ¿Cuándo

$$\mathscr{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)?$$

45. La figura 7.1.4 indica, pero no demuestra, que la función $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial. ¿Cómo demuestra la observación de que $t^2 > \ln M + ct$, para $M > 0$ y t suficientemente grande, que $e^{t^2} > Me^{ct}$ para cualquier c?

46. Utilice el inciso c) del teorema 7.1.1 para demostrar que $\mathscr{L}\{e^{(a+ib)t}\} = \dfrac{s - a + ib}{(s - a)^2 + b^2}$, donde a y b son reales e $i^2 = -1$. Demuestre cómo se puede usar la fórmula de Euler (página 134) para deducir los resultados

$$\mathscr{L}\{e^{at}\cos bt\} = \frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$$

$$\mathscr{L}\{e^{at}\operatorname{sen} bt\} = \frac{b}{(s - a)^2 + b^2}.$$

47. ¿Bajo qué condiciones es una función lineal $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$, una transformada lineal?

48. La demostración del inciso b) del teorema 7.1.1 requiere el uso de la inducción matemática. Demuestre que si se *supone* que $\mathscr{L}\{t^{n-1}\} = (n - 1)!/s^n$ es cierta, entonces se deduce que $\mathscr{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}$.

7.2 TRANSFORMADAS INVERSAS Y TRANSFORMADAS DE DERIVADAS

REPASO DE MATERIAL

- Descomposición en fracciones parciales

INTRODUCCIÓN En esta sección se dan algunos pasos hacia un estudio de cómo se puede usar la transformada de Laplace para resolver ciertos tipos de ecuaciones para una función desconocida. Se empieza el análisis con el concepto de transformada de Laplace inversa o, más exactamente, la inversa de una transformada de Laplace $F(s)$. Después de algunos antecedentes preliminares importantes sobre la transformada de Laplace de derivadas $f'(t), f''(t), \ldots$, se ilustra cómo entran en juego la transformada de Laplace y la transformada de Laplace inversa para resolver ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias sencillas.

7.2.1 TRANSFORMADAS INVERSAS

EL PROBLEMA INVERSO Si $F(s)$ representa la transformada de Laplace de una función $f(t)$, es decir, $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, se dice entonces que $f(t)$ es la **transformada de Laplace inversa** de $F(s)$ y se escribe $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$. En el caso de los ejemplos 1, 2 y 3 de la sección 7.1 tenemos, respectivamente

Transformada	Transformada inversa
$\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$	$1 = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}$
$\mathscr{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$	$t = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\}$
$\mathscr{L}\{e^{-3t}\} = \dfrac{1}{s + 3}$	$e^{-3t} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s + 3}\right\}$

Pronto veremos que en la aplicación de la transformada de Laplace a ecuaciones no se puede determinar de manera directa una función desconocida $f(t)$; más bien, se puede despejar la transformada de Laplace $F(s)$ o $f(t)$; pero a partir de ese conocimiento, se determina f calculando $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$. La idea es simplemente esta: suponga que $F(s) = \dfrac{-2s + 6}{s^2 + 4}$ es una transformada de Laplace; encuentre una función $f(t)$ tal que $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$. En el ejemplo 2 se muestra cómo resolver este último problema.

Para futuras referencias el análogo del teorema 7.1.1 para la transformada inversa se presenta como nuestro siguiente teorema.

TEOREMA 7.2.1 Algunas transformadas inversas

a) $1 = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}$

b) $t^n = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $e^{at} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\}$

d) $\operatorname{sen} kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2 + k^2}\right\}$

e) $\cos kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 + k^2}\right\}$

f) $\operatorname{senh} kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2 - k^2}\right\}$

g) $\cosh kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 - k^2}\right\}$

Al evaluar las transformadas inversas, suele suceder que una función de s que estamos considerando no concuerda *exactamente* con la forma de una transformada de Laplace $F(s)$ que se presenta en la tabla. Es posible que sea necesario "arreglar" la función de s multiplicando y dividiendo entre una constante apropiada.

EJEMPLO 1 Aplicando el teorema 7.2.1

Evalúe **a)** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^5}\right\}$ **b)** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 + 7}\right\}$.

SOLUCIÓN **a)** Para hacer coincidir la forma dada en el inciso b) del teorema 7.2.1, se identifica $n + 1 = 5$ o $n = 4$ y luego se multiplica y divide entre 4!:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{1}{24}t^4.$$

b) Para que coincida con la forma dada en el inciso d) del teorema 7.2.1, identificamos $k^2 = 7$ y, por tanto, $k = \sqrt{7}$. Se arregla la expresión multiplicando y dividiendo entre $\sqrt{7}$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 7}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2 + 7}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{sen}\sqrt{7}t.$$ ■

$\mathscr{L}^{-1}$ ES UNA TRANSFORMADA LINEAL La transformada de Laplace inversa es también una transformada lineal para las constantes α y β

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}, \tag{1}$$

donde F y G son las transformadas de algunas funciones f y g. Como en la ecuación (2) de la sección 7.1, la ecuación 1 se extiende a cualquier combinación lineal finita de transformadas de Laplace.

EJEMPLO 2 División término a término y linealidad

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{-2s+6}{s^2+4}\right\}$.

SOLUCIÓN Primero se reescribe la función dada de s como dos expresiones dividiendo cada uno de los términos del numerador entre el denominador y después se usa la ecuación (1):

división de cada uno de los términos entre el denominador ↓   linealidad y arreglo de las constantes ↓

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2+4}+\frac{6}{s^2+4}\right\} = -2\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}+\frac{6}{2}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \qquad (2)$$

$$= -2\cos 2t + 3\,\text{sen}\,2t. \qquad \leftarrow \text{incisos e) y d) del teorema 7.2.1 con } k=2$$

■

FRACCIONES PARCIALES Las fracciones parciales juegan un papel importante en la determinación de transformadas de Laplace inversas. La descomposición de una expresión racional en las fracciones componentes se puede hacer rápidamente usando una sola instrucción en la mayoría de los sistemas algebraicos de computadora. De hecho, algunos SAC tienen paquetes implementados de transformada de Laplace y transformada de Laplace inversa. Pero para quienes no cuentan con este tipo de software, en esta sección y en las subsecuentes revisaremos un poco de álgebra básica en los casos importantes donde el denominador de una transformada de Laplace $F(s)$ contiene factores lineales distintos, factores lineales repetidos y polinomios cuadráticos sin factores reales. Aunque examinaremos cada uno de estos casos conforme se desarrolla este capítulo, podría ser buena idea que consultara un libro de cálculo o uno de precálculo para una revisión más completa de esta teoría.

En el siguiente ejemplo se muestra la descomposición en fracciones parciales en el caso en que el denominador de $F(s)$ se puede descomponer en *diferentes factores lineales*.

EJEMPLO 3 Fracciones parciales: diferentes factores lineales

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$.

SOLUCIÓN Existen constantes reales A, B y C, por lo que

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+4}$$

$$= \frac{A(s-2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s+4)}.$$

Puesto que los denominadores son idénticos, los numeradores son idénticos:

$$s^2+6s+9 = A(s-2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s-2). \qquad (3)$$

Comparando los coeficientes de las potencias de s en ambos lados de la igualdad, sabemos que (3) es equivalente a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas A, B y C. Sin embargo, hay un atajo para determinar estas incógnitas. Si se hace $s=1$, $s=2$ y $s=-4$ en (3) se obtiene, respectivamente,

$$16 = A(-1)(5), \qquad 25 = B(1)(6) \quad \text{y} \quad 1 = C(-5)(-6),$$

y así, $A=-\frac{16}{5}$, $B=\frac{25}{6}$, y $C=\frac{1}{30}$. Por lo que la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = -\frac{16/5}{s-1}+\frac{25/6}{s-2}+\frac{1/30}{s+4}, \qquad (4)$$

y, por tanto, de la linealidad de $\mathscr{L}^{-1}$ y del inciso c) del teorema 7.2.1,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = -\frac{16}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{25}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{30}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

$$= -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}. \qquad (5)$$ ■

7.2.2 TRANSFORMADAS DE DERIVADAS

TRANSFORMADA DE UNA DERIVADA Como se indicó en la introducción de este capítulo, el objetivo inmediato es usar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales. Para tal fin, es necesario evaluar cantidades como $\mathscr{L}\{dy/dt\}$ y $\mathscr{L}\{d^2y/dt^2\}$. Por ejemplo, si f' es continua para $t \geq 0$, entonces integrando por partes se obtiene

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$= -f(0) + s\mathscr{L}\{f(t)\}$$

o $$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \qquad (6)$$

Aquí hemos supuesto que $e^{-st}f(t) \to 0$ conforme $t \to \infty$. De manera similar, con la ayuda de la ecuación (6),

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f''(t)\,dt = e^{-st}f'(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt$$

$$= -f'(0) + s\mathscr{L}\{f'(t)\}$$

$$= s[sF(s) - f(0)] - f'(0) \qquad \leftarrow \text{de (6)}$$

o $$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \qquad (7)$$

De igual manera se puede demostrar que

$$\mathscr{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0). \qquad (8)$$

La naturaleza recursiva de la transformada de Laplace de las derivadas de una función f es evidente de los resultados en (6), (7) y (8). El siguiente teorema da la transformada de Laplace de la n-ésima derivada de f. Se omite la demostración.

TEOREMA 7.2.2 Transformada de una derivada

Si $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0, \infty)$ y son de orden exponencial y si $f^{(n)}(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$, entonces

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),$$

donde $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.

SOLUCIÓN DE EDO LINEALES Es evidente del resultado general dado en el teorema 7.2.2 que $\mathscr{L}\{d^ny/dt^n\}$ depende de $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$ y las $n-1$ derivadas de $y(t)$ evaluadas en $t = 0$. Esta propiedad hace que la transformada de Laplace sea adecuada para resolver problemas lineales con valores iniciales en los que la ecuación diferencial tiene *coeficientes constantes*. Este tipo de ecuación diferencial es simplemente una combinación lineal de términos $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$:

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0y = g(t),$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},$$

donde las a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ y $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes. Por la propiedad de linealidad la transformada de Laplace de esta combinación lineal es una combinación lineal de transformadas de Laplace:

$$a_n \mathscr{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} + a_{n-1}\mathscr{L}\left\{\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right\} + \cdots + a_0\,\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{g(t)\}. \tag{9}$$

Del teorema 7.2.2, la ecuación (9) se convierte en

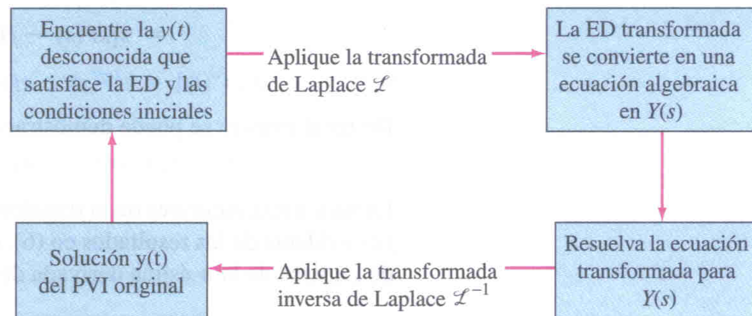
$$\begin{aligned} &a_n[s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)] \\ &\quad + a_{n-1}[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)] + \cdots + a_0Y(s) = G(s), \end{aligned} \tag{10}$$

donde $\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s)$ y $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$. En otras palabras, *la transformada de Laplace de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes se convierte en una ecuación algebraica en Y(s).* Si se resuelve la ecuación transformada general (10) para el símbolo $Y(s)$, primero se obtiene $P(s)Y(s) = Q(s) + G(s)$ y después se escribe

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{G(s)}{P(s)}, \tag{11}$$

donde $P(s) = a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0$, $Q(s)$ es un polinomio en s de grado menor o igual a $n - 1$ que consiste en varios productos de los coeficientes a_i, $i = 1, \ldots, n$ y las condiciones iniciales prescritas $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ y $G(s)$ es la transformada de Laplace de $g(t)$.* Normalmente se escriben los dos términos de la ecuación (11) sobre el mínimo común denominador y después se descompone la expresión en dos o más fracciones parciales. Por último, la solución $y(t)$ del problema con valores iniciales original es $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$, donde la transformada inversa se hace término a término.

El procedimiento se resume en el siguiente diagrama.



En el ejemplo siguiente se ilustra el método anterior para resolver ED, así como la descomposición en fracciones parciales para el caso en que el denominador de $Y(s)$ contenga un *polinomio cuadrático sin factores reales*.

EJEMPLO 4 Solución de un PVI de primer orden

Use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 13 \text{ sen } 2t, \quad y(0) = 6.$$

SOLUCIÓN Primero se toma la transformada de cada miembro de la ecuación diferencial.

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 3\mathscr{L}\{y\} = 13\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\}. \tag{12}$$

*El polinomio $P(s)$ es igual al polinomio auxiliar de n-ésimo grado en la ecuación (12) de la sección 4.3 donde el símbolo m usual se sustituye por s.

De (6), $\mathscr{L}\{dy/dt\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 6$, y del inciso d) del teorema 7.1.1, $\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\} = 2/(s^2 + 4)$, por lo que la ecuación (12) es igual que

$$sY(s) - 6 + 3Y(s) = \frac{26}{s^2 + 4} \quad \text{o} \quad (s + 3)Y(s) = 6 + \frac{26}{s^2 + 4}.$$

Resolviendo la última ecuación para $Y(s)$, obtenemos

$$Y(s) = \frac{6}{s + 3} + \frac{26}{(s + 3)(s^2 + 4)} = \frac{6s^2 + 50}{(s + 3)(s^2 + 4)}. \tag{13}$$

Puesto que el polinomio cuadrático $s^2 + 4$ no se factoriza usando números reales, se supone que el numerador en la descomposición de fracciones parciales es un polinomio lineal en s:

$$\frac{6s^2 + 50}{(s + 3)(s^2 + 4)} = \frac{A}{s + 3} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4}.$$

Poniendo el lado derecho de la igualdad sobre un común denominador e igualando los numeradores, se obtiene $6s^2 + 50 = A(s^2 + 4) + (Bs + C)(s + 3)$. Haciendo $s = -3$ se obtiene inmediatamente que $A = 8$. Puesto que el denominador no tiene más raíces reales, se igualan los coeficientes de s^2 y s: $6 = A + B$ y $0 = 3B + C$. Si en la primera ecuación se usa el valor de A se encuentra que $B = -2$, y con este valor aplicado a la segunda ecuación, se obtiene $C = 6$. Por lo que,

$$Y(s) = \frac{6s^2 + 50}{(s + 3)(s^2 + 4)} = \frac{8}{s + 3} + \frac{-2s + 6}{s^2 + 4}.$$

Aún no se termina porque la última expresión racional se tiene que escribir como dos fracciones. Esto se hizo con la división término a término entre el denominador del ejemplo 2. De (2) de ese ejemplo,

$$y(t) = 8\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 3}\right\} - 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\} + 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\}.$$

Se deduce de los incisos c), d) y e) del teorema 7.2.1, que la solución del problema con valores iniciales es $y(t) = 8e^{-3t} - 2 \cos 2t + 3 \text{ sen } 2t$. ■

EJEMPLO 5 Solución de un PVI de segundo orden

Resuelva $y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5.$

SOLUCIÓN Procediendo como en el ejemplo 4, se transforma la ED. Se toma la suma de las transformadas de cada término, se usan las ecuaciones (6) y (7), las condiciones iniciales dadas, el inciso c) del teorema 7.2.1 y entonces se resuelve para $Y(s)$:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} - 3\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 2\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{e^{-4t}\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s + 4}$$

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = s + 2 + \frac{1}{s + 4}$$

$$Y(s) = \frac{s + 2}{s^2 - 3s + 2} + \frac{1}{(s^2 - 3s + 2)(s + 4)} = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s - 1)(s - 2)(s + 4)}. \tag{14}$$

Los detalles de la descomposición en fracciones parciales de $Y(s)$ ya se presentaron en el ejemplo 3. En vista de los resultados en (3) y (4), se tiene la solución del problema con valores iniciales

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = -\frac{16}{5}e^t + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}.$$ ■

En los ejemplos 4 y 5, se ilustra el procedimiento básico de cómo usar la transformada de Laplace para resolver un problema lineal con valores iniciales, pero podría parecer que estos ejemplos demuestran un método que no es mucho mejor que el aplicado a los problemas descritos en las secciones 2.3 y 4.3 a 4.6. No saque conclusiones negativas de sólo dos ejemplos. Sí, hay una gran cantidad de álgebra inherente al uso de la transformada de Laplace, *pero* observe que no se tiene que usar la variación de parámetros o preocuparse acerca de los casos y el álgebra en el método de coeficientes indeterminados. Además, puesto que el método incorpora las condiciones iniciales prescritas directamente en la solución, no se requiere la operación separada de aplicar las condiciones iniciales a la solución general $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n + y_p$ de la ED para determinar constantes específicas en una solución particular del PVI.

La transformada de Laplace tiene muchas propiedades operacionales. En las secciones que siguen se examinan algunas de estas propiedades y se ve cómo permiten resolver problemas de mayor complejidad.

COMENTARIOS

i) La transformada de Laplace inversa de una función $F(s)$ podría no ser única; en otras palabras, es posible que $\mathscr{L}\{f_1(t)\} = \mathscr{L}\{f_2(t)\}$ y sin embargo $f_1 \neq f_2$. Para nuestros propósitos, esto no es algo que nos deba preocupar. Si f_1 y f_2 son continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces f_1 y f_2 son *esencialmente* iguales. Véase el problema 44 en los ejercicios 7.2. Sin embargo, si f_1 y f_2 son continuas en $[0, \infty)$ y $\mathscr{L}\{f_1(t)\} = \mathscr{L}\{f_2(t)\}$, entonces $f_1 = f_2$ en el intervalo.

ii) Este comentario es para quienes tengan la necesidad de hacer a mano descomposiciones en fracciones parciales. Hay otra forma de determinar los coeficientes en una descomposición de fracciones parciales en el caso especial cuando $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ es una función racional de s y el denominador de F es un producto de *distintos* factores lineales. Esto se ilustra al analizar de nuevo el ejemplo 3. Suponga que se multiplican ambos lados de la supuesta descomposición

$$\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4} \tag{15}$$

digamos, por $s - 1$, se simplifica y entonces se hace $s = 1$. Puesto que los coeficientes de B y C en el lado derecho de la igualdad son cero, se obtiene

$$\left.\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-2)(s+4)}\right|_{s=1} = A \quad \text{o} \quad A = -\frac{16}{5}.$$

Escrita de otra forma,

$$\left.\frac{s^2 + 6s + 9}{\boxed{(s-1)}(s-2)(s+4)}\right|_{s=1} = -\frac{16}{5} = A,$$

donde se ha sombreado o *cubierto*, el factor que se elimina cuando el lado izquierdo se multiplica por $s - 1$. Ahora, para obtener B y C, simplemente se evalúa el lado izquierdo de (15) mientras se cubre, a su vez, $s - 2$ y $s + 4$:

$$\left.\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)\boxed{(s-2)}(s+4)}\right|_{s=2} = \frac{25}{6} = B$$

$$\text{y} \quad \left.\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)\boxed{(s+4)}}\right|_{s=-4} = \frac{1}{30} = C.$$

La descomposición deseada (15) se da en (4). Esta técnica especial para determinar coeficientes se conoce desde luego como **método de cubrimiento**.

iii) En este comentario continuamos con la introducción a la terminología de sistemas dinámicos. Como resultado de las ecuaciones (9) y (10) la transformada de Laplace se adapta bien a sistemas dinámicos *lineales*. El polinomio $P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$ en (11) es el coeficiente total de $Y(s)$ en (10) y es simplemente el lado izquierdo de la ED en donde las derivadas $d^k y/dt^k$ se sustituyen por potencias s^k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Es común llamar al recíproco de $P(s)$, en particular $W(s) = 1/P(s)$, **función de transferencia** del sistema y escribir la ecuación (11) como

$$Y(s) = W(s)Q(s) + W(s)G(s). \tag{16}$$

De esta manera se han separado, en un sentido aditivo, los efectos de la respuesta debidos a las condiciones iniciales (es decir, $W(s)Q(s)$) de los causados por la función de entrada g (es decir, $W(s)G(s)$). Vea (13) y (14). Por tanto la respuesta $y(t)$ del sistema es una superposición de dos respuestas:

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{W(s)Q(s)\} + \mathscr{L}^{-1}\{W(s)G(s)\} = y_0(t) + y_1(t).$$

Si la entrada es $g(t) = 0$, entonces la solución del problema es $y_0(t) = \mathscr{L}^{-1}\{W(s)Q(s)\}$. Esta solución se llama **respuesta de entrada cero** del sistema. Por otro lado, la función $y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\{W(s)G(s)\}$ es la salida debida a la entrada $g(t)$. Entonces, si la condición inicial del sistema es el estado cero (todas las condiciones iniciales son cero), entonces $Q(s) = 0$ y por tanto, la única solución del problema con valores iniciales es $y_1(t)$. La última solución se llama **respuesta de estado cero** del sistema. Tanto $y_0(t)$ como $y_1(t)$ son soluciones particulares: $y_0(t)$ es una solución del PVI que consiste en la ecuación homogénea relacionada con las condiciones iniciales dadas y $y_1(t)$ es una solución del PVI que consiste en la ecuación no homogénea con condiciones iniciales cero. En el ejemplo 5 se ve de (14) que la función de transferencia es $W(s) = 1/(s^2 - 3s + 2)$, la respuesta de entrada cero es

$$y_0(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s-1)(s-2)}\right\} = -3e^t + 4e^{2t},$$

y la respuesta de estado cero es

$$y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = -\frac{1}{5}e^t + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}.$$

Compruebe que la suma de $y_0(t)$ y $y_1(t)$ es la solución de $y(t)$ en el ejemplo 5 y que $y_0(0) = 1$, $y_0'(0) = 5$, mientras que $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 0$.

EJERCICIOS 7.2

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-10.

7.2.1 TRANSFORMADAS INVERSAS

En los problemas 1 a 30 use el álgebra apropiada y el teorema 7.2.1 para encontrar la transformada inversa de Laplace dada.

1. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$

2. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$

3. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{48}{s^5}\right\}$

4. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^3}\right)^2\right\}$

5. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$

6. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)^2}{s^3}\right\}$

7. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}\right\}$

8. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s} + \frac{6}{s^5} - \frac{1}{s+8}\right\}$

9. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s+1}\right\}$

10. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{5s-2}\right\}$

11. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+49}\right\}$

12. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{10s}{s^2+16}\right\}$

13. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{4s^2+1}\right\}$

14. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2+1}\right\}$

15. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2+9}\right\}$

16. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2}\right\}$

17. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 + 3s}\right\}$

18. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s + 1}{s^2 - 4s}\right\}$

19. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 + 2s - 3}\right\}$

20. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 + s - 20}\right\}$

21. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{0.9s}{(s - 0.1)(s + 0.2)}\right\}$

22. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s - 3}{(s - \sqrt{3})(s + \sqrt{3})}\right\}$

23. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s - 2)(s - 3)(s - 6)}\right\}$

24. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2 + 1}{s(s - 1)(s + 1)(s - 2)}\right\}$

25. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3 + 5s}\right\}$

26. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s + 2)(s^2 + 4)}\right\}$

27. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s - 4}{(s^2 + s)(s^2 + 1)}\right\}$

28. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4 - 9}\right\}$

29. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}\right\}$

30. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{6s + 3}{s^4 + 5s^2 + 4}\right\}$

7.2.2 TRANSFORMADAS DE DERIVADAS

En los problemas 31 a 40, use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales.

31. $\dfrac{dy}{dt} - y = 1, \quad y(0) = 0$

32. $2\dfrac{dy}{dt} + y = 0, \quad y(0) = -3$

33. $y' + 6y = e^{4t}, \quad y(0) = 2$

34. $y' - y = 2\cos 5t, \quad y(0) = 0$

35. $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

36. $y'' - 4y' = 6e^{3t} - 3e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

37. $y'' + y = \sqrt{2}\,\text{sen}\,\sqrt{2}t, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = 0$

38. $y'' + 9y = e^{t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

39. $2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$

40. $y''' + 2y'' - y' - 2y = \text{sen}\, 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$

Las formas inversas de los resultados del problema 46 en los ejercicios 7.1 son

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}\right\} = e^{at}\cos bt$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}\right\} = e^{at}\,\text{sen}\, bt.$$

En los problemas 41 y 42 use la transformada de Laplace y estas inversas para resolver el problema con valores iniciales dado.

41. $y' + y = e^{-3t}\cos 2t, \quad y(0) = 0$

42. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

Problemas para analizar

43. **a)** Con un ligero cambio de notación la transformada en (6) es igual a

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0).$$

Con $f(t) = te^{at}$, analice cómo se puede usar este resultado junto con c) del teorema 7.1.1 para evaluar $\mathscr{L}\{te^{at}\}$.

b) Proceda como en el inciso a), pero esta vez examine cómo usar (7) con $f(t) = t\,\text{sen}\,kt$ junto con d) y e) del teorema 7.1.1 para evaluar $\mathscr{L}\{t\,\text{sen}\,kt\}$.

44. Construya dos funciones f_1 y f_2 que tengan la misma transformada de Laplace. No considere ideas profundas.

45. Lea de nuevo el *Comentario iii)* de la página 269. Encuentre la respuesta de entrada cero y la respuesta de estado cero para el PVI del problema 36.

46. Suponga que $f(t)$ es una función para la que $f'(t)$ es continua por tramos y de orden exponencial c. Use los resultados de esta sección y la sección 7.1 para justificar

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s),$$

donde $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. Compruebe este resultado con $f(t) = \cos kt$.

7.3 PROPIEDADES OPERACIONALES I

REPASO DE MATERIAL

- Continúe practicando la descomposición en fracciones parciales.
- Completar el cuadrado.

INTRODUCCIÓN No es conveniente usar la definición 7.1 cada vez que se desea encontrar la transformada de Laplace de una función $f(t)$. Por ejemplo, la integración por partes requerida para evaluar $\mathscr{L}\{e^t t^2\,\text{sen}\,3t\}$ es formidable en pocas palabras. En esta sección y la que sigue se presentan varias propiedades operacionales de la transformada de Laplace que ahorran trabajo y permiten construir una lista más extensa de transformadas (vea la tabla del apéndice III) sin tener que recurrir a la definición básica y a la integración.

7.3.1 TRASLACIÓN EN EL EJE *s*

UNA TRASLACION Evaluar transformadas tales como $\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\}$ y $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$ es directo siempre que se conozca (y así es) $\mathscr{L}\{t^3\}$ y $\mathscr{L}\{\cos 4t\}$. En general, si se conoce la transformada de Laplace de una función f, $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, es posible calcular la transformada de Laplace de un múltiplo exponencial de f, es decir, $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}$, sin ningún esfuerzo adicional que no sea *trasladar* o *desplazar*, la transformada $F(s)$ a $F(s-a)$. Este resultado se conoce como **primer teorema de traslación** o **primer teorema de desplazamiento**.

TEOREMA 7.3.1 Primer teorema de traslación

Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y a es cualquier número real, entonces

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a).$$

PRUEBA La demostración es inmediata, ya que por la definición 7.1.1

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt = F(s-a).$$ ■

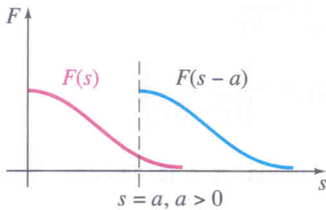


FIGURA 7.3.1 Desplazamiento en el eje *s*.

Si se considera s una variable real, entonces la gráfica de $F(s-a)$ es la gráfica de $F(s)$ desplazada en el eje s por la cantidad $|a|$. Si $a > 0$, la gráfica de $F(s)$ se desplaza a unidades a la derecha, mientras que si $a < 0$, la gráfica se desplaza $|a|$ unidades a la izquierda. Véase la figura 7.3.1.

Para enfatizar, a veces es útil usar el simbolismo

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}|_{s\to s-a},$$

donde $s \to s-a$ significa que en la transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ siempre que aparezca el símbolo s se reemplaza por $s-a$.

EJEMPLO 1 Usando el primer teorema de traslación

Evalúe **a)** $\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\}$ **b)** $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$.

SOLUCIÓN Los siguientes resultados se deducen de los teoremas 7.1.1 y 7.3.1.

a) $$\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\} = \mathscr{L}\{t^3\}|_{s\to s-5} = \frac{3!}{s^4}\bigg|_{s\to s-5} = \frac{6}{(s-5)^4}$$

b) $$\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\} = \mathscr{L}\{\cos 4t\}|_{s\to s-(-2)} = \frac{s}{s^2+16}\bigg|_{s\to s+2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+16}$$ ■

FORMA INVERSA DEL TEOREMA 7.3.1 Para calcular la inversa de $F(s-a)$, se debe reconocer $F(s)$, para encontrar $f(t)$ obteniendo la transformada de Laplace inversa de $F(s)$ y después multiplicar $f(t)$ por la función exponencial e^{at}. Este procedimiento se resume con símbolos de la siguiente manera:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)|_{s\to s-a}\} = e^{at}f(t), \quad (1)$$

donde $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$.

En la primera parte del ejemplo siguiente se ilustra la descomposición en fracciones parciales en el caso cuando el denominador de $Y(s)$ contiene *factores lineales repetidos*.

EJEMPLO 2 Fracciones parciales: factores lineales repetidos

Evalúe **a)** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}$ **b)** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}\right\}$.

SOLUCIÓN **a)** Un factor lineal repetido es un término $(s-a)^n$, donde a es un número real y n es un entero positivo ≥ 2. Recuerde que si $(s-a)^n$ aparece en el denominador de una expresión racional, entonces se supone que la descomposición contiene n fracciones parciales con numeradores y denominadores constantes $s-a, (s-a)^2, \ldots, (s-a)^n$. Por tanto, con $a = 3$ y $n = 2$ se escribe

$$\frac{2s+5}{(s-3)^2} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{(s-3)^2}.$$

Colocando los dos términos del lado derecho con un denominador común, se obtiene el numerador $2s + 5 = A(s-3) + B$ y esta identidad produce $A = 2$ y $B = 11$. Por tanto,

$$\frac{2s+5}{(s-3)^2} = \frac{2}{s-3} + \frac{11}{(s-3)^2} \tag{2}$$

y

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} = 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 11\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}. \tag{3}$$

Ahora $1/(s-3)^2$ es $F(s) = 1/s^2$ desplazada tres unidades a la derecha. Ya que $\mathscr{L}^{-1}\{1/s^2\} = t$, se tiene de (1) que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\bigg|_{s\to s-3}\right\} = e^{3t}t.$$

Por último, (3) es

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} = 2e^{3t} + 11e^{3t}t. \tag{4}$$

b) Para empezar, observe que el polinomio cuadrático $s^2 + 4s + 6$ no tiene raíces reales y por tanto no tiene factores lineales reales. En esta situación *completamos el cuadrado*:

$$\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6} = \frac{s/2+5/3}{(s+2)^2+2}. \tag{5}$$

El objetivo aquí es reconocer la expresión del lado derecho como alguna transformada de Laplace $F(s)$ en la cual se ha reemplazado s por $s + 2$. Lo que se trata de hacer es similar a trabajar hacia atrás del inciso b) del ejemplo 1. El denominador en (5) ya está en la forma correcta, es decir, $s^2 + 2$ con $s + 2$ en lugar de s. Sin embargo, se debe arreglar el numerador manipulando las constantes: $\frac{1}{2}s + \frac{5}{3} = \frac{1}{2}(s+2) + \frac{5}{3} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2}(s+2) + \frac{2}{3}$.

Ahora mediante la división entre el denominador de cada término, la linealidad de $\mathscr{L}^{-1}$, los incisos e) y d) del teorema 7.2.1 y por último (1),

$$\frac{s/2+5/3}{(s+2)^2+2} = \frac{\frac{1}{2}(s+2)+\frac{2}{3}}{(s+2)^2+2} = \frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+2)^2+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{(s+2)^2+2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}\right\} = \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right\} + \frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\bigg|_{s\to s+2}\right\} + \frac{2}{3\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\bigg|_{s\to s+2}\right\} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-2t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t. \tag{7}$$

■

EJEMPLO 3 Un problema con valores iniciales

Resuelva $y'' - 6y' + 9y = t^2e^{3t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 17$.

SOLUCIÓN Antes de transformar la ED, observe que su lado derecho es similar a la función del inciso a) del ejemplo 1. Después de usar la linealidad, el teorema 7.3.1 y las condiciones iniciales, se simplifica y luego se resuelve para $Y(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$:

$$\mathscr{L}\{y''\} - 6\mathscr{L}\{y'\} + 9\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{t^2e^{3t}\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6[sY(s) - y(0)] + 9Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$(s^2 - 6s + 9)Y(s) = 2s + 5 + \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$(s-3)^2Y(s) = 2s + 5 + \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$Y(s) = \frac{2s+5}{(s-3)^2} + \frac{2}{(s-3)^5}.$$

El primer término del lado derecho ya se ha descompuesto en fracciones parciales en (2) del inciso a) del ejemplo (2).

$$Y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{11}{(s-3)^2} + \frac{2}{(s-3)^5}.$$

Por lo que $y(t) = 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 11\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} + \frac{2}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-3)^5}\right\}$. (8)

De la forma inversa (1) del teorema 7.3.1, los dos últimos términos de (8) son

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\bigg|_{s\to s-3}\right\} = te^{3t} \quad \text{y} \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\bigg|_{s\to s-3}\right\} = t^4e^{3t}.$$

Por lo que (8) es $y(t) = 2e^{3t} + 11te^{3t} + \frac{1}{12}t^4e^{3t}$. ■

EJEMPLO 4 Un problema con valores iniciales

Resuelva $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

SOLUCIÓN

$$\mathscr{L}\{y''\} + 4\mathscr{L}\{y'\} + 6\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{1\} + \mathscr{L}\{e^{-t}\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4[sY(s) - y(0)] + 6Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$(s^2 + 4s + 6)Y(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)}$$

Puesto que el término cuadrático en el denominador no se factoriza en factores lineales reales, se encuentra que la descomposición en fracciones parciales para $Y(s)$ es

$$Y(s) = \frac{1/6}{s} + \frac{1/3}{s+1} - \frac{s/2 + 5/3}{s^2 + 4s + 6}.$$

Además, en la preparación para tomar la transformada inversa, ya se manejó el último término en la forma necesaria del inciso b) del ejemplo 2. Por lo que en vista de los resultados en (6) y (7), se tiene la solución

$$y(t) = \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right\} - \frac{2}{3\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}\right\}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-2t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t.$$

7.3.2 TRASLACIÓN EN EL EJE t

FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO En ingeniería es común encontrar funciones que están ya sea "desactivadas" o "activadas". Por ejemplo, una fuerza externa que actúa en un sistema mecánico, o un voltaje aplicado a un circuito, se puede desactivar después de cierto tiempo. Es conveniente entonces definir una función especial que es el número 0 (desactivada) hasta un cierto tiempo $t = a$ y entonces el número 1 (activada) después de ese tiempo. La función se llama **función escalón unitario** o **función de Heaviside**.

DEFINICIÓN 7.3.1 Función escalón unitario

La **función escalón unitario** $\mathscr{U}(t-a)$ se define como

$$\mathscr{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ 1, & t \ge a. \end{cases}$$

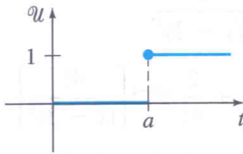


FIGURA 7.3.2 Gráfica de la función escalón unitario.

Observe que se define $\mathscr{U}(t-a)$ sólo en el eje t no negativo, puesto que esto es todo lo que interesa en el estudio de la transformada de Laplace. En un sentido más amplio, $\mathscr{U}(t-a) = 0$ para $t < a$. En la figura 7.3.2, se muestra la gráfica de $\mathscr{U}(t-a)$.

Cuando una función f definida para $t \ge 0$ se multiplica por $\mathscr{U}(t-a)$, la función escalón unitario "desactiva" una parte de la gráfica de esa función. Por ejemplo, considere la función $f(t) = 2t - 3$. Para "desactivar" la parte de la gráfica de f para $0 \le t < 1$, simplemente formamos el producto $(2t-3)\,\mathscr{U}(t-1)$. Véase la figura 7.3.3. En general, la gráfica de $f(t)\,\mathscr{U}(t-a)$ es 0 (desactivada) para $0 \le t < a$ y es la parte de la gráfica de f (activada) para $t \ge a$.

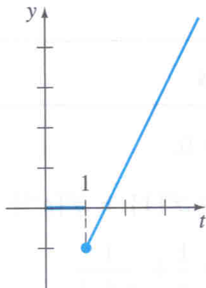


FIGURA 7.3.3 La función es $f(t) = (2t-3)\,\mathscr{U}(t-1)$.

La función escalón unitario también se puede usar para escribir funciones definidas por tramos en una forma compacta. Por ejemplo, si consideramos $0 \le t < 2$, $2 \le t < 3$, y $t \ge 3$ y los valores correspondientes de $\mathscr{U}(t-2)$ y $\mathscr{U}(t-3)$, debe ser evidente que la función definida por tramos que se muestra en la figura 7.3.4 es igual que $f(t) = 2 - 3\mathscr{U}(t-2) + \mathscr{U}(t-3)$. También, una función general definida por tramos del tipo

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \le t < a \\ h(t), & t \ge a \end{cases} \tag{9}$$

es la misma que:

$$f(t) = g(t) - g(t)\,\mathscr{U}(t-a) + h(t)\,\mathscr{U}(t-a). \tag{10}$$

Análogamente, una función del tipo

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ g(t), & a \le t < b \\ 0, & t \ge b \end{cases} \tag{11}$$

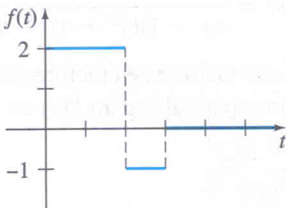


FIGURA 7.3.4 La función es $f(t) = 2 - 3\mathscr{U}(t-2) + \mathscr{U}(t-3)$.

puede ser escrita como

$$f(t) = g(t)[\mathscr{U}(t-a) - \mathscr{U}(t-b)]. \tag{12}$$

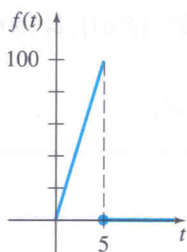


FIGURA 7.3.5 La función es $f(t) = 20t - 20t\,\mathscr{U}(t - 5)$.

EJEMPLO 5 Una función definida por tramos

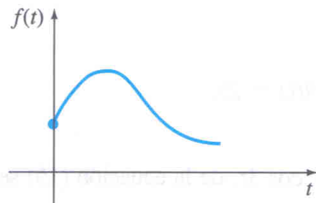
Exprese $f(t) = \begin{cases} 20t, & 0 \le t < 5 \\ 0, & t \ge 5 \end{cases}$ en términos de funciones escalón unitario. Trace la gráfica.

SOLUCIÓN En la figura 7.3.5 se muestra la gráfica de f. Ahora, de (9) y (10) con $a = 5$, $g(t) = 20t$ y $h(t) = 0$, se obtiene $f(t) = 20t - 20t\,\mathscr{U}(t - 5)$. ■

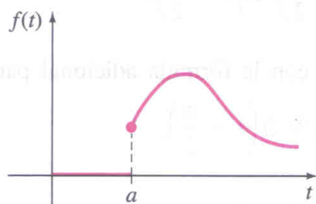
Considere una función general $y = f(t)$ definida para $t \ge 0$. La función definida por tramos

$$f(t - a)\,\mathscr{U}(t - a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ f(t - a), & t \ge a \end{cases} \tag{13}$$

juega un papel importante en la explicación que sigue. Como se muestra en la figura 7.3.6, para $a > 0$ la gráfica de la función $y = f(t - a)\,\mathscr{U}(t - a)$ coincide con la gráfica de $y = f(t - a)$ para $t \ge a$ (que es la gráfica *completa* de $y = f(t)$, $t \ge 0$ desplazada a unidades a la derecha en el eje t), pero es idénticamente cero para $0 \le t < a$.



a) $f(t),\ t \ge 0$



b) $f(t - a)\mathscr{U}(t - a)$

FIGURA 7.3.6 Desplazamiento en el eje t.

Vimos en el teorema 7.3.1 que un múltiplo exponencial de $f(t)$ da como resultado una traslación de la transformada $F(s)$ en el eje s. Como una consecuencia del siguiente teorema, se ve que siempre que $F(s)$ se multiplica por una función exponencial e^{-as}, $a > 0$, la transformada inversa del producto $e^{-as} F(s)$ es la función f desplazada a lo largo del eje t en la manera que se muestra en la figura 7.3.6b. Este resultado, presentado a continuación en su versión de transformada directa, se llama **segundo teorema de traslación** o **segundo teorema de desplazamiento**.

TEOREMA 7.3.2 Segundo teorema de traslación

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $a > 0$, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t - a)\,\mathscr{U}(t - a)\} = e^{-as}F(s).$$

DEMOSTRACIÓN Por la propiedad de intervalo aditivo de integrales,

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t - a)\,\mathscr{U}(t - a)\,dt$$

se puede escribir como dos integrales:

$$\mathscr{L}\{f(t - a)\,\mathscr{U}(t - a)\} = \int_0^a e^{-st} f(t - a)\underbrace{\mathscr{U}(t - a)}_{\substack{\text{cero para} \\ 0 \le t < a}}dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t - a)\underbrace{\mathscr{U}(t - a)}_{\substack{\text{uno para} \\ t \ge a}}dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t - a)\,dt.$$

Ahora si hacemos $v = t - a$, $dv = dt$ en la última integral, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t - a)\,\mathscr{U}(t - a)\} = \int_0^\infty e^{-s(v+a)} f(v)\,dv = e^{-as}\int_0^\infty e^{-sv} f(v)\,dv = e^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$ ■

Con frecuencia se desea encontrar la transformada de Laplace de sólo una función escalón unitario. Esto puede ser de la definición 7.1.1 o teorema 7.3.2. Si se identifica $f(t) = 1$ en el teorema 7.3.2, entonces $f(t - a) = 1$, $F(s) = \mathscr{L}\{1\} = 1/s$ y por tanto,

$$\mathscr{L}\{\mathscr{U}(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s}. \tag{14}$$

Por ejemplo, si se usa la ecuación (14), la transformada de Laplace de la función de la figura 7.3.4 es

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{f(t)\} &= 2\mathscr{L}\{1\} - 3\mathscr{L}\{\mathscr{U}(t - 2)\} + \mathscr{L}\{\mathscr{U}(t - 3)\} \\ &= 2\frac{1}{s} - 3\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}. \end{aligned}$$

FORMA INVERSA DEL TEOREMA 7.3.2 Si $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$, la forma inversa del teorema 7.3.2 $a > 0$, es

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,\mathscr{U}(t-a). \tag{15}$$

EJEMPLO 6 Uso de la fórmula (15)

Evalúe **a)** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\}$ **b)** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}e^{-\pi s/2}\right\}$.

SOLUCIÓN **a)** De acuerdo con las identidades $a = 2$, $F(s) = 1/(s-4)$ y $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{4t}$, se tiene de (15)

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\} = e^{4(t-2)}\,\mathscr{U}(t-2).$$

b) Con $a = \pi/2$, $F(s) = s/(s^2+9)$ y $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \cos 3t$, de la ecuación (15) se obtiene

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}e^{-\pi s/2}\right\} = \cos 3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right).$$

La última expresión se puede simplificar un poco con la fórmula adicional para el coseno. Compruebe que el resultado es igual a $-\text{sen}\,3t\,\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$. ■

FORMA ALTERNATIVA DEL TEOREMA 7.3.2 Con frecuencia nos enfrentamos con el problema de encontrar la transformada de Laplace de un producto de una función g y una función escalón unitario $\mathscr{U}(t-a)$ donde la función g no tiene la forma precisa de desplazamiento $f(t-a)$ del teorema 7.3.2. Para encontrar la transformada de Laplace de $g(t)\mathscr{U}(t-a)$, es posible arreglar $g(t)$ en la forma requerida $f(t-a)$ usando álgebra. Por ejemplo, si se quiere usar el teorema 7.3.2 para determinar la transformada de Laplace de $t^2\,\mathscr{U}(t-2)$, se tendría que forzar $g(t) = t^2$ a la forma $f(t-2)$. Se debe trabajar algebraicamente y comprobar que $t^2 = (t-2)^2 + 4(t-2) + 4$ es una identidad. Por tanto,

$$\mathscr{L}\{t^2\,\mathscr{U}(t-2)\} = \mathscr{L}\{(t-2)^2\,\mathscr{U}(t-2) + 4(t-2)\,\mathscr{U}(t-2) + 4\mathscr{U}(t-2)\},$$

donde ahora cada término del lado derecho se puede evaluar con el teorema 7.3.2. Pero como estas operaciones son tardadas y con frecuencia no obvias, es más simple diseñar una forma alternativa del teorema 7.3.2. Usando la definición 7.1.1, la definición de $\mathscr{U}(t-a)$, y la sustitución $u = t-a$, se obtiene

$$\mathscr{L}\{g(t)\,\mathscr{U}(t-a)\} = \int_a^\infty e^{-st}g(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-s(u+a)}\,g(u+a)\,du.$$

Es decir,

$$\mathscr{L}\{g(t)\mathscr{U}(t-a)\} = e^{-as}\,\mathscr{L}\{g(t+a)\}. \tag{16}$$

EJEMPLO 7 Segundo teorema de traslación: forma alternativa

Evalúe $\mathscr{L}\{\cos t\,\mathscr{U}(t-\pi)\}$.

SOLUCIÓN Con $g(t) = \cos t$ y $a = \pi$, entonces $g(t+\pi) = \cos(t+\pi) = -\cos t$ por la fórmula de adicción para la función coseno. Por tanto, por la ecuación (16),

$$\mathscr{L}\{\cos t\,\mathscr{U}(t-\pi)\} = -e^{-\pi s}\,\mathscr{L}\{\cos t\} = -\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}.$$ ■

EJEMPLO 8 Un problema con valores iniciales

Resuelva $y' + y = f(t)$, $y(0) = 5$, donde $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi \\ 3\cos t, & t \ge \pi. \end{cases}$

SOLUCIÓN La función f se puede escribir como $f(t) = 3\cos t\,\mathscr{U}(t - \pi)$, y entonces por linealidad, por los resultados del ejemplo 7 y por las fracciones parciales usuales, se tiene

$$\mathscr{L}\{y'\} + \mathscr{L}\{y\} = 3\mathscr{L}\{\cos t\,\mathscr{U}(t-\pi)\}$$
$$sY(s) - y(0) + Y(s) = -3\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}$$
$$(s+1)Y(s) = 5 - \frac{3s}{s^2+1}e^{-\pi s}$$
$$Y(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{s+1}e^{-\pi s} + \frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s} + \frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}\right]. \tag{17}$$

Ahora procediendo como se hizo en el ejemplo 6, se tiene de (15) con $a = \pi$ que los inversos de los términos dentro del paréntesis son

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}e^{-\pi s}\right\} = e^{-(t-\pi)}\mathscr{U}(t-\pi), \qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}\right\} = \operatorname{sen}(t-\pi)\,\mathscr{U}(t-\pi),$$

y
$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}\right\} = \cos(t-\pi)\,\mathscr{U}(t-\pi).$$

Por lo que el inverso de (17) es

$$y(t) = 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-(t-\pi)}\mathscr{U}(t-\pi) - \frac{3}{2}\operatorname{sen}(t-\pi)\,\mathscr{U}(t-\pi) - \frac{3}{2}\cos(t-\pi)\,\mathscr{U}(t-\pi)$$
$$= 5e^{-t} + \frac{3}{2}[e^{-(t-\pi)} + \operatorname{sen} t + \cos t]\,\mathscr{U}(t-\pi) \qquad \leftarrow \text{identidades trigonométricas}$$
$$= \begin{cases} 5e^{-t}, & 0 \le t < \pi \\ 5e^{-t} + \dfrac{3}{2}e^{-(t-\pi)} + \dfrac{3}{2}\operatorname{sen} t + \dfrac{3}{2}\cos t, & t \ge \pi. \end{cases} \tag{18}$$

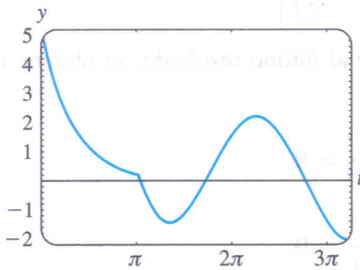


FIGURA 7.3.7 Gráfica de la función en (18).

Usando un programa de graficación hemos obtenido la gráfica de (18) que se muestra en la figura 7.3.7. ■

VIGAS En la sección 5.2 vimos que la deflexión estática $y(x)$ de una viga uniforme de longitud L con carga $w(x)$ por unidad de longitud se determina a partir de la ecuación diferencial lineal de cuarto orden

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x), \tag{19}$$

donde E es el módulo de Young de elasticidad e I es un momento de inercia de una sección transversal de la viga. La transformada de Laplace es particularmente útil para resolver la ecuación (19) cuando $w(x)$ se define por tramos. Sin embargo, para usar la transformada de Laplace se debe suponer de manera tácita que $y(x)$ y $w(x)$ están definidas en $(0, \infty)$ y no en $(0, L)$. Observe, también, que el siguiente ejemplo es un problema con valores en la frontera más que un problema con valores iniciales.

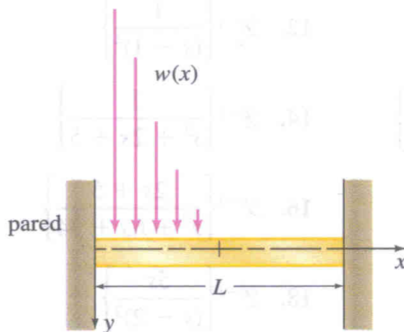


FIGURA 7.3.8 Viga empotrada con carga variable.

EJEMPLO 9 Un problema con valores en la frontera

Una viga de longitud L se empotra en ambos extremos, como se muestra en la figura 7.3.8. Determine la deflexión de la viga cuando la carga está dada por

$$w(x) = \begin{cases} w_0\left(1 - \dfrac{2}{L}x\right), & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 < x < L. \end{cases}$$

SOLUCIÓN Recuerde que debido a que la viga esta empotrada en ambos extremos, las condiciones de frontera son $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(L) = 0$, $y'(L) = 0$. Ahora usando (10) se puede expresar $w(x)$ en términos de la función escalón unitario:

$$w(x) = w_0\left(1 - \frac{2}{L}x\right) - w_0\left(1 - \frac{2}{L}x\right)\mathcal{U}\left(x - \frac{L}{2}\right)$$
$$= \frac{2w_0}{L}\left[\frac{L}{2} - x + \left(x - \frac{L}{2}\right)\mathcal{U}\left(x - \frac{L}{2}\right)\right].$$

Transformando la ecuación (19) respecto a la variable x, se obtiene

$$EI\left(s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)\right) = \frac{2w_0}{L}\left[\frac{L/2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}e^{-Ls/2}\right]$$

o
$$s^4Y(s) - sy''(0) - y'''(0) = \frac{2w_0}{EIL}\left[\frac{L/2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}e^{-Ls/2}\right].$$

Si hacemos $c_1 = y''(0)$ y $c_2 = y'''(0)$, entonces

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{2w_0}{EIL}\left[\frac{L/2}{s^5} - \frac{1}{s^6} + \frac{1}{s^6}e^{-Ls/2}\right],$$

y en consecuencia

$$y(x) = \frac{c_1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} + \frac{c_2}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} + \frac{2w_0}{EIL}\left[\frac{L/2}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} - \frac{1}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}\right\} + \frac{1}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}e^{-Ls/2}\right\}\right]$$
$$= \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{6}x^3 + \frac{w_0}{60\,EIL}\left[\frac{5L}{2}x^4 - x^5 + \left(x - \frac{L}{2}\right)^5\mathcal{U}\left(x - \frac{L}{2}\right)\right].$$

Aplicando las condiciones $y(L) = 0$ y $y'(L) = 0$ al último resultado, se obtiene un sistema de ecuaciones para c_1 y c_2:

$$c_1\frac{L^2}{2} + c_2\frac{L^3}{6} + \frac{49w_0L^4}{1920EI} = 0$$
$$c_1 L + c_2\frac{L^2}{2} + \frac{85w_0L^3}{960EI} = 0.$$

Resolviendo se encuentra que $c_1 = 23w_0L^2/(960EI)$ y $c_2 = -9w_0L/(40EI)$. Por lo que la deflexión está dada por

$$y(x) = \frac{23w_0L^2}{1920EI}x^2 - \frac{3w_0L}{80EI}x^3 + \frac{w_0}{60EIL}\left[\frac{5L}{2}x^4 - x^5 + \left(x - \frac{L}{2}\right)^5\mathcal{U}\left(x - \frac{L}{2}\right)\right].$$ ■

EJERCICIOS 7.3 *Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-11.*

7.3.1 TRASLACIÓN EN EL EJE s

En los problemas 1 a 20 encuentre $F(s)$ o $f(t)$, como se indica.

1. $\mathcal{L}\{te^{10t}\}$
2. $\mathcal{L}\{te^{-6t}\}$
3. $\mathcal{L}\{t^3e^{-2t}\}$
4. $\mathcal{L}\{t^{10}e^{-7t}\}$
5. $\mathcal{L}\{t(e^t + e^{2t})^2\}$
6. $\mathcal{L}\{e^{2t}(t - 1)^2\}$
7. $\mathcal{L}\{e^t \operatorname{sen} 3t\}$
8. $\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$
9. $\mathcal{L}\{(1 - e^t + 3e^{-4t})\cos 5t\}$
10. $\mathcal{L}\left\{e^{3t}\left(9 - 4t + 10\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)\right\}$
11. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 2)^3}\right\}$
12. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s - 1)^4}\right\}$
13. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 6s + 10}\right\}$
14. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 2s + 5}\right\}$
15. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4s + 5}\right\}$
16. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s + 5}{s^2 + 6s + 34}\right\}$
17. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s + 1)^2}\right\}$
18. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s}{(s - 2)^2}\right\}$
19. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s - 1}{s^2(s + 1)^3}\right\}$
20. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s + 1)^2}{(s + 2)^4}\right\}$

En los problemas 21 a 30, use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales.

21. $y' + 4y = e^{-4t}, \quad y(0) = 2$

22. $y' - y = 1 + te^t, \quad y(0) = 0$

23. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$

24. $y'' - 4y' + 4y = t^3e^{2t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

25. $y'' - 6y' + 9y = t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

26. $y'' - 4y' + 4y = t^3, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

27. $y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = -3$

28. $2y'' + 20y' + 51y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 0$

29. $y'' - y' = e^t \cos t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

30. $y'' - 2y' + 5y = 1 + t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 4$

En los problemas 31 y 32, use la transformada de Laplace y el procedimiento descrito en el ejemplo 9 para resolver el problema con valores en la frontera dado.

31. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y'(0) = 2, y(1) = 2$

32. $y'' + 8y' + 20y = 0, \quad y(0) = 0, y'(\pi) = 0$

33. Un peso de 4 lb estira un resorte 2 pies. El peso se libera a partir del reposo 18 pulgadas arriba de la posición de equilibrio y el movimiento resultante tiene lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a $\frac{7}{8}$ veces la velocidad instantánea. Use la transformada de Laplace para encontrar la ecuación de movimiento $x(t)$.

34. Recuerde que la ecuación diferencial para la carga instantánea $q(t)$ en el capacitor en un circuito RCL en serie está dada por

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{20}$$

Véase la sección 5.1. Use la transformada de Laplace para encontrar $q(t)$ cuando $L = 1$ h, $R = 20\ \Omega$, C = 0.005 f, $E(t) = 150$ V, $t > 0$, $q(0) = 0$ e $i(0) = 0$. ¿Cuál es la corriente $i(t)$?

35. Considere una batería de voltaje constante E_0 que carga el capacitor que se muestra en la figura 7.3.9. Divida la ecuación (20) entre L y defina $2\lambda = R/L$ y $\omega^2 = 1/LC$. Use la transformada de Laplace para demostrar que la solución $q(t)$ de $q'' + 2\lambda q' + \omega^2 q = E_0/L$ sujeta a $q(0) = 0$, $i(0) = 0$ es

$$q(t) = \begin{cases} E_0C\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\cosh\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}\operatorname{senh}\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}t\right)\right], & \lambda > \omega, \\ E_0C[1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)], & \lambda = \omega, \\ E_0C\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}\operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t\right)\right], & \lambda < \omega. \end{cases}$$

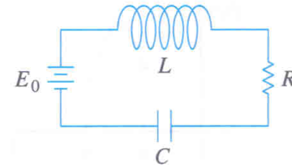


FIGURA 7.3.9 Circuito en serie del problema 35.

36. Use la transformada de Laplace para encontrar la carga $q(t)$ en un circuito RC en serie cuando $q(0) = 0$ y $E(t) = E_0e^{-kt}$, $k > 0$. Considere dos casos: $k \neq 1/RC$ y $k = 1/RC$.

7.3.2 TRASLACIÓN EN EL EJE t

En los problemas 37 a 48 encuentre $F(s)$ o $f(t)$, como se indica.

37. $\mathscr{L}\{(t-1)\mathscr{U}(t-1)\}$

38. $\mathscr{L}\{e^{2-t}\mathscr{U}(t-2)\}$

39. $\mathscr{L}\{t\,\mathscr{U}(t-2)\}$

40. $\mathscr{L}\{(3t+1)\mathscr{U}(t-1)\}$

41. $\mathscr{L}\{\cos 2t\,\mathscr{U}(t-\pi)\}$

42. $\mathscr{L}\left\{\operatorname{sen} t\,\mathscr{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$

43. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^3}\right\}$

44. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{(1+e^{-2s})^2}{s+2}\right\}$

45. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}$

46. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-\pi s/2}}{s^2+4}\right\}$

47. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}$

48. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}\right\}$

En los problemas 49 a 54, compare la gráfica dada con una de las funciones de los incisos a) a f). La gráfica de $f(t)$ se presenta en la figura 7.3.10.

a) $f(t) - f(t)\,\mathscr{U}(t-a)$

b) $f(t-b)\,\mathscr{U}(t-b)$

c) $f(t)\,\mathscr{U}(t-a)$

d) $f(t) - f(t)\,\mathscr{U}(t-b)$

e) $f(t)\,\mathscr{U}(t-a) - f(t)\,\mathscr{U}(t-b)$

f) $f(t-a)\,\mathscr{U}(t-a) - f(t-a)\,\mathscr{U}(t-b)$

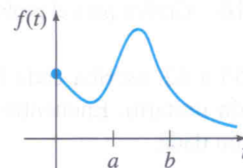


FIGURA 7.3.10 Gráfica para los problemas 49 a 54.

49.

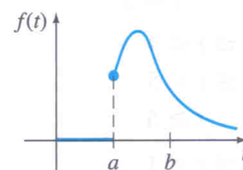


FIGURA 7.3.11 Gráfica para el problema 49.

50.

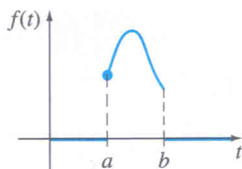


FIGURA 7.3.12 Gráfica para el problema 50.

51.

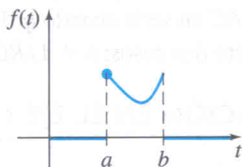


FIGURA 7.3.13 Gráfica para el problema 51.

52.

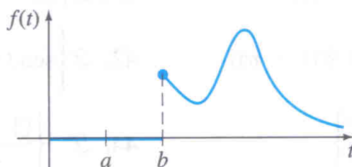


FIGURA 7.3.14 Gráfica para el problema 52.

53.

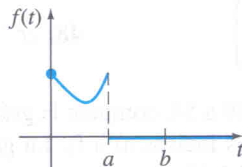


FIGURA 7.3.15 Gráfica para el problema 53.

54.

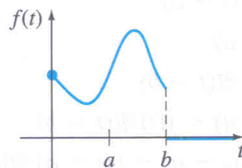


FIGURA 7.3.16 Gráfica para el problema 54.

En los problemas 55 a 62, escriba cada función en términos de funciones escalón unitario. Encuentre la transformada de Laplace de la función dada.

55. $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 3 \\ -2, & t \ge 3 \end{cases}$

56. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 4 \\ 0, & 4 \le t < 5 \\ 1, & t \ge 5 \end{cases}$

57. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ t^2, & t \ge 1 \end{cases}$

58. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3\pi/2 \\ \operatorname{sen} t, & t \ge 3\pi/2 \end{cases}$

59. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$

60. $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$

61.

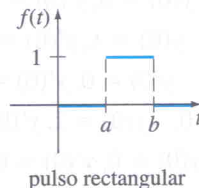


FIGURA 7.3.17 Gráfica para el problema 61.

62.

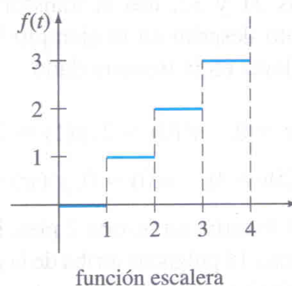


FIGURA 7.3.18 Gráfica para el problema 62.

En los problemas 63 a 70, use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales.

63. $y' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, donde $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 5, & t \ge 1 \end{cases}$

64. $y' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ -1, & t \ge 1 \end{cases}$$

65. $y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$$

66. $y'' + 4y = f(t)$, $y(0) = 0, y'(0) = -1$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$$

67. $y'' + 4y = \operatorname{sen} t\, \mathscr{U}(t - 2\pi)$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$

68. $y'' - 5y' + 6y = \mathscr{U}(t - 1)$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$

69. $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi \\ 1, & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$$

70. $y'' + 4y' + 3y = 1 - \mathscr{U}(t - 2) - \mathscr{U}(t - 4) + \mathscr{U}(t - 6)$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$

71. Suponga que un peso de 32 libras estira un resorte 2 pies. Si el peso se libera a partir del reposo en la posición de equilibrio, determine la ecuación de movimiento $x(t)$ si una fuerza $f(t) = 20t$ actúa en el sistema para $0 \le t < 5$ y luego se retira (véase el ejemplo 5). Desprecie cualquier fuerza de amortiguamiento. Use un programa de graficación para trazar $x(t)$ en el intervalo $[0, 10]$.

72. Resuelva el problema 71 si la fuerza aplicada $f(t) = \operatorname{sen} t$ actúa en el sistema para $0 \le t < 2\pi$ y después se retira.

En los problemas 73 y 74 use la transformada de Laplace para encontrar la carga $q(t)$ en el capacitor en un circuito RC en serie sujeto a las condiciones indicadas.

73. $q(0) = 0$, $R = 2.5\ \Omega$, $C = 0.08$ f, $E(t)$ dada en la figura 7.3.19.

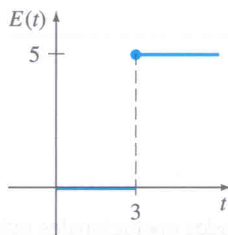


FIGURA 7.3.19 $E(t)$ en el problema 73.

74. $q(0) = q_0$, $R = 10\ \Omega$, $C = 0.1$ f, $E(t)$ dada en la figura 7.3.20.

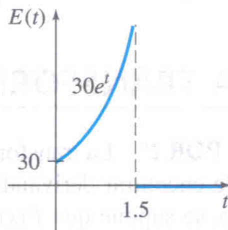


FIGURA 7.3.20 $E(t)$ en el problema 74.

75. **a)** Use la transformada de Laplace para encontrar la corriente $i(t)$ en un circuito LR en serie de una sola malla cuando $i(0) = 0$, $L = 1$ h, $R = 10\ \Omega$ y $E(t)$ es como se ilustra en la figura 7.3.21.

b) Use un programa de computadora para graficar y dibuje $i(t)$ en el intervalo $0 \le t \le 6$. Use la gráfica para estimar $i_{máx}$ e $i_{mín}$, los valores máximo y mínimo de la corriente.

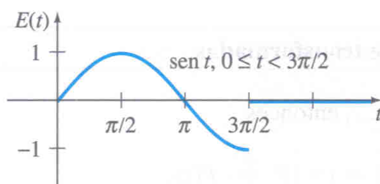


FIGURA 7.3.21 $E(t)$ en el problema 75.

76. **a)** Use 1a transformada de Laplace para determinar 1a carga $q(t)$ en el capacitor en un circuito RC en serie cuando $q(0) = 0$, $R = 50\ \Omega$, $C = 0.01$ f y $E(t)$ es como se muestra en la figura 7.3.22.

b) Suponga que $E_0 = 100$ V. Use un programa de computadora para graficar y dibuje $q(t)$ para $0 \le t \le 6$. Use la gráfica para estimar $q_{máx}$ el valor máximo de 1a carga.

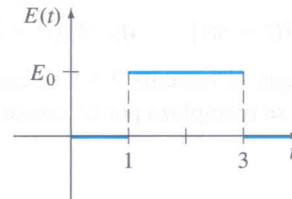


FIGURA 7.3.22 $E(t)$ en el problema 76.

77. Una viga en voladizo está empotrada en su extremo izquierdo y libre en su extremo derecho. Use 1a transformada de Laplace para determinar la deflexión $y(x)$ cuando la carga está dada por

$$w(x) = \begin{cases} w_0, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 \le x < L. \end{cases}$$

78. Resuelva el problema 77 cuando la carga está dada por

$$w(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L/3 \\ w_0, & L/3 < x < 2L/3 \\ 0, & 2L/3 < x < L. \end{cases}$$

79. Encuentre la deflexión $y(x)$ de una viga en voladizo empotrada en su extremo izquierdo y libre en su extremo derecho cuando la carga total es como se da en el ejemplo 9.

80. Una viga está empotrada en su extremo izquierdo y apoyada simplemente en el extremo derecho. Encuentre la deflexión $y(x)$ cuando la carga es como la que se da en el problema 77.

Modelo matemático

81. **Pastel dentro de un horno** Lea de nuevo el ejemplo 4 en la sección 3.1 acerca del enfriamiento de un pastel que se saca de un horno.

a) Diseñe un modelo matemático para la temperatura de un pastel mientras está dentro del horno con base en las siguientes suposiciones: en $t = 0$ la mezcla de pastel está a temperatura ambiente de 70°; el horno no se precalienta por lo que en $t = 0$, cuando la mezcla de pastel se coloca dentro del horno, la temperatura dentro del horno también es 70°; la temperatura del horno aumenta linealmente hasta $t = 4$ minutos, cuando se alcanza la temperatura deseada de 300°; la temperatura del horno se mantiene constante en 300° para $t \ge 4$.

b) Use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales del inciso a).

71. Suponga que un peso de 32 libras estira un resorte 2 pies. Si el peso se libera a partir del reposo en la posición de equilibrio, determine la ecuación de movimiento $x(t)$ si una fuerza $f(t) = 20t$ actúa en el sistema para $0 \leq t < 5$ y luego se retira (véase el ejemplo 5). Desprecie cualquier fuerza de amortiguamiento. Use un programa de graficación para trazar $x(t)$ en el intervalo [0, 10].

72. Resuelva el problema 71 si la fuerza aplicada $f(t) = \operatorname{sen} t$ actúa en el sistema para $0 \leq t < 2\pi$ y después se retira.

En los problemas 73 y 74 use la transformada de Laplace para encontrar la carga $q(t)$ en el capacitor en un circuito RC en serie sujeto a las condiciones indicadas.

73. $q(0) = 0$, $R = 2.5\ \Omega$, $C = 0.08$ f, $E(t)$ dada en la figura 7.3.19.

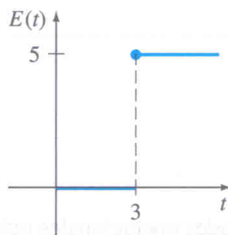


FIGURA 7.3.19 $E(t)$ en el problema 73.

74. $q(0) = q_0$, $R = 10\ \Omega$, $C = 0.1$ f, $E(t)$ dada en la figura 7.3.20.

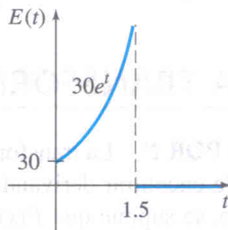


FIGURA 7.3.20 $E(t)$ en el problema 74.

75. **a)** Use la transformada de Laplace para encontrar la corriente $i(t)$ en un circuito LR en serie de una sola malla cuando $i(0) = 0$, $L = 1$ h, $R = 10\ \Omega$ y $E(t)$ es como se ilustra en la figura 7.3.21.

b) Use un programa de computadora para graficar y dibuje $i(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 6$. Use la gráfica para estimar $i_{máx}$ e $i_{mín}$, los valores máximo y mínimo de la corriente.

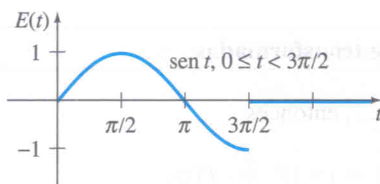


FIGURA 7.3.21 $E(t)$ en el problema 75.

76. **a)** Use la transformada de Laplace para determinar la carga $q(t)$ en el capacitor en un circuito RC en serie cuando $q(0) = 0$, $R = 50\ \Omega$, $C = 0.01$ f y $E(t)$ es como se muestra en la figura 7.3.22.

b) Suponga que $E_0 = 100$ V. Use un programa de computadora para graficar y dibuje $q(t)$ para $0 \leq t \leq 6$. Use la gráfica para estimar $q_{máx}$ el valor máximo de la carga.

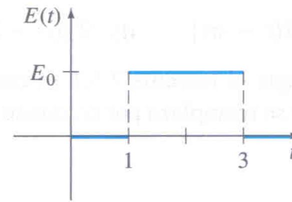


FIGURA 7.3.22 $E(t)$ en el problema 76.

77. Una viga en voladizo está empotrada en su extremo izquierdo y libre en su extremo derecho. Use la transformada de Laplace para determinar la deflexión $y(x)$ cuando la carga está dada por

$$w(x) = \begin{cases} w_0, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 \leq x < L. \end{cases}$$

78. Resuelva el problema 77 cuando la carga está dada por

$$w(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L/3 \\ w_0, & L/3 < x < 2L/3 \\ 0, & 2L/3 < x < L. \end{cases}$$

79. Encuentre la deflexión $y(x)$ de una viga en voladizo empotrada en su extremo izquierdo y libre en su extremo derecho cuando la carga total es como se da en el ejemplo 9.

80. Una viga está empotrada en su extremo izquierdo y apoyada simplemente en el extremo derecho. Encuentre la deflexión $y(x)$ cuando la carga es como la que se da en el problema 77.

Modelo matemático

81. **Pastel dentro de un horno** Lea de nuevo el ejemplo 4 en la sección 3.1 acerca del enfriamiento de un pastel que se saca de un horno.

a) Diseñe un modelo matemático para la temperatura de un pastel mientras está dentro del horno con base en las siguientes suposiciones: en $t = 0$ la mezcla de pastel está a temperatura ambiente de 70°; el horno no se precalienta por lo que en $t = 0$, cuando la mezcla de pastel se coloca dentro del horno, la temperatura dentro del horno también es 70°; la temperatura del horno aumenta linealmente hasta $t = 4$ minutos, cuando se alcanza la temperatura deseada de 300°; la temperatura del horno se mantiene constante en 300° para $t \geq 4$.

b) Use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales del inciso a).

Problemas para analizar

82. Analice cómo se podría arreglar cada una de las siguientes funciones, de tal forma que el teorema 7.3.2 se pudiera usar directamente para encontrar la transformada de Laplace dada. Compruebe sus respuestas con la ecuación (16) de esta sección.

a) $\mathscr{L}\{(2t + 1)\mathscr{U}(t - 1)\}$ **b)** $\mathscr{L}\{e^t\mathscr{U}(t - 5)\}$

c) $\mathscr{L}\{\cos t\, \mathscr{U}(t - \pi)\}$ **d)** $\mathscr{L}\{(t^2 - 3t)\mathscr{U}(t - 2)\}$

83. a) Suponga que el teorema 7.3.1 se cumple cuando el símbolo a se reemplaza por ki, donde k es un número real e $i^2 = -1$. Demuestre que $\mathscr{L}\{te^{kti}\}$ se puede usar para deducir

$$\mathscr{L}\{t\cos kt\} = \frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$$

$$\mathscr{L}\{t\,\text{sen}\,kt\} = \frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}.$$

b) Ahora use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales $x'' + \omega^2 x = \cos \omega t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

7.4 PROPIEDADES OPERACIONALES II

REPASO DE MATERIAL

- Definición 7.1.1
- Teoremas 7.3.1 y 7.3.2

INTRODUCCIÓN En esta sección se desarrollan varias propiedades operacionales más de la transformada de Laplace. En especial, veremos cómo encontrar la transformada de una función $f(t)$ que se multiplica por un monomio t^n, la transformada de un tipo especial de integral y la transformada de una función periódica. Las dos últimas propiedades de transformada permiten resolver ecuaciones que no se han encontrado hasta este punto: ecuaciones integrales de Volterra, ecuaciones integrodiferenciales y ecuaciones diferenciales ordinarias en las que la función de entrada es una función periódica definida por tramos.

7.4.1 DERIVADAS DE UNA TRANSFORMADA

MULTIPLICACIÓN DE UNA FUNCIÓN POR t^n La transformada de Laplace del producto de una función $f(t)$ con t se puede encontrar derivando la transformada de Laplace de $f(t)$. Para motivar este resultado, se supone que $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe y que es posible intercambiar el orden de la derivada y de la integral. Entonces

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}[e^{-st}f(t)]\,dt = -\int_0^\infty e^{-st}\,tf(t)\,dt = -\mathscr{L}\{tf(t)\};$$

es decir,
$$\mathscr{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

Se puede usar el último resultado para encontrar la transformada de Laplace de $t^2f(t)$:

$$\mathscr{L}\{t^2f(t)\} = \mathscr{L}\{t \cdot tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{f(t)\}\right) = \frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

Los dos casos anteriores sugieren el resultado general para $\mathscr{L}\{t^n f(t)\}$.

TEOREMA 7.4.1 Derivadas de transformadas

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces

$$\mathscr{L}\{t^nf(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s).$$

EJEMPLO 1 Uso del teorema 7.4.1

Evalúe $\mathscr{L}\{t \operatorname{sen} kt\}$.

SOLUCIÓN Con $f(t) = \operatorname{sen} kt$, $F(s) = k/(s^2 + k^2)$ y $n = 1$, el teorema 7.4.1 da

$$\mathscr{L}\{t \operatorname{sen} kt\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{\operatorname{sen} kt\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{s^2 + k^2}\right) = \frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}.$$ ■

Si se quiere evaluar $\mathscr{L}\{t^2 \operatorname{sen} kt\}$ y $\mathscr{L}\{t^3 \operatorname{sen} kt\}$, todo lo que se necesita hacer, a su vez, es tomar el negativo de la derivada respecto a s del resultado del ejemplo 1 y después tomar el negativo de la derivada respecto a s de $\mathscr{L}\{t^2 \operatorname{sen} kt\}$.

NOTA Para encontrar transformadas de funciones $t^n e^{at}$, se puede usar el teorema 7.3.1 o el teorema 7.4.1. Por ejemplo,

$$\text{Teorema 7.3.1:} \quad \mathscr{L}\{te^{3t}\} = \mathscr{L}\{t\}_{s \to s-3} = \left.\frac{1}{s^2}\right|_{s \to s-3} = \frac{1}{(s-3)^2}.$$

$$\text{Teorema 7.4.1:} \quad \mathscr{L}\{te^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{e^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-3} = (s-3)^{-2} = \frac{1}{(s-3)^2}.$$

EJEMPLO 2 Un problema con valores iniciales

Resuelva $x'' + 16x = \cos 4t$, $\quad x(0) = 0$, $\quad x'(0) = 1$.

SOLUCIÓN El problema con valores iniciales podría describir el movimiento forzado, no amortiguado y en resonancia de una masa en un resorte. La masa comienza con una velocidad inicial de 1 pie/s en dirección hacia abajo desde la posición de equilibrio.

Transformando la ecuación diferencial, se obtiene

$$(s^2 + 16)X(s) = 1 + \frac{s}{s^2 + 16} \quad \text{o} \quad X(s) = \frac{1}{s^2 + 16} + \frac{s}{(s^2 + 16)^2}.$$

Ahora bien, en el ejemplo 1 se vio que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}\right\} = t \operatorname{sen} kt \tag{1}$$

y por tanto, identificando $k = 4$ en (1) y en el inciso d) del teorema 7.2.1, se obtiene

$$x(t) = \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2 + 16}\right\} + \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{(s^2 + 16)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{8} t \operatorname{sen} 4t$$ ■

7.4.2 TRANSFORMADAS DE INTEGRALES

CONVOLUCIÓN Si las funciones f y g son continuas por tramos en $[0, \infty)$, entonces un producto especial, denotado por $f * g$, se define mediante la integral

$$f * g = \int_0^t f(\tau)\, g(t - \tau)\, d\tau \tag{2}$$

y se llama **convolución** de f y g. La convolución de $f * g$ es una función de t. Por ejemplo,

$$e^t * \operatorname{sen} t = \int_0^t e^\tau \operatorname{sen}(t - \tau)\, d\tau = \frac{1}{2}(-\operatorname{sen} t - \cos t + e^t). \tag{3}$$

Se deja como ejercicio demostrar que

$$\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau;$$

es decir, $f * g = g * f$. Esto significa que la convolución de dos funciones es conmutativa.

No es cierto que la integral de un producto de funciones sea el producto de las integrales. Sin embargo, es cierto que la transformada de Laplace del producto especial (2), es el producto de la transformada de Laplace de f y g. Esto significa que es posible determinar la transformada de Laplace de la convolución de dos funciones sin evaluar en realidad la integral como se hizo en (3). El resultado que sigue se conoce como **teorema de convolución.**

TEOREMA 7.4.2 Teorema de convolución

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathscr{L}\{f * g\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\, \mathscr{L}\{g(t)\} = F(s)G(s).$$

DEMOSTRACIÓN Sea $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau$

y $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta)\, d\beta.$

Procediendo formalmente, tenemos

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau\right)\left(\int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta)\, d\beta\right) \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} f(\tau) g(\beta)\, d\tau\, d\beta \\ &= \int_0^\infty f(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} g(\beta)\, d\beta. \end{aligned}$$

Conservando τ fija, hacemos $t = \tau + \beta$, $dt = d\beta$, por lo que

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)\, d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} g(t-\tau)\, dt.$$

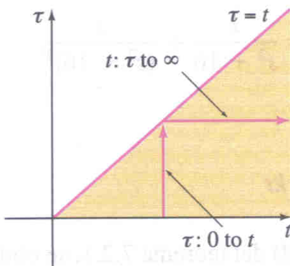


FIGURA 7.4.1 Cambio del orden de integración de primero t a primero τ.

En el plano $t\tau$ se realiza la integración en la región sombreada de la figura 7.4.1. Puesto que f y g son continuas por tramos en $[0,\infty)$ y de orden exponencial, es posible intercambiar el orden de integración:

$$F(s)\, G(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\right\} dt = \mathscr{L}\{f * g\}.$$ ■

EJEMPLO 3 Transformada de una convolución

Evalúe $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^\tau \operatorname{sen}(t-\tau)\, d\tau\right\}$.

SOLUCIÓN Con $f(t) = e^t$ y $g(t) = \operatorname{sen} t$, el teorema de convolución establece que la transformada de Laplace de la convolución de f y g es el producto de sus transformadas de Laplace:

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^\tau \operatorname{sen}(t-\tau)\, d\tau\right\} = \mathscr{L}\{e^t\} \cdot \mathscr{L}\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}.$$ ■

INVERSA DEL TEOREMA 7.4.2 El teorema de convolución en ocasiones es útil para encontrar la transformada de Laplace inversa del producto de dos transformadas de Laplace. Del teorema 7.4.2, se tiene

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g. \tag{4}$$

Muchos de los resultados de la tabla de transformadas de Laplace en el apéndice III, se pueden obtener usando la ecuación (4). En el ejemplo siguiente, se obtiene el elemento 25 de la tabla:

$$\mathscr{L}\{\operatorname{sen} kt - kt\cos kt\} = \frac{2k^3}{(s^2+k^2)^2}. \tag{5}$$

EJEMPLO 4 Transformada inversa como una convolución

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\}$.

SOLUCIÓN Sea $F(s) = G(s) = \dfrac{1}{s^2+k^2}$ por lo que

$$f(t) = g(t) = \frac{1}{k}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \frac{1}{k}\operatorname{sen} kt.$$

En este caso la ecuación (4) da

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \frac{1}{k^2}\int_0^t \operatorname{sen} k\tau \operatorname{sen} k(t-\tau)\,d\tau. \tag{6}$$

Con la ayuda de la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

y las sustituciones $A = k\tau$ y $B = k(t-\tau)$ se puede realizar la integración en (6):

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} &= \frac{1}{2k^2}\int_0^t [\cos k(2\tau - t) - \cos kt]\,d\tau \\ &= \frac{1}{2k^2}\left[\frac{1}{2k}\operatorname{sen} k(2\tau-t) - \tau\cos kt\right]_0^t \\ &= \frac{\operatorname{sen} kt - kt\cos kt}{2k^3}.\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por $2k^3$, se obtiene la forma inversa de (5). ■

TRANSFORMADA DE UNA INTEGRAL Cuando $g(t) = 1$ y $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s) = 1/s$, el teorema de convolución implica que la transformada de Laplace de la integral de f es

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}. \tag{7}$$

La forma inversa de (7),

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}, \tag{8}$$

se puede usar en lugar de las fracciones parciales cuando s^n es un factor del denominador y $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ es fácil de integrar. Por ejemplo, se sabe para $f(t) = \operatorname{sen} t$ que $F(s) = 1/(s^2+1)$ y por tanto usando la ecuación (8)

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \operatorname{sen}\tau\,d\tau = 1 - \cos t$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (1-\cos\tau)\,d\tau = t - \operatorname{sen} t$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (\tau - \operatorname{sen}\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}t^2 - 1 + \cos t$$

etcétera.

ECUACIÓN INTEGRAL DE VOLTERRA El teorema de convolución y el resultado en (7) son útiles para resolver otros tipos de ecuaciones en las que una función desconocida aparece bajo un signo de integral. En el ejemplo siguiente se resuelve una **ecuación integral de Volterra** para $f(t)$,

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau. \tag{9}$$

Las funciones $g(t)$ y $h(t)$ son conocidas. Observe que la integral en (9) tiene la forma de convolución (2) con el símbolo h jugando el papel de g.

EJEMPLO 5 Una ecuación integral

Resuelva $f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \displaystyle\int_0^t f(\tau)\, e^{t-\tau} d\tau$ para $f(t)$.

SOLUCIÓN En la integral se identifica $h(t-\tau) = e^{t-\tau}$ por lo que $h(t) = e^t$. Se toma la transformada de Laplace de cada término; en particular, por el teorema 7.4.2 la transformada de Laplace es el producto de $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathscr{L}\{e^t\} = 1/(s-1)$.

$$F(s) = 3 \cdot \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s+1} - F(s) \cdot \frac{1}{s-1}.$$

Después de resolver la última ecuación para $F(s)$ y realizar la descomposición en fracciones parciales, se encuentra

$$F(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1}.$$

La transformada inversa entonces da

$$\begin{aligned} f(t) &= 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= 3t^2 - t^3 + 1 - 2e^{-t}. \end{aligned}$$

■

CIRCUITOS EN SERIE En una sola malla o circuito en serie, la segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de las caídas de voltaje en un inductor, resistor y capacitor es igual al voltaje aplicado $E(t)$. Ahora se sabe que las caídas de voltaje en un inductor, resistor y capacitor son, respectivamente,

$$L\frac{di}{dt}, \quad Ri(t), \quad \text{y} \quad \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\, d\tau,$$

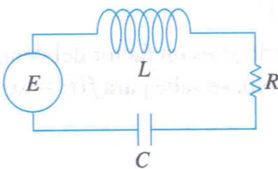


FIGURA 7.4.2 Circuito *RCL* en serie.

donde $i(t)$ es la corriente y L, R y C son constantes. Se deduce que la corriente en un circuito, como el que se muestra en la figura 7.4.2, está gobernada por la **ecuación integrodiferencial**

$$L\frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\, d\tau = E(t). \tag{10}$$

EJEMPLO 6 Una ecuación integrodiferencial

Determine la corriente $i(t)$ en un circuito *RCL* de un sola malla cuando $L = 0.1$ h, $R = 2\ \Omega$, $C = 0.1$ f, $i(0) = 0$ y el voltaje aplicado es

$$E(t) = 120t - 120t\,\mathcal{U}(t-1).$$

SOLUCIÓN Con los datos dados, la ecuación (10) se convierte en

$$0.1\frac{di}{dt} + 2i + 10\int_0^t i(\tau)\,d\tau = 120t - 120t\,\mathcal{U}(t-1).$$

Ahora usando (7), $\mathscr{L}\{\int_0^t i(\tau)\,d\tau\} = I(s)/s$, donde $I(s) = \mathscr{L}\{i(t)\}$. Por lo que la transformada de Laplace de la ecuación integrodiferencial es

$$0.1sI(s) + 2I(s) + 10\frac{I(s)}{s} = 120\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s}\right]. \quad \leftarrow \text{por (16) de la sección 7.3}$$

Multiplicando esta ecuación por $10s$, usando $s^2 + 20s + 100 = (s+10)^2$ y después al despejar $I(s)$, se obtiene

$$I(s) = 1200\left[\frac{1}{s(s+10)^2} - \frac{1}{s(s+10)^2}e^{-s} - \frac{1}{(s+10)^2}e^{-s}\right].$$

Usando fracciones parciales,

$$I(s) = 1200\left[\frac{1/100}{s} - \frac{1/100}{s+10} - \frac{1/10}{(s+10)^2} - \frac{1/100}{s}e^{-s} \right.$$
$$\left. + \frac{1/100}{s+10}e^{-s} + \frac{1/10}{(s+10)^2}e^{-s} - \frac{1}{(s+10)^2}e^{-s}\right].$$

De la forma inversa del segundo teorema de traslación (15) de la sección 7.3, finalmente se obtiene

$$i(t) = 12[1 - \mathcal{U}(t-1)] - 12[e^{-10t} - e^{-10(t-1)}\mathcal{U}(t-1)]$$
$$- 120te^{-10t} - 1080(t-1)e^{-10(t-1)}\mathcal{U}(t-1).$$

Escrita como una función definida por tramos, la corriente es

$$i(t) = \begin{cases} 12 - 12e^{-10t} - 120te^{-10t}, & 0 \le t < 1 \\ -12e^{-10t} + 12e^{-10(t-1)} - 120te^{-10t} - 1080(t-1)e^{-10(t-1)}, & t \ge 1. \end{cases}$$

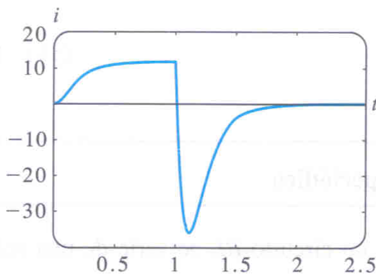


FIGURA 7.4.3 Gráfica de corriente $i(t)$ del ejemplo 6.

Con esta última expresión y un SAC, se traza la gráfica $i(t)$ en cada uno de los dos intervalos y después se combinan las gráficas. Observe en la figura 7.4.3 que aun cuando la función de entrada $E(t)$ es discontinua, la salida o respuesta $i(t)$ es una función continua. ■

7.4.3 TRANSFORMADA DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA

FUNCIÓN PERIÓDICA Si una función periódica tiene periodo T, $T > 0$, entonces $f(t + T) = f(t)$. El siguiente teorema muestra que la transformada de Laplace de una función periódica se obtiene integrando sobre un periodo.

TEOREMA 7.4.3 Transformada de una función periódica

Si $f(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$, de orden exponencial y periódica con periodo T, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt.$$

DEMOSTRACIÓN Escriba la transformada de Laplace de f como dos integrales:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt.$$

Cuando se hace $t = u + T$, la última integral se convierte en

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-s(u+T)} f(u+T)\,du = e^{-sT}\int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du = e^{-sT}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

Por tanto, $$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + e^{-sT}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

Resolviendo la ecuación de la última línea para $\mathscr{L}\{f(t)\}$ se demuestra el teorema. ■

EJEMPLO 7 Aplicación de un voltaje periódico

Encuentre la transformada de Laplace de la función periódica que se muestra en la figura 7.4.4.

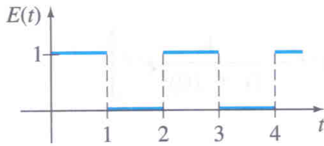


FIGURA 7.4.4 Onda cuadrada.

SOLUCIÓN La función $E(t)$ se llama de onda cuadrada y tiene periodo $T = 2$. En el intervalo $0 \le t < 2$, $E(t)$ se puede definir por

$$E(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

y fuera del intervalo por $f(t + 2) = f(t)$. Ahora del teorema 7.4.3

$$\mathscr{L}\{E(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}E(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}\cdot 1\,dt + \int_1^2 e^{-st}\cdot 0\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\,\frac{1-e^{-s}}{s} \qquad \leftarrow 1 - e^{-2s} = (1+e^{-s})(1-e^{-s})$$

$$= \frac{1}{s(1+e^{-s})}. \tag{11}$$ ■

EJEMPLO 8 Aplicación de un voltaje periódico

La ecuación diferencial para la corriente $i(t)$ en un circuito RL en serie de una sola malla es

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t). \tag{12}$$

Determine la corriente $i(t)$ cuando $i(0) = 0$ y $E(t)$ es la función de onda cuadrada que se muestra en la figura 7.4.4.

SOLUCIÓN Si se usa el resultado de (11) del ejemplo anterior, la transformada de Laplace de la ED es

$$LsI(s) + RI(s) = \frac{1}{s(1+e^{-s})} \quad \text{o} \quad I(s) = \frac{1/L}{s(s+R/L)}\cdot\frac{1}{1+e^{-s}}. \tag{13}$$

Para encontrar la transformada de Laplace inversa de la última función, primero se hace uso de la serie geométrica. Con la identificación $x = e^{-s}$, $s > 0$, la serie geométrica

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad \text{se convierte en} \quad \frac{1}{1+e^{-s}} = 1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \cdots.$$

De
$$\frac{1}{s(s+R/L)} = \frac{L/R}{s} - \frac{L/R}{s+R/L}$$

se puede reescribir la ecuación (13) como

$$I(s) = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+R/L}\right)(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \cdots)$$
$$= \frac{1}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} + \cdots\right) - \frac{1}{R}\left(\frac{1}{s+R/L} - \frac{1}{s+R/L}e^{-s} + \frac{e^{-2s}}{s+R/L} - \frac{e^{-3s}}{s+R/L} + \cdots\right).$$

Aplicando la forma del segundo teorema de traslación a cada término de ambas series, se obtiene

$$i(t) = \frac{1}{R}(1 - \mathscr{U}(t-1) + \mathscr{U}(t-2) - \mathscr{U}(t-3) + \cdots)$$
$$- \frac{1}{R}(e^{-Rt/L} - e^{-R(t-1)/L}\,\mathscr{U}(t-1) + e^{-R(t-2)/L}\,\mathscr{U}(t-2) - e^{-R(t-3)/L}\,\mathscr{U}(t-3) + \cdots)$$

o, de forma equivalente

$$i(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-Rt/L}) + \frac{1}{R}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1 - e^{-R(t-n)/L})\,\mathscr{U}(t-n).$$

Para interpretar la solución, se supone por razones de ejemplificación que $R = 1$, $L = 1$ y $0 \le t < 4$. En este caso

$$i(t) = 1 - e^{-t} - (1 - e^{t-1})\,\mathscr{U}(t-1) + (1 - e^{-(t-2)})\,\mathscr{U}(t-2) - (1 - e^{-(t-3)})\,\mathscr{U}(t-3);$$

en otras palabras,

$$i(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & 0 \le t < 1 \\ -e^{-t} + e^{-(t-1)}, & 1 \le t < 2 \\ 1 - e^{-t} + e^{-(t-1)} - e^{-(t-2)}, & 2 \le t < 3 \\ -e^{-t} + e^{-(t-1)} - e^{-(t-2)} + e^{-(t-3)}, & 3 \le t < 4. \end{cases}$$

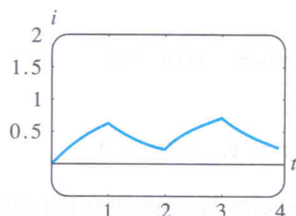


FIGURA 7.4.5 Gráfica de la corriente $i(t)$ en ejemplo 8.

La gráfica de $i(t)$ en el intervalo $0 \le t < 4$, que se muestra en la figura 7.4.5, se obtuvo con la ayuda de un SAC. ■

EJERCICIOS 7.4

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-11.

7.4.1 DERIVADAS DE UNA TRANSFORMADA

En los problemas 1 a 8 use el teorema 7.4.1 para evaluar cada una de las transformadas de Laplace.

1. $\mathscr{L}\{te^{-10t}\}$

2. $\mathscr{L}\{t^3e^t\}$

3. $\mathscr{L}\{t\cos 2t\}$

4. $\mathscr{L}\{t\,\text{senh}\,3t\}$

5. $\mathscr{L}\{t^2\,\text{senh}\,t\}$

6. $\mathscr{L}\{t^2\cos t\}$

7. $\mathscr{L}\{te^{2t}\text{sen}\,6t\}$

8. $\mathscr{L}\{te^{-3t}\cos 3t\}$

En los problemas 9 a 14, use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales dado. Use la tabla de transformadas de Laplace del apéndice III cuando sea necesario.

9. $y' + y = t\,\text{sen}\,t, \quad y(0) = 0$

10. $y' - y = te^t\,\text{sen}\,t, \quad y(0) = 0$

11. $y'' + 9y = \cos 3t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$

12. $y'' + y = \text{sen}\,t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

13. $y'' + 16y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$, donde

$$f(t) = \begin{cases} \cos 4t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$$

14. $y'' + y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi/2 \\ \text{sen}\,t, & t \ge \pi/2 \end{cases}$$

En los problemas 15 y 16, use un programa de graficación para trazar la gráfica de la solución indicada.

15. $y(t)$ del problema 13 en el intervalo $0 \le t < 2\pi$

16. $y(t)$ del problema 14 en el intervalo $0 \le t < 3\pi$

En algunos casos, la transformada de Laplace se puede usar para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes monomiales variables. En los problemas 17 y 18, use el teorema 7.4.1 para reducir la ecuación diferencial dada a una ED lineal de primer orden en la función transformada. Resuelva la ED de primer orden para $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$ y después encuentre $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

17. $ty'' - y' = 2t^2, \quad y(0) = 0$

18. $2y'' + ty' - 2y = 10, \quad y(0) = y'(0) = 0$

7.4.2 TRANSFORMADAS DE INTEGRALES

En los problemas 19 a 30, use el teorema 7.4.2 para evaluar cada una de las transformadas de Laplace. No evalúe la integral antes de transformar.

19. $\mathscr{L}\{1 * t^3\}$

20. $\mathscr{L}\{t^2 * te^t\}$

21. $\mathscr{L}\{e^{-t} * e^t \cos t\}$

22. $\mathscr{L}\{e^{2t} * \operatorname{sen} t\}$

23. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^{\tau}\, d\tau\right\}$

24. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \cos\tau\, d\tau\right\}$

25. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau}\cos\tau\, d\tau\right\}$

26. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \tau\operatorname{sen}\tau\, d\tau\right\}$

27. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \tau\, e^{t-\tau}\, d\tau\right\}$

28. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \operatorname{sen}\tau\cos(t-\tau)\, d\tau\right\}$

29. $\mathscr{L}\left\{t\int_0^t \operatorname{sen}\tau\, d\tau\right\}$

30. $\mathscr{L}\left\{t\int_0^t \tau\, e^{-\tau}\, d\tau\right\}$

En los problemas 31 a 34, use (8) para evaluar cada transformada inversa.

31. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-1)}\right\}$

32. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-1)}\right\}$

33. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3(s-1)}\right\}$

34. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-a)^2}\right\}$

35. La tabla del apéndice III no contiene un elemento para

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8k^3 s}{(s^2+k^2)^3}\right\}.$$

a) Use (4) junto con los resultados de (5) para evaluar esta transformada inversa. Utilice un SAC como ayuda para evaluar la integral de convolución.

b) Vuelva a analizar su respuesta del inciso a). ¿Podría haber obtenido el resultado en una forma diferente?

36. Emplee la transformada de Laplace y los resultados del problema 35 para resolver el problema con valores iniciales

$$y'' + y = \operatorname{sen} t + t\operatorname{sen} t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Use un programa de graficación para trazar la solución.

En los problemas 37 a 46, use la transformada de Laplace para resolver la ecuación integral o la ecuación integrodiferencial.

37. $f(t) + \int_0^t (t-\tau)f(\tau)\, d\tau = t$

38. $f(t) = 2t - 4\int_0^t \operatorname{sen}\tau\, f(t-\tau)\, d\tau$

39. $f(t) = te^t + \int_0^t \tau f(t-\tau)\, d\tau$

40. $f(t) + 2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)\, d\tau = 4e^{-t} + \operatorname{sen} t$

41. $f(t) + \int_0^t f(\tau)\, d\tau = 1$

42. $f(t) = \cos t + \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau)\, d\tau$

43. $f(t) = 1 + t - \dfrac{8}{3}\int_0^t (\tau - t)^3 f(\tau)\, d\tau$

44. $t - 2f(t) = \int_0^t (e^{\tau} - e^{-\tau})f(t-\tau)\, d\tau$

45. $y'(t) = 1 - \operatorname{sen} t - \int_0^t y(\tau)\, d\tau, \quad y(0) = 0$

46. $\dfrac{dy}{dt} + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)\, d\tau = 1, \quad y(0) = 0$

En los problemas 47 y 48, resuelva la ecuación (10) sujeta a $i(0) = 0$ con L, R, C y $E(t)$ como se dan para cada problema. Use un programa de graficación para trazar la solución en el intervalo $0 \le t < 3$.

47. $L = 0.1$ h, $R = 3\ \Omega$, $C = 0.05$ f,
$E(t) = 100[\mathscr{U}(t-1) - \mathscr{U}(t-2)]$

48. $L = 0.005$ h, $R = 1\ \Omega$, $C = 0.02$ f,
$E(t) = 100[t - (t-1)\mathscr{U}(t-1)]$

7.4.3 TRANSFORMADA DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA

En los problemas 49 a 54 use el teorema 7.4.3 para determinar la transformada de Laplace de cada una de las funciones periódicas.

49.

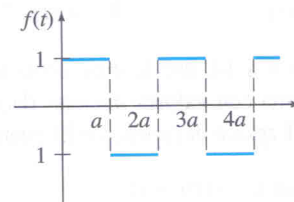
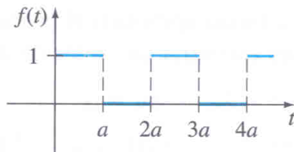


FIGURA 7.4.6 Gráfica para el problema 49.

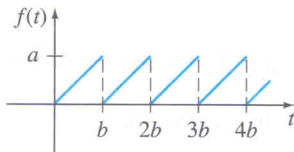
50.



función de onda cuadrada

FIGURA 7.4.7 Gráfica para el problema 50.

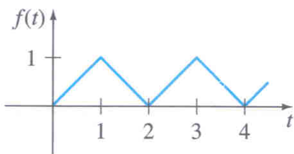
51.



función diente de sierra

FIGURA 7.4.8 Gráfica para el problema 51.

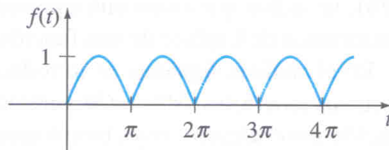
52.



función triangular

FIGURA 7.4.9 Gráfica para el problema 52.

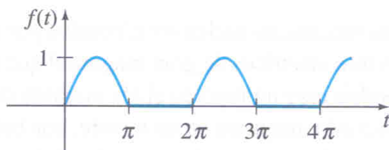
53.



rectificación de onda completa de sen t

FIGURA 7.4.10 Gráfica para el problema 53.

54.



rectificación de media onda de sen t

FIGURA 7.4.11 Gráfica para el problema 54.

En los problemas 55 y 56 resuelva la ecuación (12) sujeta a $i(0) = 0$ con $E(t)$ como se indica. Use un programa de graficación para trazar la solución en el intervalo $0 \le t < 4$ en el caso cuando $L = 1$ y $R = 1$.

55. $E(t)$ es la función serpenteante del problema 49 con amplitud 1 y $a = 1$.

56. $E(t)$ es la función diente de sierra del problema 51 con amplitud 1 y $b = 1$.

En los problemas 57 y 58 resuelva el modelo para un sistema forzado resorte/masa con amortiguamiento

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

donde la función forzada f es como se especifica. Utilice un programa de graficación para trazar $x(t)$ en los valores indicados de t.

57. $m = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $k = 5$, f es la función serpenteante del problema 49 con amplitud 10, y $a = \pi$, $0 \le t < 2\pi$.

58. $m = 1$, $\beta = 2$, $k = 1$, f es la función de onda cuadrada del problema 50 con amplitud 5, y $a = \pi$, $0 \le t < 4\pi$.

Problemas para analizar

59. Examine cómo se puede usar el teorema 7.4.1 para encontrar

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\frac{s-3}{s+1}\right\}.$$

60. En la sección 6.3 vimos que $ty'' + y' + ty = 0$ es la ecuación de Bessel de orden $v = 0$. En vista de (22) de esta sección y de la tabla 6.1, una solución del problema con valores iniciales $ty'' + y' + ty = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, es $y = J_0(t)$. Use este resultado y el procedimiento descrito en las instrucciones de los problemas 17 y 18 para demostrar que

$$\mathscr{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}.$$

[*Sugerencia*: Podría ser necesario usar el problema 46 de los ejercicios 7.2].

61. a) Se sabe que la **ecuación diferencial de Laguerre**

$$ty'' + (1 - t)y' + ny = 0$$

tiene soluciones polinomiales cuando n es un entero no negativo. Estas soluciones naturalmente se llaman **polinomios de Laguerre** y se denotan por $L_n(t)$. Determine $y = L_n(t)$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ si se sabe que $L_n(0) = 1$.

b) Demuestre que

$$\mathscr{L}\left\{\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}t^ne^{-t}\right\} = Y(s),$$

donde $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}$ y $y = L_n(t)$ es una solución polinomial de la ED del inciso a). Concluya que

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}t^ne^{-t}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Esta última relación para generar los polinomios de Laguerre es el análogo de la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre. Véase (30) en la sección 6.3.

Tarea para el laboratorio de computación

62. En este problema se indican las instrucciones de *Mathematica* que permiten obtener la transformada de Laplace simbólica de una ecuación diferencial y la solución del problema de valores iniciales al encontrar la transformada inversa. En *Mathematica* la transformada de Laplace de una función $y(t)$ se obtiene usando **LaplaceTransform [y[t], t, s]**. En el renglón dos de la sintaxis se reemplaza **LaplaceTransform [y[t], t, s]** por el símbolo **Y**. (*Si no tiene* Mathematica, *entonces adapte el procedimiento dado encontrando la sintaxis correspondiente para el SAC que tenga a la mano.*)

Considere el problema con valores iniciales

$$y'' + 6y' + 9y = t \operatorname{sen} t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

Cargue el paquete de transformada de Laplace. Reproduzca con precisión y después, a su vez, ejecute cada renglón de la siguiente secuencia de instrucciones. Copie los resultados a mano o imprímalo.

```
diffequat = y"[t] + 6y'[t] + 9y[t] == t Sin[t]
transformdeq = LaplaceTransform [diffequat, t, s] /.
   {y[0] - > 2, y'[0] - > -1,
   LaplaceTransform [y[t], t, s] - > Y}
soln = Solve[transformdeq, Y]//Flatten
Y = Y/.soln
InverseLaplaceTransform[Y, s, t]
```

63. Modifique de forma apropiada el procedimiento del problema 62 para encontrar una solución de

$$y''' + 3y' - 4y = 0,$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$$

64. La carga $q(t)$ en un capacitor en un circuito CL en serie está dada por

$$\frac{d^2q}{dt^2} + q = 1 - 4\mathcal{U}(t - \pi) + 6\mathcal{U}(t - 3\pi),$$
$$q(0) = 0, \quad q'(0) = 0.$$

Modifique de forma apropiada el procedimiento del problema 62 para determinar $q(t)$. Trace la gráfica de su solución.

7.5 LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC

INTRODUCCIÓN En el último párrafo de la página 261, se indicó que como una consecuencia inmediata del teorema 7.1.3, $F(s) = 1$ no puede ser la transformada de Laplace de una función f que es continua por tramos en $[0,\infty)$ y de orden exponencial. En el análisis siguiente se introduce una función que es muy diferente de las que ha estudiado en cursos anteriores. Más tarde veremos que de hecho existe una función o más precisamente, una *función generalizada*, cuya transformada de Laplace es $F(s) = 1$.

IMPULSO UNITARIO Los sistemas mecánicos suelen ser afectados por una fuerza externa (o fuerza electromotriz en un circuito eléctrico) de gran magnitud que actúa sólo por un periodo muy corto. Por ejemplo, podría caer un rayo en el ala vibrante de un avión, un martillo de bola podría golpear con precisión una masa en un resorte, una bola (de beisbol, golf, tenis) podría ser enviada por el aire al ser golpeada de modo violento con un bate, palo de golf o raqueta. Vea la figura 7.5.1. La gráfica de la función definida por partes

$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < t_0 - a \\ \dfrac{1}{2a}, & t_0 - a \le t < t_0 + a \\ 0, & t \ge t_0 + a, \end{cases} \tag{1}$$

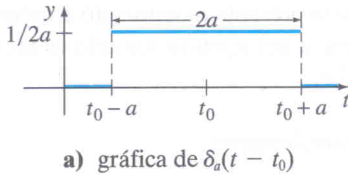


FIGURA 7.5.1 Un palo de golf aplica una fuerza de gran magnitud en la bola durante un periodo muy corto.

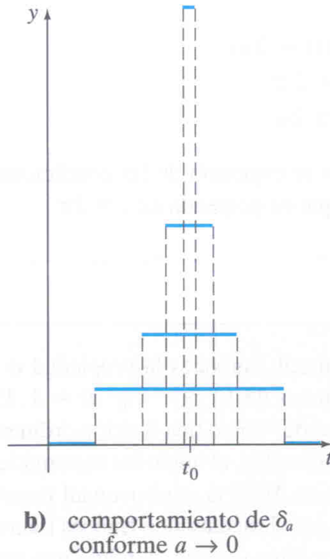
$a > 0, t_0 > 0$, que se muestra en la figura 7.5.2a, podría servir como modelo para tal fuerza. Para un valor pequeño de a, $\delta_a(t - t_0)$ es en esencia una función constante de gran magnitud que está "activada" sólo durante un periodo muy corto, alrededor de t_0. El comportamiento de $\delta_a(t - t_0)$ conforme $a \to 0$ se ilustra en la figura 7.5.2b. La función $\delta_a(t - t_0)$ se llama **impulso unitario** porque tiene la propiedad de integración $\int_0^\infty \delta_a(t - t_0)\, dt = 1$.

LA FUNCION DELTA DE DIRAC En la práctica es conveniente trabajar con otro tipo de impulso unitario, una "función" que aproxima a $\delta_a(t - t_0)$ y se define por el límite

$$\delta(t - t_0) = \lim_{a \to 0} \delta_a(t - t_0). \tag{2}$$



a) gráfica de $\delta_a(t-t_0)$



b) comportamiento de δ_a conforme $a \to 0$

FIGURA 7.5.2 Impulso unitario.

La última expresión, que no es una función en absoluto, se puede caracterizar por las dos propiedades

$$i)\ \delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0\\ 0, & t\neq t_0\end{cases} \qquad \text{y} \qquad ii)\int_0^\infty \delta(t-t_0)\,dt=1.$$

El impulso unitario $\delta(t-t_0)$ se llama **función delta de Dirac**.

Es posible obtener la transformada de Laplace de la función delta de Dirac por la suposición formal de que $\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\}=\lim_{a\to 0}\mathscr{L}\{\delta_a(t-t_0)\}$.

TEOREMA 7.5.1 Transformada de la función delta de Dirac

Para $t_0>0$, $$\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\}=e^{-st_0}. \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN Para empezar se puede escribir $\delta_a(t-t_0)$ en términos de la función escalón unitario en virtud de (11) y (12) de la sección 7.3:

$$\delta_a(t-t_0)=\frac{1}{2a}[\mathscr{U}(t-(t_0-a))-\mathscr{U}(t-(t_0+a))].$$

Por linealidad y (14) de la sección 7.3 la transformada de Laplace de esta última expresión es

$$\mathscr{L}\{\delta_a(t-t_0)\}=\frac{1}{2a}\left[\frac{e^{-s(t_0-a)}}{s}-\frac{e^{-s(t_0+a)}}{s}\right]=e^{-st_0}\left(\frac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa}\right). \tag{4}$$

Puesto que (4) tiene la forma indeterminada 0/0 conforme $a\to 0$ se aplica la regla de L'Hôpital:

$$\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\}=\lim_{a\to 0}\mathscr{L}\{\delta_a(t-t_0)\}=e^{-st_0}\lim_{a\to 0}\left(\frac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa}\right)=e^{-st_0}.$$ ■

Ahora cuando $t_0=0$, se puede concluir de (3) que

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\}=1.$$

El último resultado enfatiza el hecho de que $\delta(t)$ no es el tipo usual de función que se ha estado considerando, puesto que se espera del teorema 7.1.3 que $\mathscr{L}\{f(t)\}\to 0$ conforme $s\to\infty$.

EJEMPLO 1 Dos problemas con valores iniciales

Resuelva $y''+y=4\delta(t-2\pi)$ sujeta a

a) $y(0)=1,\quad y'(0)=0$ **b)** $y(0)=0,\quad y'(0)=0.$

Dos problemas con valores iniciales podrían servir como modelos para describir el movimiento de una masa en un resorte que se mueve en un medio en el cual el amortiguamiento es despreciable. En $t=2\pi$ la masa recibe un golpe preciso. En a) la masa se libera a partir del reposo una unidad abajo de la posición de equilibrio. En b) la masa está en reposo en la posición de equilibrio.

SOLUCIÓN **a)** De (3) la transformada de Laplace de la ecuación diferencial es

$$s^2Y(s)-s+Y(s)=4e^{-2\pi s} \quad \text{o} \quad Y(s)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{4e^{-2\pi s}}{s^2+1}.$$

Con la forma inversa del segundo teorema de traslación, se encuentra

$$y(t)=\cos t+4\operatorname{sen}(t-2\pi)\,\mathscr{U}(t-2\pi).$$

Puesto que $\operatorname{sen}(t-2\pi)=\operatorname{sen} t$, la solución anterior se puede escribir como

$$y(t)=\begin{cases}\cos t, & 0\le t<2\pi\\ \cos t+4\operatorname{sen} t, & t\ge 2\pi.\end{cases} \tag{5}$$

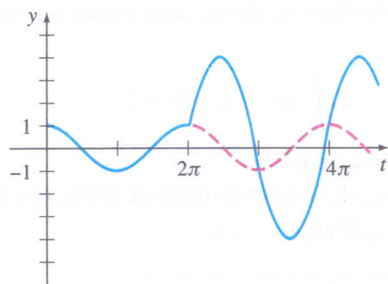


FIGURA 7.5.3 La masa es golpeada en $t = 2\pi$.

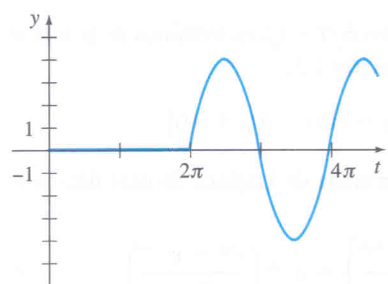


FIGURA 7.5.4 Ningún movimiento hasta que la masa es golpeada en $t = 2\pi$.

En la figura 7.5.3 se ve de la gráfica de (5) que la masa presenta movimiento armónico simple hasta que es golpeada en $t = 2\pi$. La influencia del impulso unitario es incrementar la amplitud de vibración a $\sqrt{17}$ para $t > 2\pi$.

b) En este caso la transformada de la ecuación es simplemente

$$Y(s) = \frac{4e^{-2\pi s}}{s^2 + 1},$$

y así

$$\begin{aligned} y(t) &= 4 \operatorname{sen}(t - 2\pi)\, \mathscr{U}(t - 2\pi) \\ &= \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2\pi \\ 4 \operatorname{sen} t, & t \ge 2\pi. \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

La gráfica de (6) de la figura 7.5.4 muestra, como se esperaría de las condiciones iniciales, que la masa no exhibe movimiento hasta que es golpeada en $t = 2\pi$. ■

COMENTARIOS

i) Si $\delta(t - t_0)$ fuera una función en el sentido usual, entonces la propiedad *i)* en la página 293 implicaría $\int_0^\infty \delta(t - t_0)\, dt = 0$ en vez de $\int_0^\infty \delta(t - t_0)\, dt = 1$. Debido a que la función delta de Dirac no se "comporta" como una función ordinaria, aun cuando sus usuarios produjeron resultados correctos, al inicio los matemáticos la recibieron con gran desprecio. Sin embargo, en 1940 la controversial función de Dirac fue puesta en un fundamento riguroso por el matemático francés Laurent Schwartz en su libro *La Théorie de distribution* y esto, a su vez, condujo una rama completamente nueva de la matemática conocida como la **teoría de las distribuciones** o **funciones generalizadas**. En esta teoría (2) no es una definición aceptada de $\delta(t - t_0)$, ni se habla de una función cuyos valores son ∞ o 0. Aunque se deja en paz este tema, basta decir que la función delta de Dirac se caracteriza mejor por su efecto en otras funciones. Si f es una función continua, entonces

$$\int_0^\infty f(t)\, \delta(t - t_0)\, dt = f(t_0) \tag{7}$$

se puede tomar como la *definición* de $\delta(t - t_0)$. Este resultado se conoce como **propiedad de cribado**, puesto que $\delta(t - t_0)$ tiene el efecto de separar el valor $f(t_0)$ del conjunto de valores de f en $[0,\infty)$. Note que la propiedad *ii)* (con $f(t) = 1$) y (3) (con $f(t) = e^{-st}$) son consistentes con (7).

ii) Los *Comentarios* en la sección 7.2 indicaron que la función de transferencia de una ecuación diferencial lineal general de n-ésimo orden con coeficientes constantes es $W(s) = 1/(P(s)$, donde $P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0$. La función de transferencia es la transformada de Laplace de la función $w(t)$, conocida como **función peso** de un sistema lineal. Pero $w(t)$ también se puede caracterizar en términos del análisis en cuestión. Por simplicidad se considera un sistema lineal de segundo orden en el que la entrada es un impulso unitario en $t = 0$:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = \delta(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Aplicando la transformada de Laplace y usando $\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$ se muestra que la transformada de la respuesta y en este caso es la función de transferencia

$$Y(s) = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1}{P(s)} = W(s) \quad \text{y así} \quad y = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{P(s)}\right\} = w(t).$$

De esto se puede ver, en general, que la función peso $y = w(t)$ de un sistema lineal de n-ésimo orden es la respuesta de estado cero del sistema a un impulso unitario. Por esta razón $w(t)$ también se llama **respuesta de impulso** del sistema.

EJERCICIOS 7.5 *Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-12.*

En los problemas 1 a 12, use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales.

1. $y' - 3y = \delta(t - 2), \quad y(0) = 0$

2. $y' + y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 2$

3. $y'' + y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

4. $y'' + 16y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

5. $y'' + y = \delta\left(t - \frac{1}{2}\pi\right) + \delta\left(t - \frac{3}{2}\pi\right),$
$y(0) = 0, y'(0) = 0$

6. $y'' + y = \delta(t - 2\pi) + \delta(t - 4\pi), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

7. $y'' + 2y' = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

8. $y'' - 2y' = 1 + \delta(t - 2), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

9. $y'' + 4y' + 5y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

10. $y'' + 2y' + y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

11. $y'' + 4y' + 13y = \delta(t - \pi) + \delta(t - 3\pi),$
$y(0) = 1, y'(0) = 0$

12. $y'' - 7y' + 6y = e^t + \delta(t - 2) + \delta(t - 4),$
$y(0) = 0, y'(0) = 0$

13. Una viga uniforme de longitud L soporta una carga concentrada w_0 en $x = \frac{1}{2}L$. La viga está empotrada en su extremo izquierdo y libre en su extremo derecho. Use la transformada de Laplace para determinar la deflexión $y(x)$ de

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_0\delta\left(x - \tfrac{1}{2}L\right),$$

donde $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(L) = 0$, y $y'''(L) = 0$.

14. Resuelva la ecuación diferencial del problema 13 sujeta a $y(0) = 0, y'(0) = 0, y(L) = 0, y'(L) = 0$. En este caso la viga está empotrada en ambos extremos. Véase la figura 7.5.5.

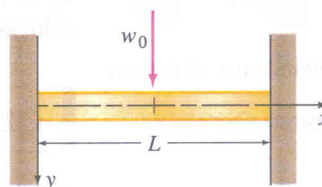


FIGURA 7.5.5 Viga en el problema 14.

Problemas para analizar

15. Alguien afirma que las soluciones de dos PVI

$$y'' + 2y' + 10y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$
$$y'' + 2y' + 10y = \delta(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

son exactamente lo mismo. ¿Está de acuerdo o no? Justifique su respuesta.

7.6 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

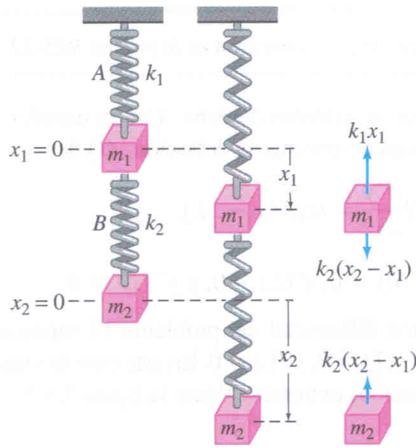
REPASO DE MATERIAL

- Solución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

INTRODUCCIÓN Cuando se especifican las condiciones iniciales, la transformada de Laplace de cada ecuación en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes reduce el sistema de ED a un conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas en las funciones transformadas. Se resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas para cada una de las funciones transformadas y luego se determinan las transformadas de Laplace inversas en la manera usual.

RESORTES ACOPLADOS Dos masas m_1 y m_2 están conectadas a dos resortes A y B de masa despreciable con constantes de resorte k_1 y k_2 respectivamente. A su vez, los dos resortes están unidos como se muestra en la figura 7.6.1. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ los desplazamientos verticales de las masas desde sus posiciones de equilibrio. Cuando el sistema está en movimiento, el resorte B está sujeto a elongación y compresión; por lo que su elongación neta es $x_2 - x_1$. Por tanto, se deduce de la ley de Hooke que los resortes A y B ejercen fuerzas $-k_1x_1$ y $k_2(x_2 - x_1)$ respectivamente, en m_1. Si ninguna fuerza externa se aplica al sistema y si ninguna fuerza de amortiguamiento está presente, entonces la fuerza neta en m_1 es $-k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$. Por la segunda ley de Newton se puede escribir

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1).$$



a) equilibrio **b)** movimiento **c)** fuerzas

FIGURA 7.6.1 Sistema resorte/masa acoplado.

De igual manera, la fuerza neta ejercida en la masa m_2 se debe sólo a la elongación neta de B; es decir, $-k_2(x_2 - x_1)$. Por tanto, se tiene

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_1).$$

En otras palabras, el movimiento del sistema acoplado se representa por el sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas de segundo orden

$$\begin{aligned} m_1x_1'' &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{1}$$

En el ejemplo siguiente se resuelve (1) bajo las suposiciones de que $k_1 = 6$, $k_2 = 4$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ y que las masas comienzan desde sus posiciones de equilibrio con velocidades unitarias opuestas.

EJEMPLO 1 Resortes acoplados

Resuelva

$$\begin{aligned} x_1'' + 10x_1 \quad - 4x_2 &= 0 \\ -4x_1 + x_2'' + 4x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

sujeta a $x_1(0) = 0, x_1'(0) = 1, x_2(0) = 0, x_2'(0) = -1.$

SOLUCIÓN La transformada de Laplace de cada ecuación es

$$\begin{aligned} s^2X_1(s) - sx_1(0) - x_1'(0) + 10X_1(s) - 4X_2(s) &= 0 \\ -4X_1(s) + s^2X_2(s) - sx_2(0) - x_2'(0) + 4X_2(s) &= 0, \end{aligned}$$

donde $X_1(s) = \mathscr{L}\{x_1(t)\}$ y $X_2(s) = \mathscr{L}\{x_2(t)\}$. El sistema anterior es igual a

$$\begin{aligned} (s^2 + 10)X_1(s) - \qquad 4X_2(s) &= 1 \\ -4X_1(s) + (s^2 + 4)X_2(s) &= -1. \end{aligned} \tag{3}$$

Resolviendo (3) para $X_1(s)$ y usando fracciones parciales en el resultado, se obtiene

$$X_1(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} = -\frac{1/5}{s^2 + 2} + \frac{6/5}{s^2 + 12},$$

y por tanto

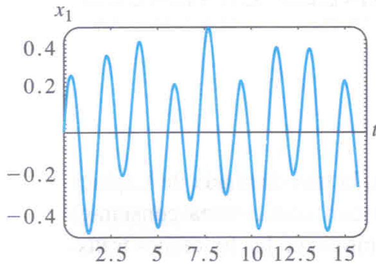
$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{1}{5\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2}\right\} + \frac{6}{5\sqrt{12}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2 + 12}\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{10}\operatorname{sen}\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{sen}2\sqrt{3}t. \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión para $X_1(s)$ en la primera ecuación de (3), se obtiene

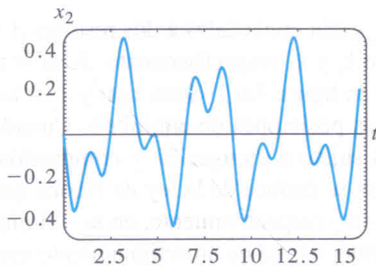
$$X_2(s) = -\frac{s^2 + 6}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} = -\frac{2/5}{s^2 + 2} - \frac{3/5}{s^2 + 12}$$

y

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\frac{2}{5\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2}\right\} - \frac{3}{5\sqrt{12}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2 + 12}\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{5}\operatorname{sen}\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10}\operatorname{sen}2\sqrt{3}t. \end{aligned}$$



a) gráfica de $x_1(t)$ vs. t



b) gráfica de $x_2(t)$ vs. t

FIGURA 7.6.2 Desplazamientos de las dos masas.

Por último, la solución del sistema (2) es

$$x_1(t) = -\frac{\sqrt{2}}{10}\operatorname{sen}\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{sen}2\sqrt{3}t$$

$$x_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{5}\operatorname{sen}\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10}\operatorname{sen}2\sqrt{3}t. \qquad (4)$$

Las gráficas de x_1 y x_2 de la figura 7.6.2 revelan el complicado movimiento oscilatorio de cada masa. ■

REDES En (18) de la sección 3.3 vimos que las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ de la red que se muestra en la figura 7.6.3 con un inductor, un resistor y un capacitor, estaban gobernadas por el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$L\frac{di_1}{dt} + Ri_2 = E(t)$$

$$RC\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0. \qquad (5)$$

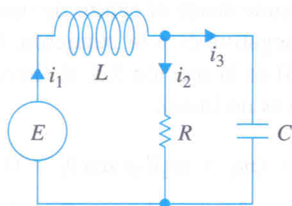


FIGURA 7.6.3 Red eléctrica.

Resolvemos este sistema con la transformada de Laplace en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Una red eléctrica

Resuelva el sistema en (5) bajo las condiciones $E(t) = 60$ V, $L = 1$ h, $R = 50\ \Omega$, $C = 10^{-4}$ f y al inicio las corrientes i_1 e i_2 son cero.

SOLUCIÓN Debemos resolver

$$\frac{di_1}{dt} + 50i_2 = 60$$

$$50(10^{-4})\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0$$

sujeta a $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$.

Aplicando la transformada de Laplace a cada ecuación del sistema y simplificando, se obtiene

$$sI_1(s) + \qquad 50I_2(s) = \frac{60}{s}$$

$$-200I_1(s) + (s + 200)I_2(s) = 0,$$

donde $I_1(s) = \mathscr{L}\{i_1(t)\}$ e $I_2(s) = \mathscr{L}\{i_2(t)\}$. Resolviendo el sistema para I_1 e I_2 y descomponiendo los resultados en fracciones parciales, se obtiene

$$I_1(s) = \frac{60s + 12\,000}{s(s+100)^2} = \frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s+100} - \frac{60}{(s+100)^2}$$

$$I_2(s) = \frac{12\,000}{s(s+100)^2} = \frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s+100} - \frac{120}{(s+100)^2}.$$

Tomando la transformada inversa de Laplace, encontramos que las corrientes son

$$i_1(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t}$$

$$i_2(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t}.$$ ■

Observe que tanto $i_1(t)$ como $i_2(t)$ del ejemplo 2 tienden hacia el valor $E/R = \frac{6}{5}$ conforme $t \to \infty$. Además, puesto que la corriente a través del capacitor es $i_3(t) = i_1(t) - i_2(t) = 60te^{-100t}$, se observa que $i_3(t) \to 0$ conforme $t \to \infty$.

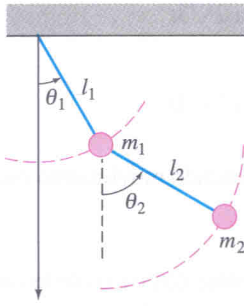


FIGURA 7.6.4 Péndulo doble.

PÉNDULO DOBLE Considere el sistema de péndulo doble que consiste en un péndulo unido a otro como se muestra en la figura 7.6.4. Se supone que el sistema oscila en un plano vertical bajo la influencia de la gravedad, que la masa de cada varilla es despreciable y que ninguna fuerza de amortiguamiento actúa sobre el sistema. En la figura 7.6.4 también se muestra que el ángulo de desplazamiento θ_1 se mide (en radianes) desde una línea vertical que se extiende hacia abajo desde el pivote del sistema y que θ_2 se mide desde una línea vertical que se extiende desde el centro de masa m_1. La dirección positiva es a la derecha; la dirección negativa es a la izquierda. Como se esperaría del análisis que condujo a la ecuación (6) de la sección 5.3, el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento es no lineal:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)l_1^2\theta_1'' + m_2l_1l_2\theta_2''\cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2(\theta_2')^2\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)l_1g\operatorname{sen}\theta_1 &= 0\\ m_2l_2^2\theta_2'' + m_2l_1l_2\theta_1''\cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2(\theta_1')^2\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_2g\operatorname{sen}\theta_2 &= 0.\end{aligned} \tag{6}$$

Pero si se supone que los desplazamientos $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ son pequeños, entonces las aproximaciones $\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1$, $\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) \approx 0$, $\operatorname{sen}\theta_1 \approx \theta_1$, $\operatorname{sen}\theta_2 \approx \theta_2$ nos permiten reemplazar el sistema (6) por la linealización

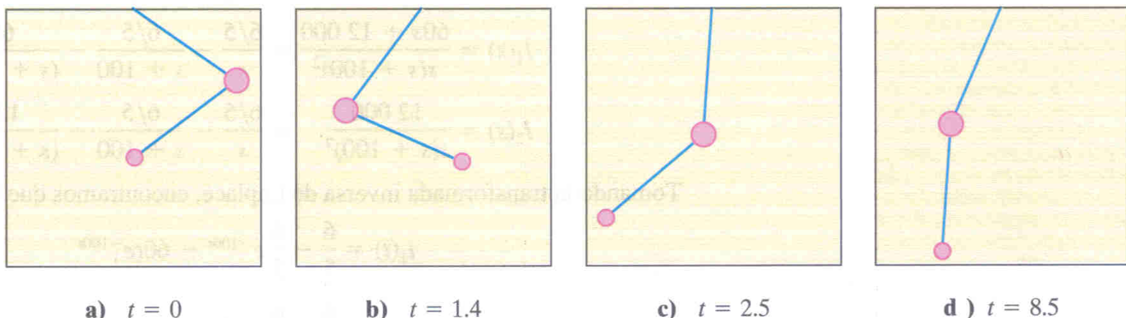
$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)l_1^2\theta_1'' + m_2l_1l_2\theta_2'' + (m_1 + m_2)l_1g\theta_1 &= 0\\ m_2l_2^2\theta_2'' + m_2l_1l_2\theta_1'' + m_2l_2g\theta_2 &= 0.\end{aligned} \tag{7}$$

EJEMPLO 3 Doble péndulo

Se deja como ejercicio completar los detalles de usar la transformada de Laplace para resolver el sistema (7) cuando $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $l_1 = l_2 = 16$, $\theta_1(0) = 1$, $\theta_2(0) = -1$, $\theta_1'(0) = 0$ y $\theta_2'(0) = 0$. Debe encontrar que

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \frac{1}{4}\cos\frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{3}{4}\cos 2t\\ \theta_2(t) &= \frac{1}{2}\cos\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{3}{2}\cos 2t.\end{aligned} \tag{8}$$

En la figura 7.6.5 se muestran con la ayuda de un SAC las posiciones de las dos masas en $t = 0$ y en tiempos posteriores. Véase el problema 21 en los ejercicios 7.6.



a) $t = 0$ b) $t = 1.4$ c) $t = 2.5$ d) $t = 8.5$

FIGURA 7.6.5 Posiciones de masas del péndulo doble en diferentes tiempos. ■

EJERCICIOS 7.6 *Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-12.*

En los problemas 1 a 12, use la transformada de Laplace para resolver el sistema dado de ecuaciones diferenciales.

1. $\dfrac{dx}{dt} = -x + y$

$\dfrac{dy}{dt} = 2x$

$x(0) = 0, \quad y(0) = 1$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 2y + e^t$

$\dfrac{dy}{dt} = 8x - t$

$x(0) = 1, \quad y(0) = 1$

3. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y$

$\dfrac{dy}{dt} = 5x - y$

$x(0) = -1, \quad y(0) = 2$

4. $\dfrac{dx}{dt} + 3x + \dfrac{dy}{dt} = 1$

$\dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{dy}{dt} - y = e^t$

$x(0) = 0, \quad y(0) = 0$

5. $2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2x = 1$

$\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 3x - 3y = 2$

$x(0) = 0, \quad y(0) = 0$

6. $\dfrac{dx}{dt} + x - \dfrac{dy}{dt} + y = 0$

$\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$

$x(0) = 0, \quad y(0) = 1$

7. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x - y = 0$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} + y - x = 0$

$x(0) = 0, \quad x'(0) = -2,$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

8. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 0$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 4\dfrac{dx}{dt} = 0$

$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0,$

$y(0) = -1, \quad y'(0) = 5$

9. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = t^2$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{d^2y}{dt^2} = 4t$

$x(0) = 8, \quad x'(0) = 0,$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

10. $\dfrac{dx}{dt} - 4x + \dfrac{d^3y}{dt^3} = 6 \operatorname{sen} t$

$\dfrac{dx}{dt} + 2x - 2\dfrac{d^3y}{dt^3} = 0$

$x(0) = 0, \quad y(0) = 0,$

$y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$

11. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3y = te^{-t}$

$x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 0$

12. $\dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y + 2\mathcal{U}(t-1)$

$\dfrac{dy}{dt} = 3x - y + \mathcal{U}(t-1)$

$x(0) = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}$

13. Resuelva el sistema (1) cuando $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ y $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_2'(0) = 0$.

14. Construya el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento vertical en línea recta de los resortes acoplados que se muestran en la figura 7.6.6. Use la transformada de Laplace para resolver el sistema cuando $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ y $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = -1$, $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = 1$.

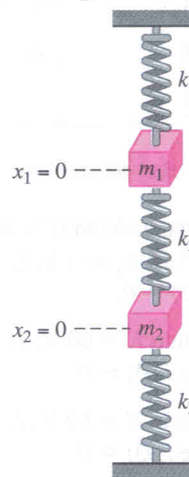


FIGURA 7.6.6 Resortes acoplados del problema 14.

15. a) Demuestre que el sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ en la red eléctrica que se muestra en la figura 7.6.7 es

$$L_1\frac{di_2}{dt} + Ri_2 + Ri_3 = E(t)$$

$$L_2\frac{di_3}{dt} + Ri_2 + Ri_3 = E(t).$$

b) Resuelva el sistema del inciso a) si $R = 5\ \Omega$, $L_1 = 0.01$ h, $L_2 = 0.0125$ h, $E = 100$ V, $i_2(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$.

c) Determine la corriente $i_1(t)$.

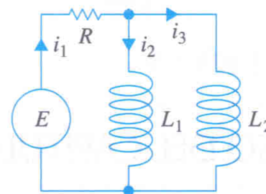


FIGURA 7.6.7 Red del problema 15.

16. a) En el problema 12 de los ejercicios 3.3 se pide demostrar que las corrientes $i_2(t)$ e $i_1(t)$ de la red eléctrica que se muestra en la figura 7.6.8 satisface

$$L\frac{di_2}{dt} + L\frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 = E(t)$$

$$-R_1\frac{di_2}{dt} + R_2\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C}i_3 = 0.$$

Resuelva el sistema si $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $L = 1$ h, $C = 0.2$ f.

$$E(t) = \begin{cases} 120, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2, \end{cases}$$

$i_2(0) = 0$, e $i_3(0) = 0$.

b) Determine la corriente $i_1(t)$.

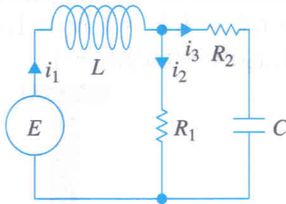


FIGURA 7.6.8 Red del problema 16.

17. Resuelva el sistema dado en (17) de la sección 3.3 cuando $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $L_1 = 1$ h, $L_2 = 1$ h, $E(t) = 50$ sen t V, $i_2(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$.

18. Resuelva (5) cuando $E = 60$ V, $L = \frac{1}{2}$ h, $R = 50\ \Omega$, $C = 10^{-4}$ f, $i_1(0) = 0$ e $i_2(0) = 0$.

19. Resuelva (5) cuando $E = 60$ V, $L = 2$ h, $R = 50\ \Omega$, $C = 10^{-4}$ f, $i_1(0) = 0$ e $i_2(0) = 0$.

20. **a)** Demuestre que el sistema de ecuaciones diferenciales para la carga en el capacitor $q(t)$ y la corriente $i_3(t)$ en la red eléctrica que se muestra en la figura 7.6.9 es

$$R_1 \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q + R_1 i_3 = E(t)$$

$$L \frac{di_3}{dt} + R_2 i_3 - \frac{1}{C} q = 0.$$

b) Determine la carga en el capacitor cuando $L = 1$ h, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $C = 1$ f.

$$E(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \\ 50e^{-t}, & t \ge 1, \end{cases}$$

$i_3(0) = 0$ y $q(0) = 0$.

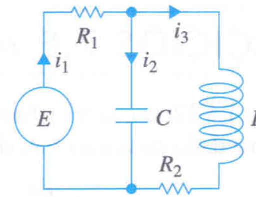


FIGURA 7.6.9 Red del problema 20.

Tarea para el laboratorio de computación

21. **a)** Use la transformada de Laplace y la información dada en el ejemplo 3 para obtener la solución (8) del sistema que se presenta en (7).

b) Use un programa de graficación para trazar $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ en el plano $t\theta$. ¿Cuál masa tiene desplazamientos extremos de mayor magnitud? Use las gráficas para estimar la primera vez que cada masa pasa por su posición de equilibrio. Analice si el movimiento del péndulo es periódico.

c) Trace la gráfica de $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ en el plano $\theta_1\theta_2$ como ecuaciones paramétricas. La curva que definen estas ecuaciones paramétricas se llama **curva de Lissajous.**

d) En la figura 7.6.5a se presentan las posiciones de las masas en $t = 0$. Observe que se ha usado 1 radián $\approx 57.3°$. Use una calculadora o una tabla de aplicación de un SAC para construir una tabla de valores de los ángulos θ_1 y θ_2 para $t = 1, 2, \ldots, 10$ s. Después dibuje las posiciones de las dos masas en esos tiempos.

e) Use un SAC para encontrar la primera vez que $\theta_1(t) = \theta_2(t)$ y calcule el correspondiente valor angular. Dibuje las posiciones de las dos masas en esos tiempos.

f) Utilice un SAC para dibujar las rectas apropiadas para simular las varillas de los péndulos, como se muestra en la figura 7.6.5. Use la utilidad de animación de su SAC para hacer un "video" del movimiento del péndulo doble desde $t = 0$ hasta $t = 10$ usando un incremento de 0.1. [*Sugerencia*: Exprese las coordenadas $(x_1(t), y_1(t))$ y $(x_2(t), y_2(t))$ de las masas m_1 y m_2 respectivamente, en términos de $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$.]

REPASO DEL CAPÍTULO 7

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-12

En los problemas 1 y 2 utilice la definición de la transformada de Laplace para encontrar $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

1. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 2 - t, & t \ge 1 \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2 \\ 1, & 2 \le t < 4 \\ 0, & t \ge 4 \end{cases}$

En los problemas 3 a 24 complete los espacios en blanco o conteste verdadero o falso.

3. Si f no es continua por tramos en $[0, \infty)$, entonces $\mathscr{L}\{f(t)\}$ no existirá. _______

4. La función $f(t) = (e^t)^{10}$ no es de orden exponencial. _____

5. $F(s) = s^2/(s^2 + 4)$ no es la transformada de Laplace de una función que es continua por tramos y de orden exponencial. _______

6. Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$, entonces $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t)g(t)$. _______

7. $\mathscr{L}\{e^{-7t}\} =$ _______

8. $\mathscr{L}\{te^{-7t}\} =$ _______

9. $\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\} =$ _______

10. $\mathscr{L}\{e^{-3t}\text{sen } 2t\} =$ _______

11. $\mathscr{L}\{t \text{ sen } 2t\} =$ _______

12. $\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\, \mathscr{U}(t-\pi)\} =$ _______

13. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{20}{s^6}\right\} =$ _______

14. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{3s-1}\right\} =$ _______

15. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-5)^3}\right\} =$ _______

16. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-5}\right\} =$ _______

17. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-10s+29}\right\} =$ _______

18. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-5s}}{s^2}\right\} =$ _______

19. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+\pi}{s^2+\pi^2}e^{-s}\right\} =$ _______

20. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{L^2s^2+n^2\pi^2}\right\} =$ _______

21. $\mathscr{L}\{e^{-5t}\}$ existe para $s >$ _______.

22. Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces $\mathscr{L}\{te^{8t}f(t)\} =$ _______.

23. Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $k > 0$, entonces $\mathscr{L}\{e^{at}f(t-k)\mathscr{U}(t-k)\} =$ _______.

24. $\mathscr{L}\{\int_0^t e^{a\tau}f(\tau)\,d\tau\} =$ _______ mientras que $\mathscr{L}\{e^{at}\int_0^t f(\tau)\,d\tau\} =$ _______.

En los problemas 25 a 28, use la función escalón unitario para determinar una ecuación para cada gráfica en términos de la función $y = f(t)$, cuya gráfica se presenta en la figura 7.R.1.

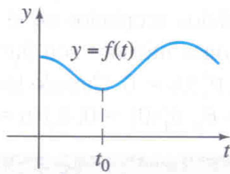


FIGURA 7.R.1 Gráfica para los problemas 25 a 28.

25.

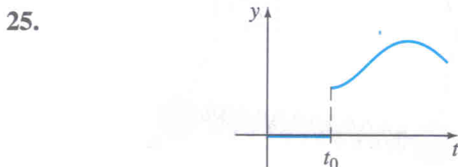


FIGURA 7.R.2 Gráfica para el problema 25.

26.

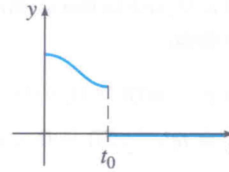


FIGURA 7.R.3 Gráfica para el problema 26.

27.

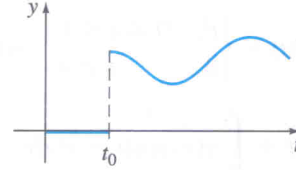


FIGURA 7.R.4 Gráfica para el problema 27.

28.

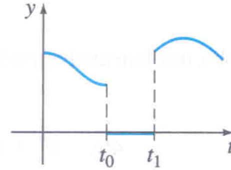


FIGURA 7.R.5 Gráfica para el problema 28.

En los problemas 29 a 32 exprese f en términos de funciones escalón unitario. Encuentre $\mathscr{L}\{f(t)\}$ y $\mathscr{L}\{e^t f(t)\}$.

29.

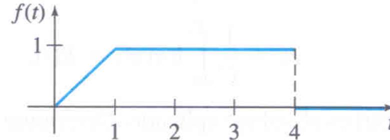


FIGURA 7.R.6 Gráfica para el problema 29.

30.

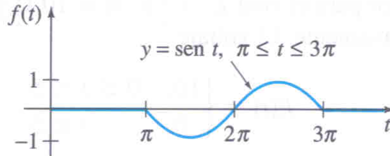


FIGURA 7.R.7 Gráfica para el problema 30.

31.

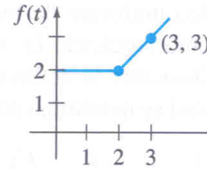


FIGURA 7.R.8 Gráfica para el problema 31.

32.

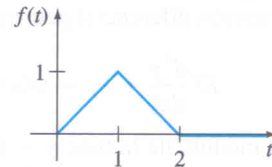


FIGURA 7.R.9 Gráfica para el problema 32.

En los problemas 33 a 38, use la transformada de Laplace para resolver la ecuación dada.

33. $y'' - 2y' + y = e^t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 5$

34. $y'' - 8y' + 20y = te^t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

35. $y'' + 6y' + 5y = t - t\mathscr{U}(t-2), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

36. $y' - 5y = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}, \quad y(0) = 1$$

37. $y'(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau, \quad y(0) = 1$

38. $\int_0^t f(\tau)f(t-\tau)\,d\tau = 6t^3$

En los problemas 39 y 40, use la transformada de Laplace para resolver cada sistema.

39. $x' + y = t$
$4x + y' = 0$
$x(0) = 1, \quad y(0) = 2$

40. $x'' + y'' = e^{2t}$
$2x' + y'' = -e^{2t}$
$x(0) = 0, \quad y(0) = 0,$
$x'(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

41. La corriente $i(t)$ en un circuito RC en serie se puede determinar de la ecuación integral

$$Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = E(t),$$

donde $E(t)$ es el voltaje aplicado. Determine $i(t)$ cuando $R = 10\ \Omega$, $C = 0.5$ f y $E(t) = 2(t^2 + t)$.

42. Un circuito en serie contiene un inductor, un resistor y un capacitor para el cual $L = \frac{1}{2}$ h, $R = 10\ \Omega$ y $C = 0.01$ f, respectivamente. El voltaje

$$E(t) = \begin{cases} 10, & 0 \le t < 5 \\ 0, & t \ge 5 \end{cases}$$

se aplica al circuito. Determine la carga instantánea $q(t)$ en el capacitor para $t > 0$ si $q(0) = 0$ y $q'(0) = 0$.

43. Una viga en voladizo uniforme de longitud L está empotrada en su extremo izquierdo ($x = 0$) y libre en su extremo derecho. Encuentre la deflexión $y(x)$ si la carga por unidad de longitud se determina por

$$w(x) = \frac{2w_0}{L}\left[\frac{L}{2} - x + \left(x - \frac{L}{2}\right)\mathscr{U}\left(x - \frac{L}{2}\right)\right].$$

44. Cuando una viga uniforme se apoya mediante una base elástica, la ecuación diferencial para su deflexión $y(x)$ es

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + ky = w(x),$$

donde k es el módulo de la base y $-ky$ es la fuerza restauradora de la base que actúa en dirección opuesta a la de la carga $w(x)$. Vea la figura 7.R.10. Por conveniencia algebraica suponga que la ecuación diferencial se escribe como

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4a^4y = \frac{w(x)}{EI},$$

donde $a = (k/4EI)^{1/4}$. Suponga que $L = \pi$ y $a = 1$. Encuentre la deflexión $y(x)$ de una viga que está apoyada en una base elástica cuando

a) la viga está apoyada simplemente en ambos extremos y una carga constante w_0 se distribuye uniformemente a lo largo de su longitud,

b) la viga está empotrada en ambos extremos y $w(x)$ es una carga concentrada w_0 aplicada en $x = \pi/2$.

[*Sugerencia*: En ambas partes de este problema, use los elementos 35 y 36 de la tabla de transformadas de Laplace del apéndice III].

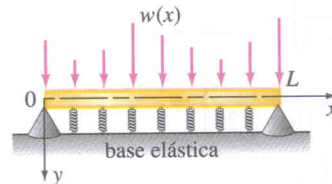


FIGURA 7.R.10 Viga sobre la base elástica del problema 44.

45. a) Suponga que dos péndulos idénticos están acoplados por medio de un resorte con k constante. Véase la figura 7.R.11. Bajo las mismas suposiciones hechas en el análisis anterior al ejemplo 3 de la sección 7.6, se puede demostrar que cuando los ángulos de desplazamiento $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ son pequeños, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales que describen el movimiento es

$$\theta_1'' + \frac{g}{l}\theta_1 = -\frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\theta_2'' + \frac{g}{l}\theta_2 = \frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2).$$

Utilice la transformada de Laplace para resolver el sistema cuando $\theta_1(0) = \theta_0$, $\theta_1'(0) = 0$, $\theta_2(0) = \psi_0$, $\theta_2'(0) = 0$, donde θ_0 y ψ_0 son constantes. Por conveniencia, sea $\omega^2 = g/l$, $K = k/m$.

b) Use la solución del inciso a) para analizar el movimiento de los péndulos acoplados en el caso especial cuando las condiciones iniciales son $\theta_1(0) = \theta_0$, $\theta_1'(0) = 0$, $\theta_2(0) = \theta_0$, $\theta_2'(0) = 0$. Cuando las condiciones iniciales son $\theta_1(0) = \theta_0$, $\theta_1'(0) = 0$, $\theta_2(0) = -\theta_0$, $\theta_2'(0) = 0$.

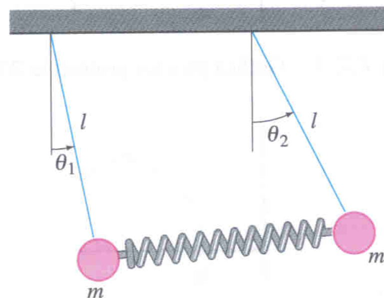
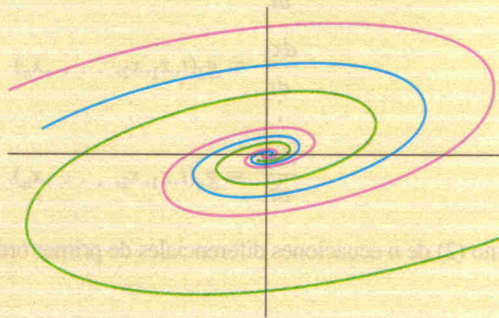


FIGURA 7.R.11 Péndulos acoplados del problema 45.

8 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN



En las secciones 3.3, 4.8 y 7.6 tratamos con sistemas de ecuaciones diferenciales y pudimos resolver algunos de estos sistemas mediante eliminación sistemática o con transformada de Laplace. En este capítulo nos vamos a dedicar sólo a *sistemas de ecuaciones lineales diferenciales de primer orden.* Aunque la mayor parte de los sistemas que se consideran se podrían resolver usando eliminación o transformada de Laplace, vamos a desarrollar una teoría general para estos tipos de sistemas y en el caso de sistemas con coeficientes constantes, un método de solución que utiliza algunos conceptos básicos del álgebra de matrices. Veremos que esta teoría general y el procedimiento de solución son similares a los de las ecuaciones de cálculo diferencial de orden superior lineales consideradas en el capítulo 4. Este material es fundamental para analizar ecuaciones no lineales de primer orden.

8.1 TEORÍA PRELIMINAR: SISTEMAS LINEALES

REPASO DE MATERIAL

- En este capítulo se usará la notación matricial y sus propiedades se usarán con mucha frecuencia a lo largo del mismo. Es indispensable que repase el apéndice II o un texto de álgebra lineal si no está familiarizado con estos conceptos.

INTRODUCCIÓN Recuerde que en la sección 4.8 se ilustró cómo resolver sistemas de n ecuaciones diferenciales lineales con n incógnitas de la forma

$$\begin{aligned} P_{11}(D)x_1 + P_{12}(D)x_2 + \cdots + P_{1n}(D)x_n &= b_1(t)\\ P_{21}(D)x_1 + P_{22}(D)x_2 + \cdots + P_{2n}(D)x_n &= b_2(t)\\ &\vdots\\ P_{n1}(D)x_1 + P_{n2}(D)x_2 + \cdots + P_{nn}(D)x_n &= b_n(t), \end{aligned} \tag{1}$$

donde las P_{ij} eran polinomios de diferentes grados en el operador diferencial D. Este capítulo se dedica al estudio de sistemas de ED de primer orden que son casos especiales de sistemas que tienen la forma normal

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &\vdots\\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Un sistema tal como (2) de n ecuaciones diferenciales de primer orden se llama **sistema de primer orden**.

SISTEMAS LINEALES Cuando cada una de las funciones $g_1, g_2, \ldots, g_n$ en (2) es lineal en las variables dependientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se obtiene la **forma normal** de un sistema de ecuaciones lineales de primer orden.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)\\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t)\\ &\vdots\\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Nos referimos a un sistema de la forma dada en (3) simplemente como un **sistema lineal**. Se supone que los coeficientes a_{ij} así como las funciones f_i son continuas en un intervalo común I. Cuando $f_i(t) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se dice que el sistema lineal (3) es **homogéneo**; de otro modo es **no homogéneo**.

FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA LINEAL Si $\mathbf{X}$, $\mathbf{A}(t)$, y $\mathbf{F}(t)$ denotan matrices respectivas

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\\ \vdots\\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

entonces el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden (3) se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

o simplemente

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}. \tag{4}$$

Si el sistema es homogéneo, su forma matricial es entonces

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}. \tag{5}$$

EJEMPLO 1 Sistema escrito en notación matricial

a) Si $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces la forma matricial del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x - 7y \end{aligned} \quad \text{es} \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

b) Si $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, entonces la forma matricial del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 6x + y + z + t \\ \frac{dy}{dt} &= 8x + 7y - z + 10t \\ \frac{dz}{dt} &= 2x + 9y - z + 6t \end{aligned} \quad \text{es} \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & -1 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} t \\ 10t \\ 6t \end{pmatrix}.$$

■

DEFINICIÓN 8.1.1 Vector solución

Un **vector solución** en un intervalo I es cualquier matriz columna

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

cuyos elementos son funciones derivables que satisfacen el sistema (4) en el intervalo.

Un vector solución de (4) es, por supuesto, equivalente a n ecuaciones escalares $x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ y se puede interpretar desde el punto de vista geométrico como un conjunto de ecuaciones paramétricas de una curva en el espacio. En el caso importante $n = 2$, las ecuaciones $x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t)$ representan una curva en el plano x_1x_2. Es práctica común llamar **trayectoria** a una curva en el plano y llamar **plano fase** al plano x_1x_2. Regresaremos a estos conceptos y se ilustrarán en la siguiente sección.

EJEMPLO 2 Comprobación de soluciones

Compruebe que en el intervalo $(-\infty, \infty)$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

son soluciones de

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}. \tag{6}$$

SOLUCIÓN De $\mathbf{X}_1' = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_2' = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix}$ vemos que

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3e^{-2t} \\ 5e^{-2t} - 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_1',$$

y

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} + 15e^{6t} \\ 15e^{6t} + 15e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_2'.$$ ■

Gran parte de la teoría de sistemas de n ecuaciones diferenciales de primer orden es similar a la de las ecuaciones diferenciales de n−ésimo orden.

PROBLEMA CON VALORES INICIALES Sea t_0 que denota un punto en un intervalo I y

$$\mathbf{X}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix},$$

donde las γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son las constantes dadas. Entonces el problema

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:}\ \mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t) \\ &\textit{Sujeto a:}\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{aligned} \tag{7}$$

es un **problema con valores iniciales** en el intervalo.

TEOREMA 8.1.1 Existencia de una solución única

Sean los elementos de las matrices $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{F}(t)$ funciones continuas en un intervalo común I que contiene al punto t_0. Entonces existe una solución única del problema con valores iniciales (7) en el intervalo.

SISTEMAS HOMOGÉNEOS En las siguientes definiciones y teoremas se consideran sólo sistemas homogéneos. Sin afirmarlo, siempre se supondrá que las a_{ij} y las f_i son funciones continuas de t en algún intervalo común I.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN El siguiente resultado es un principio de superposición para soluciones de sistemas lineales.

TEOREMA 8.1.2 Principio de superposición

Sea $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$ un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo (5) en un intervalo I. Entonces la combinación lineal

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_k\mathbf{X}_k,$$

donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, es también una solución en el intervalo.

Se deduce del teorema 8.1.2 que un múltiplo constante de cualquier vector solución de un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden es también una solución.

EJEMPLO 3 Usando el principio de superposición

Debería practicar comprobando que los dos vectores

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}. \tag{8}$$

Por el principio de superposición la combinación lineal

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

es otra solución del sistema. ■

DEPENDENCIA LINEAL E INDEPENDENCIA LINEAL Estamos interesados principalmente en soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo (5).

DEFINICIÓN 8.1.2 Dependencia/independencia lineal

Sea $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$ un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo (5) en un intervalo I. Se dice que el conjunto es **linealmente dependiente** en el intervalo si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$, no todas cero, tales que

$$c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_k\mathbf{X}_k = \mathbf{0}$$

para toda t en el intervalo. Si el conjunto de vectores no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es **linealmente independiente**.

El caso cuando $k = 2$ debe ser claro; dos vectores solución $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son linealmente dependientes si uno es un múltiplo constante del otro y a la inversa. Para $k > 2$ un conjunto de vectores solución es linealmente dependiente si se puede expresar por lo menos un vector solución como una combinación lineal de los otros vectores.

WRONSKIANO En la consideración anterior de la teoría de una sola ecuación diferencial ordinaria se puede introducir el concepto del determinante **Wronskiano** como prueba para la independencia lineal. Se expresa el siguiente teorema sin prueba.

TEOREMA 8.1.3 Criterio para las soluciones linealmente independientes

Sean $\quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$

n vectores solución del sistema homogéneo (5) en un intervalo I. Entonces el conjunto de vectores solución es linealmente independiente en I si y sólo si el **Wronskiano**

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{9}$$

para toda t en el intervalo.

Se puede demostrar que si $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ son vectores solución de (5), entonces para toda t en I ya sea $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n) \neq 0$ o $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n) = 0$. Por tanto, si se puede demostrar que $W \neq 0$ para alguna t_0 en I, entonces $W \neq 0$ para toda t y, por tanto, las soluciones son linealmente independientes en el intervalo.

Observe que, a diferencia de la definición de Wronskiano en la sección 4, aquí la definición del determinante (9) no implica derivación.

EJEMPLO 4 Soluciones linealmente independientes

En el ejemplo 2 vimos que $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ y $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$ son soluciones del sistema (6). Es evidente que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$ puesto que ningún vector es un múltiplo constante del otro. Además, se tiene

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{vmatrix} = 8e^{4t} \neq 0$$

para todos los valores reales de t. ■

DEFINICIÓN 8.1.3 Conjunto fundamental de soluciones

Cualquier conjunto $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ de n vectores solución linealmente independientes del sistema homogéneo (5) en un intervalo I se dice que es un **conjunto fundamental de soluciones** en el intervalo.

TEOREMA 8.1.4 Existencia de un conjunto fundamental

Existe un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo (5) en un intervalo I.

Los dos teoremas siguientes son equivalentes a los teoremas 4.1.5 y 4.1.6 para sistemas lineales.

TEOREMA 8.1.5 Solución general, sistemas homogéneos

Sea $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo (5) en un intervalo I. Entonces la solución general del sistema en el intervalo es

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n,$$

donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

EJEMPLO 5 Solución general del sistema (6)

Del ejemplo 2 sabemos que $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ y $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$ son soluciones linealmente independientes de (6) en $(-\infty, \infty)$. Por tanto $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo. La solución general del sistema en el intervalo entonces es

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}. \tag{10}$$ ■

EJEMPLO 6 Solución general del sistema (8)

Los vectores

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}, \qquad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema (8) en el ejemplo 3 (vea el problema 16 en los ejercicios 8.1). Ahora,

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = \begin{vmatrix} \cos t & 0 & \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t & e^{t} & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t & 0 & -\operatorname{sen} t + \cos t \end{vmatrix} = e^{t} \neq 0$$

para todos los valores reales de t. Se concluye que $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X}_3$ forman un conjunto fundamental de soluciones en $(-\infty, \infty)$. Por lo que la solución general del sistema en el intervalo es la combinación lineal $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3$; es decir,

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_3\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}.$$ ■

SISTEMAS NO HOMOGÉNEOS Para sistemas no homogéneos una **solución particular** $\mathbf{X}_p$ en el intervalo I es cualquier vector libre de parámetros arbitrarios, cuyos elementos son funciones que satisfacen el sistema (4).

TEOREMA 8.1.6 Solución general: sistemas no homogéneos

Sea $\mathbf{X}_p$ una solución dada del sistema no homogéneo (4) en un intervalo I y sea

$$\mathbf{X}_c = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n$$

que denota la solución general en el mismo intervalo del sistema homogéneo asociado (5). Entonces la **solución general** del sistema no homogéneo en el intervalo es

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p.$$

La solución general $\mathbf{X}_c$ del sistema homogéneo relacionado (5) se llama **función complementaria** del sistema no homogéneo (4).

EJEMPLO 7 Solución general: sistema no homogéneo

El vector $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema no homogéneo

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 12t-11 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$. (Compruebe esto.) La función complementaria de (11) en el mismo intervalo o la solución general de $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, como vimos en (10) del ejemplo 5 que $\mathbf{X}_c = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}e^{6t}$. Por tanto, por el teorema 8.1.6

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}e^{6t} + \begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix}$$

es la solución general de (11) en $(-\infty, \infty)$. ■

EJERCICIOS 8.1

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-13.

En los problemas 1 a 6 escriba el sistema lineal en forma matricial.

1. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - 5y$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = 4x + 8y$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 4x - 7y$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = 5x$

3. $\dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y - 9z$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = 6x - y$, $\quad \dfrac{dz}{dt} = 10x + 4y + 3z$

4. $\dfrac{dx}{dt} = x - y$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = x + 2z$, $\quad \dfrac{dz}{dt} = -x + z$

5. $\dfrac{dx}{dt} = x - y + z + t - 1$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = 2x + y - z - 3t^2$, $\quad \dfrac{dz}{dt} = x + y + z + t^2 - t + 2$

6. $\dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y + e^{-t}\operatorname{sen} 2t$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = 5x + 9z + 4e^{-t}\cos 2t$, $\quad \dfrac{dz}{dt} = y + 6z - e^{-t}$

En los problemas 7 a 10, reescriba el sistema dado sin el uso de matrices.

7. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t}$

8. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -9 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5t} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-2t}$

9. $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}t$

10. $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}\operatorname{sen} t + \begin{pmatrix} t-4 \\ 2t+1 \end{pmatrix}e^{4t}$

En los problemas 11 a 16, compruebe que el vector **X** es una solución del sistema dado.

11. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = 4x - 7y$; $\quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-5t}$

12. $\dfrac{dx}{dt} = -2x + 5y$, $\quad \dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y$; $\quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 3\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}e^{t}$

13. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$; $\quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-3t/2}$

14. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$; $\quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}te^{t}$

15. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$; $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$; $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}$

En los problemas 17 a 20, los vectores dados son soluciones de un sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$. Determine si los vectores forman un conjunto fundamental en $(-\infty, \infty)$.

17. $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t}$, $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-6t}$

18. $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t}$, $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}te^{t}$

19. $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

20. $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-4t}$, $\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}e^{3t}$

En los problemas 21 a 24 compruebe que el vector $\mathbf{X}_p$ es una solución particular del sistema dado.

21. $\dfrac{dx}{dt} = x + 4y + 2t - 7$

$\dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y - 4t - 18$; $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

22. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

23. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}e^{t}$; $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}te^{t}$

24. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\operatorname{sen} 3t$; $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 3t \\ 0 \\ \cos 3t \end{pmatrix}$

25. Demuestre que la solución general de

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t}.$$

26. Demuestre que la solución general de

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}e^{\sqrt{2}t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}e^{-\sqrt{2}t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}t^2 + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8.2 SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS

REPASO DE MATERIAL

- Sección II.3 del apéndice II

INTRODUCCIÓN Vimos en el ejemplo 5 de la sección 8.1 que la solución general del sistema homogéneo $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ es

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}e^{6t}.$$

Ya que los vectores solución $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ tienen la forma

$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}e^{\lambda_i t}, \qquad i = 1, 2,$$

donde k_1, k_2, λ_1 y λ_2 son constantes, nos inquieta preguntar si siempre es posible hallar una solución de la forma

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \mathbf{K}e^{\lambda t} \tag{1}$$

para la solución del sistema lineal homogéneo general de primer orden

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}, \tag{2}$$

donde **A** es una matriz $n \times n$ de constantes.

EIGENVALORES Y EIGENVECTORES Si (1) es un vector solución del sistema homogéneo lineal (2), entonces $\mathbf{X}' = \mathbf{K}\lambda e^{\lambda t}$, por lo que el sistema se convierte en $\mathbf{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{AK}e^{\lambda t}$. Después de dividir entre $e^{\lambda t}$ y reacomodando, obtenemos $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$ o $\mathbf{AK} - \lambda\mathbf{K} = \mathbf{0}$. Ya que $\mathbf{K} = \mathbf{IK}$, la última ecuación es igual a

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

La ecuación matricial (3) es equivalente a las ecuaciones algebraicas simultáneas

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)k_1 + \quad a_{12}k_2 + \cdots + \quad a_{1n}k_n &= 0 \\
a_{21}k_1 + (a_{22} - \lambda)k_2 + \cdots + \quad a_{2n}k_n &= 0 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \\
a_{n1}k_1 + \quad a_{n2}k_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)k_n &= 0.
\end{aligned}$$

Por lo que para encontrar soluciones **X** de (2), necesitamos primero encontrar una solución no trivial del sistema anterior; en otras palabras, debemos encontrar un vector no trivial **K** que satisfaga a (3). Pero para que (3) tenga soluciones que no sean la solución obvia $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, se debe tener

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Esta ecuación polinomial en λ se llama **ecuación característica** de la matriz **A**. Sus soluciones son los **eigenvalores** de **A**. Una solución $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$ de (3) correspondiente a un eigenvalor λ se llama **eigenvector** de **A**. Entonces una solución del sistema homogéneo (2) es $\mathbf{X} = \mathbf{K}e^{\lambda t}$.

En el siguiente análisis se examinan tres casos: eigenvalores reales y distintos (es decir, los eigenvalores no son iguales), eigenvalores repetidos y, por último, eigenvalores complejos.

8.2.1 EIGENVALORES REALES DISTINTOS

Cuando la matriz **A** $n \times n$ tiene n eigenvalores reales y distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ entonces siempre se puede encontrar un conjunto de n eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ y

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad \mathbf{X}_n = \mathbf{K}_n e^{\lambda_n t}$$

es un conjunto fundamental de soluciones de (2) en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

TEOREMA 8.2.1 Solución general: Sistemas homogéneos

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n eigenvalores reales y distintos de la matriz de coeficientes **A** del sistema homogéneo (2) y sean $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ los eigenvectores correspondientes. Entonces la **solución general** de (2) en el intervalo $(-\infty, \infty)$ está dada por

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{K}_n e^{\lambda_n t}.$$

EJEMPLO 1 Eigenvalores distintos

Resuelva
$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x + y. \tag{4}$$

SOLUCIÓN Primero determine los eigenvalores y eigenvectores de la matriz de coeficientes.

De la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$

vemos que los eigenvalores son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$.

Ahora para $\lambda_1 = -1$, (3) es equivalente a

$$3k_1 + 3k_2 = 0$$
$$2k_1 + 2k_2 = 0.$$

Por lo que $k_1 = -k_2$. Cuando $k_2 = -1$, el eigenvector correspondiente es

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 4$ tenemos
$$-2k_1 + 3k_2 = 0$$
$$2k_1 - 3k_2 = 0$$

por lo que $k_1 = \frac{3}{2}k_2$; por tanto con $k_2 = 2$ el eigenvector correspondiente es

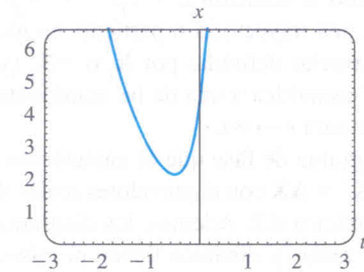
$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que la matriz de coeficientes **A** es una matriz 2×2 y como hemos encontrado dos soluciones linealmente independientes de (4),

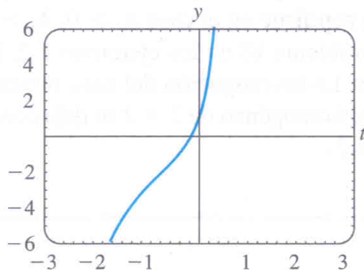
$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t},$$

Se concluye que la solución general del sistema es

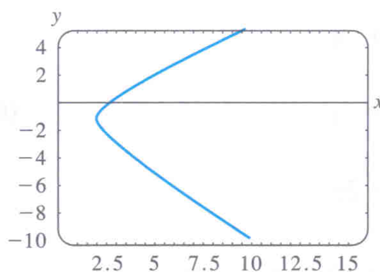
$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}. \tag{5}$$ ■



a) gráfica de $x = e^{-t} + 3e^{4t}$



b) gráfica de $y = -e^{-t} + 2e^{4t}$



c) trayectoria definida por $x = e^{-t} + 3e^{4t}$, $y = -e^{-t} + 2e^{4t}$ en el plano fase

FIGURA 8.2.1 Una solución particular de (5) produce tres curvas diferentes en tres planos diferentes.

DIAGRAMA DE FASE Debe considerar que escribir una solución de un sistema de ecuaciones en términos de matrices es simplemente una alternativa al método que se empleó en la sección 4.8, es decir, enumerar cada una de las funciones y la relación entre las constantes. Si sumamos los vectores en el lado derecho de (5) y después igualamos las entradas con las entradas correspondientes en el vector en el lado izquierdo, se obtiene la expresión familiar

$$x = c_1e^{-t} + 3c_2e^{4t}, \qquad y = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{4t}.$$

Como se indicó en la sección 8.1, se pueden interpretar estas ecuaciones como ecuaciones paramétricas de curvas en el plano *xy* o **plano fase.** Cada curva, que corresponde a elecciones específicas de c_1 y c_2, se llama **trayectoria.** Para la elección de constantes $c_1 = c_2 = 1$ en la solución (5) vemos en la figura 8.2.1, la gráfica de $x(t)$ en el plano *tx*, la gráfica de $y(t)$ en el plano *ty* y la trayectoria que consiste en los puntos $(x(t), y(t))$

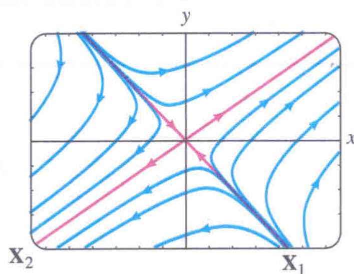


FIGURA 8.2.2 Un diagrama de fase del sistema (4).

en el plano fase. Al conjunto de trayectorias representativas en el plano fase, como se muestra en la figura 8.2.2 se le llama **diagrama fase** para un sistema lineal dado. Lo que parecen *dos* rectas rojas en la figura 8.2.2 son en realidad *cuatro* semirrectas definidas paramétricamente en el primero, segundo, tercero y cuarto cuadrantes con las soluciones $\mathbf{X}_2$, $-\mathbf{X}_1$, $-\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X}_1$, respectivamente. Por ejemplo, las ecuaciones cartesianas $y = \frac{2}{3}x, x > 0$ y $y = -x, x > 0$, de las semirrectas en el primer y cuarto cuadrantes se obtuvieron eliminando el parámetro t en las soluciones $x = 3e^{4t}, y = 2e^{4t}$ y $x = e^{-t}, y = -e^{-t}$, respectivamente. Además, cada eigenvector se puede visualizar como un vector bidimensional que se encuentra a lo largo de una de estas semirrectas. El eigenvector $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ se encuentra junto con $y = \frac{2}{3}x$ en el primer cuadrante y $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ se encuentra junto con $y = -x$ en el cuarto cuadrante. Cada vector comienza en el origen; $\mathbf{K}_2$ termina en el punto (2, 3) y $\mathbf{K}_1$ termina en $(1, -1)$.

El origen no es sólo una solución constante $x = 0$, $y = 0$ de todo sistema lineal homogéneo 2×2, $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, sino también es un punto importante en el estudio cualitativo de dichos sistemas. Si pensamos en términos físicos, las puntas de flecha de cada trayectoria en el tiempo t se mueven conforme aumenta el tiempo. Si imaginamos que el tiempo va de $-\infty$ a ∞, entonces examinando la solución $x = c_1e^{-t} + 3c_2e^{4t}$, $y = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{4t}$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ muestra que una trayectoria o partícula en movimiento "comienza" asintótica a una de las semirrectas definidas por $\mathbf{X}_1$ o $-\mathbf{X}_1$ (ya que e^{4t} es despreciable para $t \to -\infty$) y "termina" asintótica a una de las semirrectas definidas por $\mathbf{X}_2$ y $-\mathbf{X}_2$ (ya que e^{-t} es despreciable para $t \to \infty$).

Observe que la figura 8.2.2 representa un diagrama de fase que es característico de *todos* los sistemas lineales homogéneos 2×2 $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ con eigenvalores reales de signos opuestos. Véase el problema 17 de los ejercicios 8.2. Además, los diagramas de fase en los dos casos cuando los eigenvalores reales y distintos tienen el mismo signo son característicos de esos sistemas 2×2; la única diferencia es que las puntas de flecha indican que una partícula se aleja del origen en cualquier trayectoria cuando λ_1 y λ_2 son positivas y se mueve hacia el origen en cualquier trayectoria cuando λ_1 y λ_2 son negativas. Por lo que al origen se le llama **repulsor** en el caso $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y **atractor** en el caso $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Véase el problema 18 en los ejercicios 8.2. El origen en la figura 8.2.2 no es repulsor ni atractor. La investigación del caso restante cuando $\lambda = 0$ es un eigenvalor de un sistema lineal homogéneo de 2×2 se deja como ejercicio. Véase el problema 49 de los ejercicios 8.2.

EJEMPLO 2 Eigenvalores distintos

Resuelva

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -4x + y + z \\ \frac{dy}{dt} &= x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} &= y - 3z. \end{aligned} \tag{6}$$

SOLUCIÓN Usando los cofactores del tercer renglón, se encuentra

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 3)(\lambda + 4)(\lambda - 5) = 0,$$

y así los eigenvalores son $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$ y $\lambda_3 = 5$.

Para $\lambda_1 = -3$, con la eliminación de Gauss-Jordan, se obtiene

$$(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{entre renglones}]{\text{operaciones}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto $k_1 = k_3$ y $k_2 = 0$. La elección $k_3 = 1$ da un eigenvector y el vector solución correspondiente

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}. \tag{7}$$

De igual manera, para $\lambda_2 = -4$

$$(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{entre renglones}]{\text{operaciones}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

implica que $k_1 = 10k_3$ y $k_2 = -k_3$. Al elegir $k_3 = 1$, se obtiene un segundo eigenvector y el vector solución

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}. \tag{8}$$

Por último, cuando $\lambda_3 = 5$, las matrices aumentadas

$$(\mathbf{A} + 5\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{rrr|r} -9 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{entre renglones}]{\text{operaciones}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

producen

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}. \tag{9}$$

La solución general de (6) es una combinación lineal de los vectores solución en (7), (8) y (9):

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$ ■

USO DE COMPUTADORAS Los paquetes de software como MATLAB, *Mathematica*, *Maple* y DERIVE, ahorran tiempo en la determinación de eigenvalores y eigenvectores de una matriz **A**.

8.2.2 EIGENVALORES REPETIDOS

Por supuesto, no todos los n eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de una matriz **A** de $n \times n$ deben ser distintos, es decir, algunos de los eigenvalores podrían ser repetidos. Por ejemplo, la ecuación característica de la matriz de coeficientes en el sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \mathbf{X} \tag{10}$$

se demuestra fácilmente que es $(\lambda + 3)^2 = 0$, y por tanto, $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ es una raíz de *multiplicidad dos*. Para este valor se encuentra el único eigenvector

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{por lo que} \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} \tag{11}$$

es una solución de (10). Pero como es obvio que tenemos interés en formar la solución general del sistema, se necesita continuar con la pregunta de encontrar una segunda solución.

En general, si m es un entero positivo y $(\lambda - \lambda_1)^m$ es un factor de la ecuación característica, mientras que $(\lambda - \lambda_1)^{m+1}$ no es un factor, entonces se dice que λ_1 es un **eigenvalor de multiplicidad *m***. En los tres ejemplos que se dan a continuación se ilustran los casos siguientes:

i) Para algunas matrices $\mathbf{A}$ de $n \times n$ sería posible encontrar m eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_m$, correspondientes a un eigenvalor λ_1, de multiplicidad $m \leq n$. En este caso la solución general del sistema contiene la combinación lineal

$$c_1\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_m\mathbf{K}_m e^{\lambda_1 t}.$$

ii) Si sólo hay un eigenvector propio que corresponde al eingenvalor λ_1 de multiplicidad m, entonces siempre se pueden encontrar m soluciones linealmente independientes de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{K}_{11} e^{\lambda_1 t} \\ \mathbf{X}_2 &= \mathbf{K}_{21} t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{K}_{22} e^{\lambda_1 t} \\ &\vdots \\ \mathbf{X}_m &= \mathbf{K}_{m1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_1 t} + \mathbf{K}_{m2} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_1 t} + \cdots + \mathbf{K}_{mm} e^{\lambda_1 t}, \end{aligned}$$

donde las $\mathbf{K}_{ij}$ son vectores columna.

EIGENVALORES DE MULTIPLICIDAD DOS Se comienza por considerar eigenvalores de multiplicidad dos. En el primer ejemplo se ilustra una matriz para la que podemos encontrar dos eigenvectores distintos que corresponden a un doble eigenvalor.

EJEMPLO 3 Eigenvalores repetidos

Resuelva $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}.$

SOLUCIÓN Desarrollando el determinante en la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

se obtiene $-(\lambda + 1)^2(\lambda - 5) = 0$. Se ve que $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 5$.

Para $\lambda_1 = -1$, con la eliminación de Gauss-Jordan se obtiene de inmediato

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{entre renglones}]{\text{operaciones}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

El primer renglón de la última matriz indica que $k_1 - k_2 + k_3 = 0$ o $k_1 = k_2 - k_3$. Las elecciones $k_2 = 1, k_3 = 0$ y $k_2 = 1, k_3 = 1$ producen, a su vez, $k_1 = 1$ y $k_1 = 0$. Por lo que dos eigenvectores correspondientes a $\lambda_1 = -1$ son

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que ningún eigenvector es un múltiplo constante del otro, se han encontrado dos soluciones linealmente independientes,

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

que corresponden al mismo eigenvalor. Por último, para $\lambda_3 = 5$ la reducción

$$(\mathbf{A} + 5\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{entre renglones}]{\text{operaciones}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

implica que $k_1 = k_3$ y $k_2 = -k_3$. Al seleccionar $k_3 = 1$, se obtiene $k_1 = 1, k_2 = -1$; por lo que el tercer eigenvector es

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que la solución general del sistema es

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

La matriz de coeficientes **A** del ejemplo 3 es un tipo especial de matriz conocida como matriz simétrica. Se dice que una matriz **A** de $n \times n$ es **simétrica** si su transpuesta $\mathbf{A}^T$ (donde se intercambian renglones y columnas) es igual que **A**, es decir, si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Se puede demostrar que si la matriz **A** del sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ es simétrica y tiene elementos reales, entonces siempre es posible encontrar n eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$, y la solución general de ese sistema es como se muestra en el teorema 8.2.1. Como se muestra en el ejemplo 3, este resultado se cumple aun cuando estén repetidos algunos de los eigenvalores.

SEGUNDA SOLUCIÓN Suponga que λ_1 es un valor propio de multiplicidad dos y que sólo hay un eigenvector asociado con este valor. Se puede encontrar una segunda solución de la forma

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{K}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}e^{\lambda_1 t}, \tag{12}$$

donde $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$.

Para ver esto sustituya (12) en el sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ y simplifique:

$$(\mathbf{AK} - \lambda_1\mathbf{K})te^{\lambda_1 t} + (\mathbf{AP} - \lambda_1\mathbf{P} - \mathbf{K})e^{\lambda_1 t} = \mathbf{0}.$$

Puesto que la última ecuación es válida para todos los valores de t, debemos tener

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0} \tag{13}$$

y

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}. \tag{14}$$

La ecuación (13) simplemente establece que $\mathbf{K}$ debe ser un vector característico de $\mathbf{A}$ asociado con λ_1. Al resolver (13), se encuentra una solución $\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}e^{\lambda_1 t}$. Para encontrar la segunda solución $\mathbf{X}_2$, sólo se necesita resolver el sistema adicional (14) para obtener el vector $\mathbf{P}$.

EJEMPLO 4 Eigenvalores repetidos

Encuentre la solución general del sistema dado en (10).

SOLUCIÓN De (11) se sabe que $\lambda_1 = -3$ y que una solución es $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$. Identificando $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, encontramos de (14) que ahora debemos resolver

$$(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} 6p_1 - 18p_2 &= 3 \\ 2p_1 - 6p_2 &= 1. \end{aligned}$$

Puesto que resulta obvio que este sistema es equivalente a una ecuación, se tiene un número infinito de elecciones de p_1 y p_2. Por ejemplo, al elegir $p_1 = 1$ se encuentra que $p_2 = \frac{1}{6}$. Sin embargo, por simplicidad elegimos $p_1 = \frac{1}{2}$ por lo que $p_2 = 0$. Entonces $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Así de (12) se encuentra que $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}$. La solución general de (10) es $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2$, o

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}\right].$$ ■

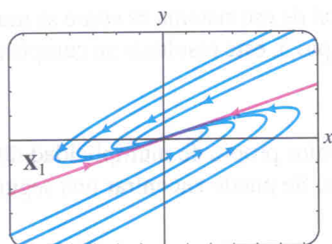


FIGURA 8.2.3 Diagrama de fase del sistema (10).

Al asignar diversos valores a c_1 y c_2 en la solución del ejemplo 4, se pueden trazar las trayectorias del sistema en (10). En la figura 8.2.3 se presenta un diagrama fase de (10). Las soluciones $\mathbf{X}_1$ y $-\mathbf{X}_1$ determinan dos semirrectas $y = \frac{1}{3}x, x > 0$ y $y = \frac{1}{3}x, x < 0$ respectivamente, mostradas en rojo en la figura. Debido a que el único eigenvalor es negativo y $e^{-3t} \to 0$ conforme $t \to \infty$ en *cada* trayectoria, se tiene $(x(t), y(t)) \to (0, 0)$ conforme $t \to \infty$. Esta es la razón por la que las puntas de las flechas de la figura 8.2.3 indican que una partícula en cualquier trayectoria se mueve hacia el origen conforme aumenta el tiempo y la razón de que en este caso el origen sea un atractor. Además, una partícula en movimiento o trayectoria $x = 3c_1e^{-3t} + c_2(3te^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-3t})$, $y = c_1e^{-3t} + c_2te^{-3t}$, $c_2 \neq 0$ tiende a $(0, 0)$ tangencialmente a una de las semirrectas conforme $t \to \infty$. En contraste, cuando el eigenvalor repetido es positivo, la situación se invierte y el origen es un repulsor. Véase el problema 21 de los ejercicios 8.2. Similar a la figura 8.2.2, la figura 8.2.3 es característica de *todos* los sistemas lineales homogéneos $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, 2×2 que tienen dos eigenvalores negativos repetidos. Véase el problema 32 en los ejercicios 8.2.

EIGENVALOR DE MULTIPLICIDAD TRES Cuando la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ tiene sólo un eigenvector asociado con un eigenvalor λ_1 de multiplicidad tres, podemos

encontrar una segunda solución de la forma (12) y una tercera solución de la forma

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{K}\frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{Q}e^{\lambda_1 t}, \tag{15}$$

donde $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, y $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$.

Al sustituir (15) en el sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, se encuentra que los vectores columna **K**, **P** y **Q** deben satisfacer

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0} \tag{16}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K} \tag{17}$$

y

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{Q} = \mathbf{P}. \tag{18}$$

Por supuesto, las soluciones (16) y (17) se pueden usar para formar las soluciones $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$.

EJEMPLO 5 Eigenvalores repetidos

Resuelva $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

SOLUCIÓN La ecuación característica $(\lambda - 2)^3 = 0$ demuestra que $\lambda_1 = 2$ es un eigenvalor de multiplicidad tres. Al resolver $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$, se encuentra el único eigenvector

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación se resuelven primero el sistema $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}$ y después el sistema $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{Q} = \mathbf{P}$ y se encuentra que

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Usando (12) y (15), vemos que la solución general del sistema es

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t}\right] + c_3\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}e^{2t}\right]. \quad ■$$

COMENTARIOS

Cuando un eigenvalor λ_1 tiene multiplicidad m, se pueden determinar m eigenvectores linealmente independientes o el número de eigenvectores correspondientes es menor que m. Por tanto, los dos casos listados en la página 316 no son todas las posibilidades bajo las que puede ocurrir un eigenvalor repetido. Puede suceder, por ejemplo, que una matriz de 5 × 5 tenga un eigenvalor de multiplicidad cinco y existan tres eigenvectores correspondientes linealmente independientes. Véanse los problemas 31 y 50 de los ejercicios 8.2.

8.2.3 EIGENVALORES COMPLEJOS

Si $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, $\beta > 0$, $i^2 = -1$ son eigenvalores complejos de la matriz de coeficientes **A**, entonces se puede esperar de hecho que sus eigenvectores correspondientes también tengan entradas complejas.*

Por ejemplo, la ecuación característica del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 6x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x + 4y \end{aligned} \tag{19}$$

es $$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0.$$

De la fórmula cuadrática se encuentra $\lambda_1 = 5 + 2i$, $\lambda_2 = 5 - 2i$.

Ahora para $\lambda_1 = 5 + 2i$ se debe resolver

$$\begin{aligned} (1-2i)k_1 - \quad\quad k_2 &= 0 \\ 5k_1 - (1+2i)k_2 &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que $k_2 = (1 - 2i)k_1$,† la elección $k_1 = 1$ da el siguiente eigenvector y el vector solución correspondiente:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t}.$$

De manera similar, para $\lambda_2 = 5 - 2i$ encontramos

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}.$$

Podemos comprobar por medio del Wronskiano que estos vectores solución son linealmente independientes y por tanto la solución general de (19) es

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}. \tag{20}$$

Observe que las entradas en $\mathbf{K}_2$ correspondientes a λ_2 son los conjugados de las entradas en $\mathbf{K}_1$ correspondientes a λ_1. El conjugado de λ_1 es, por supuesto, λ_2. Esto se escribe como $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ y $\mathbf{K}_2 = \bar{\mathbf{K}}_1$. Hemos ilustrado el siguiente resultado general.

TEOREMA 8.2.2 Soluciones correspondientes a un eigenvalor complejo

Sea **A** una matriz de coeficientes que tiene entradas reales del sistema homogéneo (2) y sea $\mathbf{K}_1$ un eigenvector correspondiente al eigenvalor complejo $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, α y β reales. Entonces

$$\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{K}}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}$$

son soluciones de (2).

*Cuando la ecuación característica tiene coeficientes reales, los eigenvalores complejos siempre aparecen en pares conjugados.

†Note que la segunda ecuación es simplemente $(1 + 2i)$ veces la primera.

Es deseable y relativamente fácil reescribir una solución tal como (20) en términos de funciones reales. Con este fin primero usamos la fórmula de Euler para escribir

$$e^{(5+2i)t} = e^{5t}e^{2ti} = e^{5t}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t)$$
$$e^{(5-2i)t} = e^{5t}e^{-2ti} = e^{5t}(\cos 2t - i \operatorname{sen} 2t).$$

Entonces, multiplicando los números complejos, agrupando términos y reemplazando $c_1 + c_2$ por C_1 y $(c_1 - c_2)i$ por C_2, (20) se convierte en

$$\mathbf{X} = C_1\mathbf{X}_1 + C_2\mathbf{X}_2, \tag{21}$$

donde
$$\mathbf{X}_1 = \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right]e^{5t}$$

y
$$\mathbf{X}_2 = \left[\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right]e^{5t}.$$

Ahora es importante entender que los vectores $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ en (21) constituyen un conjunto linealmente independiente de soluciones *reales* del sistema original. Estamos justificados para despreciar la relación entre C_1, C_2 y c_1, c_2 y podemos considerar C_1 y C_2 como totalmente arbitrarias y reales. En otras palabras, la combinación lineal (21) es una solución general alternativa de (19). Además, con la forma real dada en (21) podemos obtener un diagrama de fase del sistema dado en (19). A partir de (21) podemos encontrar que $x(t)$ y $y(t)$ son

$$x = C_1e^{5t}\cos 2t + C_2e^{5t}\operatorname{sen} 2t$$
$$y = (C_1 - 2C_2)e^{5t}\cos 2t + (2C_1 + C_2)e^{5t}\operatorname{sen} 2t.$$

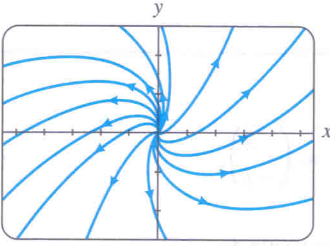


FIGURA 8.2.4 Un diagrama de fase del sistema (19).

Al graficar las trayectorias $(x(t), y(t))$ para diferentes valores de C_1 y C_2, se obtiene el diagrama de fase de (19) que se muestra en la figura 8.2.4. Ya que la parte real de λ_1 es $5 > 0$, $e^{5t} \to \infty$ conforme $t \to \infty$. Es por esto que las puntas de flecha de la figura 8.2.4 apuntan alejándose del origen; una partícula en cualquier trayectoria se mueve en espiral alejándose del origen conforme $t \to \infty$. El origen es un repulsor.

El proceso con el que se obtuvieron las soluciones reales en (21) se puede generalizar. Sea $\mathbf{K}_1$ un eigenvector característico de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ (con elementos reales) que corresponden al eigenvalor complejo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Entonces los vectores solución del teorema 8.2.2 se pueden escribir como

$$\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} = \mathbf{K}_1e^{\alpha t}e^{i\beta t} = \mathbf{K}_1e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen}\beta t)$$
$$\overline{\mathbf{K}}_1e^{\bar{\lambda}_1 t} = \overline{\mathbf{K}}_1e^{\alpha t}e^{-i\beta t} = \overline{\mathbf{K}}_1e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \operatorname{sen}\beta t).$$

Por el principio de superposición, teorema 8.1.2, los siguientes vectores también son soluciones:

$$\mathbf{X}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + \overline{\mathbf{K}}_1e^{\bar{\lambda}_1 t}) = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)e^{\alpha t}\cos \beta t - \frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$$

$$\mathbf{X}_2 = \frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + \overline{\mathbf{K}}_1e^{\bar{\lambda}_1 t}) = \frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)e^{\alpha t}\cos \beta t + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t.$$

Tanto $\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = a$ como $\frac{1}{2}i(-z + \bar{z}) = b$ son números *reales* para *cualquier* número complejo $z = a + ib$. Por tanto, los elementos de los vectores columna $\frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)$ y $\frac{1}{2}i(-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)$ son números reales. Definir

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1) \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_2 = \frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1), \tag{22}$$

conduce al siguiente teorema.

TEOREMA 8.2.3 Soluciones reales que corresponden a un eigenvalor complejo

Sea $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ un eigenvalor complejo de la matriz de coeficientes **A** en el sistema homogéneo (2) y sean $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ los vectores columna definidos en (22). Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= [\mathbf{B}_1 \cos \beta t - \mathbf{B}_2 \operatorname{sen} \beta t]e^{\alpha t} \\ \mathbf{X}_2 &= [\mathbf{B}_2 \cos \beta t + \mathbf{B}_1 \operatorname{sen} \beta t]e^{\alpha t} \end{aligned} \tag{23}$$

son soluciones linealmente independientes de (2) en $(-\infty, \infty)$.

Las matrices $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ en (22) con frecuencia se denotan por

$$\mathbf{B}_1 = \operatorname{Re}(\mathbf{K}_1) \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_2 = \operatorname{Im}(\mathbf{K}_1) \tag{24}$$

ya que estos vectores son, respectivamente, las partes *real* e *imaginaria* del eigenvector $\mathbf{K}_1$. Por ejemplo, (21) se deduce de (23) con

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \operatorname{Re}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_2 = \operatorname{Im}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 6 Eigenvalores complejos

Resuelva el problema con valores iniciales

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

SOLUCIÓN Primero se obtienen los eigenvalores a partir de

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 8 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0.$$

los eigenvalores son $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -2i$. Para λ_1 el sistema

$$\begin{aligned} (2 - 2i)\, k_1 + \qquad\qquad 8k_2 &= 0 \\ -k_1 + (-2 - 2i)k_2 &= 0 \end{aligned}$$

da $k_1 = -(2 + 2i)k_2$. Eligiendo $k_2 = -1$, se obtiene

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 + 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora de (24) formamos

$$\mathbf{B}_1 = \operatorname{Re}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_2 = \operatorname{Im}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $\alpha = 0$, se tiene a partir de (23) que la solución general del sistema es

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= c_1\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right] + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right] \\ &= c_1\begin{pmatrix} 2\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{26}$$

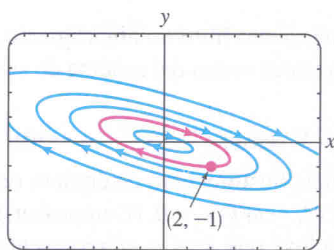


FIGURA 8.2.5 Un diagrama de fase del sistema (25).

Algunas gráficas de las curvas o trayectorias definidas por la solución (26) del sistema se ilustran en el diagrama de fase de la figura 8.2.5. Ahora la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, de forma equivalente $x(0) = 2$ y $y(0) = -1$ produce el sistema algebraico $2c_1 + 2c_2 = 2$, $-c_1 = -1$, cuya solución es $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Así la solución para el problema es $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$. La trayectoria específica definida paramétricamente por la solución particular $x = 2\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t$, $y = -\cos 2t$ es la curva en rojo de la figura 8.2.5. Observe que esta curva pasa por $(2, -1)$. ■

COMENTARIOS

En esta sección hemos examinado solamente sistemas homogéneos de ecuaciones lineales de primer orden en forma normal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$. Pero con frecuencia el modelo matemático de un sistema dinámico físico es un sistema homogéneo de segundo orden cuya forma normal es $\mathbf{X}'' = \mathbf{AX}$. Por ejemplo, el modelo para los resortes acoplados en (1) de la sección 7.6.

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1), \end{aligned} \tag{27}$$

se puede escribir como $\qquad \mathbf{MX}'' = \mathbf{KX},$

donde

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -k_1 - k_2 & k_2 \\ k_2 & -k_2 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Puesto que $\mathbf{M}$ es no singular, se puede resolver $\mathbf{X}''$ como $\mathbf{X}'' = \mathbf{AX}$, donde $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$. Por lo que (27) es equivalente a

$$\mathbf{X}'' = \begin{pmatrix} -\dfrac{k_1}{m_1} - \dfrac{k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} \end{pmatrix} \mathbf{X}. \tag{28}$$

Los métodos de esta sección se pueden usar para resolver este sistema en dos formas:

- Primero, el sistema original (27) se puede transformar en un sistema de primer orden por medio de sustituciones. Si se hace $x_1' = x_3$ y $x_2' = x_4$, entonces $x_3' = x_1''$ y $x_4' = x_2''$ por tanto (27) es equivalente a un sistema de *cuatro* ED lineales de primer orden.

$$\begin{aligned} x_1' &= x_3 \\ x_2' &= x_4 \\ x_3' &= -\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1}\right)x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 \\ x_4' &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_2 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_1}{m_1} - \dfrac{k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}. \tag{29}$$

Al encontrar los eigenvalores y los eigenvectores de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ en (29), vemos que la solución de este sistema de primer orden proporciona el estado completo del sistema físico, las posiciones de las masas respecto a las posiciones de equilibrio (x_1 y x_2) así como también las velocidades de las masas (x_3 y x_4) en el tiempo t. Véase el problema 48a en los ejercicios 8.2.

- Segundo, debido a que (27) describe el movimiento libre no amortiguado, se puede argumentar que las soluciones de valores reales del sistema de segundo orden (28) tendrán la forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\cos\omega t \quad \text{y} \quad \mathbf{X} = \mathbf{V}\,\text{sen}\,\omega t, \tag{30}$$

donde **V** es una matriz columna de constantes. Sustituyendo cualquiera de las funciones de (30) en $\mathbf{X}'' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ se obtiene $(\mathbf{A} + \omega^2\mathbf{I})\mathbf{V} = \mathbf{0}$. (Comprobar.) Identificando con (3) de esta sección se concluye que $\lambda = -\omega^2$ representa un eigenvalor y **V** un eigenvector correspondiente de **A**. Se puede demostrar que los eigenvalores $\lambda_i = -\omega_i^2, i = 1, 2$ de **A** son negativos y por tanto $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$ es un número real y representa una frecuencia de vibración (circular) (véase (4) de la sección 7.6). Con superposición de soluciones, la solución general de (28) es entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= c_1\mathbf{V}_1\cos\omega_1 t + c_2\mathbf{V}_1\,\text{sen}\,\omega_1 t + c_3\mathbf{V}_2\cos\omega_2 t + c_4\mathbf{V}_2\,\text{sen}\,\omega_2 t\\ &= (c_1\cos\omega_1 t + c_2\,\text{sen}\,\omega_1 t)\mathbf{V}_1 + (c_3\cos\omega_2 t + c_4\,\text{sen}\,\omega_2 t)\mathbf{V}_2,\end{aligned} \tag{31}$$

donde $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ son, a su vez, eigenvectores reales de **A** correspondientes a λ_1 y λ_2.

El resultado dado en (31) se generaliza. Si $-\omega_1^2, -\omega_2^2, \ldots, -\omega_n^2$ son eigenvalores negativos y distintos y $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_n$ son los eigenvectores correspondientes reales de la matriz $n \times n$ de coeficientes **A**, entonces el sistema homogéneo de segundo orden $\mathbf{X}'' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ tiene la solución general

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n}(a_i\cos\omega_i t + b_i\,\text{sen}\,\omega_i t)\mathbf{V}_i, \tag{32}$$

donde a_i y b_i representan constantes arbitrarias. Véase el problema 48b en los ejercicios 8.2.

EJERCICIOS 8.2

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-13.

8.2.1 EIGENVALORES REALES DISTINTOS

En los problemas 1 a 12 determine la solución general del sistema dado.

1. $\dfrac{dx}{dt} = x + 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = x + 3y$

3. $\dfrac{dx}{dt} = -4x + 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{5}{2}x + 2y$

4. $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{5}{2}x + 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{4}x - 2y$

5. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

6. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

7. $\dfrac{dx}{dt} = x + y - z$, $\dfrac{dy}{dt} = 2y$, $\dfrac{dz}{dt} = y - z$

8. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - 7y$, $\dfrac{dy}{dt} = 5x + 10y + 4z$, $\dfrac{dz}{dt} = 5y + 2z$

9. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

10. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

11. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{X}$

12. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

En los problemas 13 y 14, resuelva el problema con valores iniciales.

13. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

14. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tarea para el laboratorio de computación

En los problemas 15 y 16, use un SAC o software de álgebra lineal como ayuda para determinar la solución general del sistema dado.

15. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0.9 & 2.1 & 3.2 \\ 0.7 & 6.5 & 4.2 \\ 1.1 & 1.7 & 3.4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

16. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1.8 & 0 \\ 0 & 5.1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3.1 & 4 & 0 \\ -2.8 & 0 & 0 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

17. **a)** Utilice software para obtener el diagrama de fase del sistema en el problema 5. Si es posible, incluya puntas de flecha como en la figura 8.2.2. También incluya cuatro semirrectas en el diagrama de fase.

b) Obtenga las ecuaciones cartesianas de cada una de las cuatro semirrectas del inciso a).

c) Dibuje los eigenvectores en el diagrama de fase del sistema.

18. Encuentre los diagramas de fase para los sistemas de los problemas 2 y 4. Para cada sistema determine las trayectorias de semirrecta e incluya estas rectas en el diagrama de fase.

8.2.2 EIGENVALORES REPETIDOS

En los problemas 19 a 28 encuentre la solución general del sistema.

19. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - y$, $\dfrac{dy}{dt} = 9x - 3y$

20. $\dfrac{dx}{dt} = -6x + 5y$, $\dfrac{dy}{dt} = -5x + 4y$

21. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

22. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

23. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - y - z$, $\dfrac{dy}{dt} = x + y - z$, $\dfrac{dz}{dt} = x - y + z$

24. $\dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4z$, $\dfrac{dy}{dt} = 2x + 2z$, $\dfrac{dz}{dt} = 4x + 2y + 3z$

25. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

26. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

27. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

28. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

En los problemas 29 y 30, resuelva el problema de valores iniciales

29. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

30. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

31. Demuestre que la matriz de 5×5

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene un eigenvalor λ_1 de multiplicidad 5. Demuestre que se pueden determinar tres eigenvectores linealmente independientes correspondientes a λ_1.

Tarea para el laboratorio de computación

32. Determine los diagramas de fase para los sistemas de los problemas 20 y 21. Para cada sistema determine cualquier trayectoria de semirrecta e incluya estas líneas en el diagrama de fase.

8.2.3 EIGENVALORES COMPLEJOS

En los problemas 33 a 44, determine la solución general del sistema dado.

33. $\dfrac{dx}{dt} = 6x - y$, $\dfrac{dy}{dt} = 5x + 2y$

34. $\dfrac{dx}{dt} = x + y$, $\dfrac{dy}{dt} = -2x - y$

35. $\dfrac{dx}{dt} = 5x + y$, $\dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y$

36. $\dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y$, $\dfrac{dy}{dt} = -2x + 6y$

37. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

38. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

39. $\dfrac{dx}{dt} = z$, $\dfrac{dy}{dt} = -z$, $\dfrac{dz}{dt} = y$

40. $\dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 2z$, $\dfrac{dy}{dt} = 3x + 6z$, $\dfrac{dz}{dt} = -4x - 3z$

41. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

42. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

43. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -5 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ **44.** $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

En los problemas 45 y 46, resuelva el problema con valores iniciales.

45. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$

46. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

Tarea para el laboratorio de computación

47. Determine los diagramas de fase para los sistemas de los problemas 36, 37 y 38.

48. **a)** Resuelva (2) de la sección 7.6 usando el primer método descrito en los *Comentarios* (página 323), es decir, exprese (2) de la sección 7.6 como un sistema de cuatro ecuaciones lineales de primer orden. Use un SAC o software de álgebra lineal como ayuda para determinar los eigenvalores y los eigenvectores de una matriz de 4 × 4. Luego aplique las condiciones iniciales a su solución general para obtener (4) de la sección 7.6.

b) Resuelva (2) de la sección 7.6 usando el segundo método descrito en los *Comentarios*, es decir, exprese (2) de la sección 7.6 como un sistema de dos ecuaciones lineales de segundo orden. Suponga soluciones de la forma $\mathbf{X} = \mathbf{V}$ sen ωt y $\mathbf{X} = \mathbf{V}$ cos ωt. Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de una matriz de 2 × 2. Como en el inciso a), obtenga (4) de la sección 7.6.

Problemas para analizar

49. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas.

a) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ **b)** $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

Encuentre un diagrama de fase de cada sistema. ¿Cuál es la importancia geométrica de la recta $y = -x$ en cada diagrama?

50. Considere la matriz de 5 × 5 dada en el problema 31. Resuelva el sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ sin la ayuda de métodos matriciales, pero escriba la solución general usando notación matricial. Use la solución general como base para un análisis de cómo se puede resolver el sistema usando métodos matriciales de esta sección. Lleve a cabo sus ideas.

51. Obtenga una ecuación cartesiana de la curva definida paramétricamente por la solución del sistema lineal en el ejemplo 6. Identifique la curva que pasa por (2, −1) en la figura 8.2.5. [*Sugerencia*: Calcule x^2, y^2 y xy.]

52. Examine sus diagramas de fase del problema 47. ¿En qué condiciones el diagrama de fase de un sistema lineal homogéneo de 2 × 2 con eigenvalores complejos está compuesto de una familia de curvas cerradas? ¿De una familia de espirales? ¿En qué condiciones el origen (0, 0) es un repulsor? ¿Un atractor?

8.3 SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS

REPASO DE MATERIAL

- Sección 4.4 (Coeficientes indeterminados)
- Sección 4.6 (Variación de parámetros)

INTRODUCCIÓN En la sección 8.1 vimos que la solución general de un sistema lineal no homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$ en un intervalo I es $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p$, donde $\mathbf{X}_c = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n$ es la **función complementaria** o solución general del sistema lineal homogéneo asociado $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ y $\mathbf{X}_p$ es cualquier **solución particular** del sistema no homogéneo. En la sección 8.2 vimos cómo obtener $\mathbf{X}_c$ cuando la matriz de coeficientes **A** era una matriz de constantes $n \times n$. En esta sección consideraremos dos métodos para obtener $\mathbf{X}_p$.

Los métodos de **coeficientes indeterminados** y **variación de parámetros** empleados en el capítulo 4 para determinar soluciones particulares de EDO lineales no homogéneas, se pueden adaptar a la solución de sistemas lineales no homogéneos $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$. De los dos métodos, variación de parámetros es la técnica más poderosa. Sin embargo, hay casos en que el método de coeficientes indeterminados provee un medio rápido para encontrar una solución particular.

8.3.1 COEFICIENTES INDETERMINADOS

LAS SUPOSICIONES Como en la sección 4.4, el método de coeficientes indeterminados consiste en hacer una suposición bien informada acerca de la forma de un vector

solución particular $\mathbf{X}_p$; la suposición es originada por los tipos de funciones que constituyen los elementos de la matriz columna $\mathbf{F}(t)$. No es de sorprender que la versión matricial de los coeficientes indeterminados sea aplicable a $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$ sólo cuando los elementos de $\mathbf{A}$ son constantes y los elementos de $\mathbf{F}(t)$ son constantes, polinomios, funciones exponenciales, senos y cosenos o sumas y productos finitos de estas funciones.

EJEMPLO 1 Coeficientes indeterminados

Resuelva el sistema $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN Primero resolvemos el sistema homogéneo asociado

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

La ecuación característica de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0,$$

produce los eigenvalores complejos $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i$. Con los procedimientos de la sección 8.2, se encuentra que

$$\mathbf{X}_c = c_1\begin{pmatrix} \cos t + \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

Ahora, puesto que $\mathbf{F}(t)$ es un vector constante, se supone un vector solución particular constante $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$. Sustituyendo esta última suposición en el sistema original e igualando las entradas se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= -a_1 + 2b_1 - 8 \\ 0 &= -a_1 + b_1 + 3. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema algebraico se obtiene $a_1 = 14$ y $b_1 = 11$ y así, una solución particular $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$. La solución general del sistema original de ED en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es entonces $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p$ o

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} \cos t + \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}.$$ ■

EJEMPLO 2 Coeficientes indeterminados

Resuelva el sistema $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix}$ en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN Se determina que los eigenvalores y los eigenvectores del sistema homogéneo asociado $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$, $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por tanto la función complementaria es

$$\mathbf{X}_c = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{7t}.$$

Ahora bien, debido a que $\mathbf{F}(t)$ se puede escribir como $\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, se tratará de encontrar una solución particular del sistema que tenga la *misma* forma:

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo esta última suposición en el sistema dado se obtiene

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

o

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6a_2 + b_2 + 6)t + 6a_1 + b_1 - a_2 \\ (4a_2 + 3b_2 - 10)t + 4a_1 + 3b_1 - b_2 + 4 \end{pmatrix}.$$

De la última identidad se obtienen cuatro ecuaciones algebraicas con cuatro incógnitas

$$\begin{aligned} 6a_2 + b_2 + 6 &= 0 \\ 4a_2 + 3b_2 - 10 &= 0 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} 6a_1 + b_1 - a_2 &= 0 \\ 4a_1 + 3b_1 - b_2 + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo de forma simultánea las primeras dos ecuaciones se obtiene $a_2 = -2$ y $b_2 = 6$. Después, se sustituyen estos valores en las dos últimas ecuaciones y se despeja para a_1 y b_1. Los resultados son $a_1 = -\frac{4}{7}$, $b_1 = \frac{10}{7}$. Por tanto, se tiene que un vector solución particular es

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}.$$

la solución general del sistema en $(-\infty, \infty)$ es $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p$ o

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}.$$ ■

EJEMPLO 3 Forma de $\mathbf{X}_p$

Determine la forma de un vector solución particular $\mathbf{X}_p$ para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 5x + 3y - 2e^{-t} + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y + e^{-t} - 5t + 7.$$

SOLUCIÓN Ya que $\mathbf{F}(t)$ se puede escribir en términos matriciales como

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

una suposición natural para una solución particular sería

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$ ■

COMENTARIOS

El método de coeficientes indeterminados para sistemas lineales no es tan directo como parecerían indicar los últimos tres ejemplos. En la sección 4.4 la forma de una solución particular y_p se predijo con base en el conocimiento previo de la función complementaria y_c. Lo mismo se cumple para la formación de $\mathbf{X}_p$. Pero hay otras dificultades: las reglas que gobiernan la forma de y_p en la sección 4.4 no conducen a la formación de $\mathbf{X}_p$. Por ejemplo, si $\mathbf{F}(t)$ es un vector constante como en el ejemplo 1 y $\lambda = 0$ es un eigenvalor de multiplicidad uno, entonces $\mathbf{X}_c$ contiene un vector constante. Bajo la regla de multiplicación de la página 146 se trataría comúnmente de una solución particular de la forma $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} t$. Esta no es la suposición apropiada para sistemas lineales, la cual debe ser $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$. De igual manera, en el ejemplo 3, si se reemplaza e^{-t} en $\mathbf{F}(t)$ por e^{2t} ($\lambda = 2$ es un eigenvalor), entonces la forma correcta del vector solución particular es

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

En vez de ahondar en estas dificultades, se vuelve al método de variación de parámetros.

8.3.2 VARIACIÓN DE PARÁMETROS

UNA MATRIZ FUNDAMENTAL Si $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ en el intervalo I, entonces su solución general en el intervalo es la combinación lineal $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n$ o

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + c_n\begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1x_{11} + c_2x_{12} + \cdots + c_nx_{1n} \\ c_1x_{21} + c_2x_{22} + \cdots + c_nx_{2n} \\ \vdots \\ c_1x_{n1} + c_2x_{n2} + \cdots + c_nx_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

La última matriz en (1) se reconoce como el producto de una matriz $n \times n$ con una matriz $n \times 1$. En otras palabras, la solución general (1) se puede escribir como el producto

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}, \quad (2)$$

donde $\mathbf{C}$ es un vector columna de $n \times 1$ constantes arbitrarias $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y la matriz $n \times n$, cuyas columnas consisten en los elementos de los vectores solución del sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$,

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

se llama **matriz fundamental** del sistema en el intervalo.

En el análisis siguiente se requiere usar dos propiedades de una matriz fundamental:

- Una matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ es no singular.
- Si $\mathbf{\Phi}(t)$ es una matriz fundamental del sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, entonces

$$\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{A\Phi}(t). \tag{3}$$

Un nuevo examen de (9) del teorema 8.1.3 muestra que det $\boldsymbol{\phi}(t)$ es igual al Wronskiano $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)$. Por tanto, la independencia lineal de las columnas de $\mathbf{\Phi}(t)$ en el intervalo I garantiza que det $\mathbf{\Phi}(t) \neq 0$ para toda t en el intervalo. Puesto que $\mathbf{\Phi}(t)$ es no singular, el inverso multiplicativo $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$ existe para todo t en el intervalo. El resultado dado en (3) se deduce de inmediato del hecho de que cada columna de $\boldsymbol{\phi}(t)$ es un vector solución de $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.

VARIACIÓN DE PARÁMETROS Análogamente al procedimiento de la sección 4.6, nos preguntamos si es posible reemplazar la matriz de constantes $\mathbf{C}$ en (2) por una matriz columna de funciones

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{por lo que } \mathbf{X}_p = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}(t) \tag{4}$$

es una solución particular del sistema no homogéneo

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t). \tag{5}$$

Por la regla del producto la derivada de la última expresión en (4) es

$$\mathbf{X}_p' = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}'(t) + \mathbf{\Phi}'(t)\mathbf{U}(t). \tag{6}$$

Observe que el orden de los productos en (6) es muy importante. Puesto que $\mathbf{U}(t)$ es una matriz columna, los productos $\mathbf{U}'(t)\mathbf{\Phi}(t)$ y $\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}'(t)$ no están definidos. Sustituyendo (4) y (6) en (5), se obtiene

$$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}'(t) + \mathbf{\Phi}'(t)\mathbf{U}(t) = \mathbf{A\Phi}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}(t). \tag{7}$$

Ahora si usa (3) para reemplazar $\mathbf{\Phi}'(t)$, (7) se convierte en

$$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}'(t) + \mathbf{A\Phi}(t)\mathbf{U}(t) = \mathbf{A\Phi}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}(t)$$

o

$$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{F}(t). \tag{8}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (8) por $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$, se obtiene

$$\mathbf{U}'(t) = \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t) \quad \text{por tanto} \quad \mathbf{U}(t) = \int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt.$$

Puesto que $\mathbf{X}_p = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}(t)$, se concluye que una solución particular de (5) es

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt. \tag{9}$$

Para calcular la integral indefinida de la matriz columna $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)$ en (9), se integra cada entrada. Así, la solución general del sistema (5) es $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}p$ o

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} + \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt. \tag{10}$$

Observe que no es necesario usar una constante de integración en la evaluación de $\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$ por las mismas razones expresadas en la explicación de variación de parámetros en la sección 4.6.

EJEMPLO 4 Variación de parámetros

Resuelva el sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} \tag{11}$$

en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN Primero resolvemos el sistema homogéneo asociado

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{X}. \tag{12}$$

la ecuación característica de la matriz de coeficientes es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 5) = 0,$$

por lo que los eigenvalores son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -5$. Con el método usual se encuentra que los eigenvectores correspondientes a λ_1 y λ_2 son, respectivamente, $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Entonces, los vectores solución del sistema (11) son

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

Las entradas en $\mathbf{X}_1$ a partir de la primera columna de $\mathbf{\Phi}(t)$ y las entradas en $\mathbf{X}_2$ a partir de la segunda columna de $\mathbf{\Phi}(t)$. Por tanto

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix}.$$

A partir de (9) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_p = \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto a partir de (10) la solución de (11) en el intervalo es

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$

■

PROBLEMA CON VALORES INICIALES La solución general de (5) en el intervalo se puede escribir en una forma alternativa

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} + \mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{F}(s)\, ds, \tag{13}$$

donde t y t_0 son puntos en el intervalo. Esta última forma es útil para resolver (5) sujeta a una condición inicial $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$, porque los límites de integración se eligen de tal forma que la solución particular sea cero en $t = t_0$. Sustituyendo $t = t_0$ en (13) se obtiene $\mathbf{X}_0 = \mathbf{\Phi}(t_0)\mathbf{C}$ a partir de la que se obtiene $\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\mathbf{X}_0$. Sustituyendo este último resultado en (13) se obtiene la siguiente solución del problema con valores iniciales:

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\mathbf{X}_0 + \mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{F}(s)\, ds. \tag{14}$$

EJERCICIOS 8.3 *Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-14.*

8.3.1 COEFICIENTES INDETERMINADOS

En los problemas 1 a 8 utilice el método de los coeficientes indeterminados para resolver el sistema dado.

1. $\dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y - 7$

   $\dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + 5$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 5x + 9y + 2$

   $\dfrac{dy}{dt} = -x + 11y + 6$

3. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -2t^2 \\ t + 5 \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 4t + 9e^{6t} \\ -t + e^{6t} \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{3} \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}e^{t}$

6. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -2\cos t \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{4t}$

8. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 40 \end{pmatrix}$

9. Resuelva $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sujeta a

   $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

10. **a)** El sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ en la red eléctrica que se muestra en la figura 8.3.1 es

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_1/L_1 & -R_1/L_1 \\ -R_1/L_2 & -(R_1 + R_2)/L_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E/L_1 \\ E/L_2 \end{pmatrix}.$$

Use el método de los coeficientes indeterminados para resolver el sistema si $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $L_1 = 1$ h, $L_2 = 1$ h, $E = 60$ V, $i_2(0) = 0$, e $i_3(0) = 0$.

b) Determine la corriente $i_1(t)$.

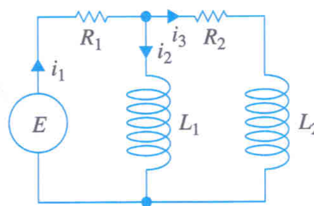


FIGURA 8.3.1 Red del problema 10.

8.3.2 VARIACIÓN DE PARÁMETROS

En los problemas 11 a 30 utilice variación de parámetros para resolver el sistema dado.

11. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - 3y + 4$

    $\dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y - 1$

12. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - y$

    $\dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 4t$

13. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ \frac{3}{4} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t/2}$

14. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix} e^{2t}$

15. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}$

16. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 2 \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$

17. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} t$

18. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{t} \end{pmatrix}$

19. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

20. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

21. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \sec t \\ 0 \end{pmatrix}$

22. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t}$

23. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{t}$

24. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \dfrac{e^{-2t}}{t}$

25. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sec t \tan t \end{pmatrix}$

26. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ \cot t \end{pmatrix}$

27. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \csc t \\ \sec t \end{pmatrix} e^{t}$

28. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \tan t \\ 1 \end{pmatrix}$

29. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{2t} \\ te^{3t} \end{pmatrix}$

30. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2e^{t} \end{pmatrix}$

En los problemas 31 y 32, use (14) para resolver el problema con valores iniciales.

31. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 4e^{4t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

32. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

33. El sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ en la red eléctrica que se muestra en la figura 8.3.2 es

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(R_1 + R_2)/L_2 & R_2/L_2 \\ R_2/L_1 & -R_2/L_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E/L_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Utilice variación de parámetros para resolver el sistema si $R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $L_1 = 1$ h, $L_2 = 1$ h, $E(t) = 100 \operatorname{sen} t$ V, $i_1(0) = 0$, e $i_2(0) = 0$.

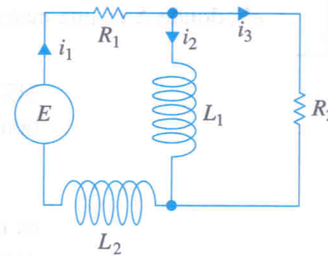


FIGURA 8.3.2 Red del problema 33.

Problemas para analizar

34. Si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de las ED homogéneas asociadas para $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$, demuestre en el caso de una ED lineal no homogénea de segundo orden que (9) se reduce a la forma de variación de parámetros analizada en la sección 4.6.

Tarea para el laboratorio de computación

35. Resolver un sistema lineal no homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$ usando variación de parámetros cuando $\mathbf{A}$ es una matriz 3×3 (o más grande) es casi una tarea imposible de hacer a mano. Considere el sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} te^{t} \\ e^{-t} \\ e^{2t} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Use un SAC o software de álgebra lineal para encontrar los eigenvalores y los eigenvectores de la matriz de coeficientes.

b) Forme una matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ y utilice la computadora para encontrar $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$.

c) Use la computadora para realizar los cálculos de: $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)$, $\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$, $\mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$, $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}$, y $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} + \int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$, donde $\mathbf{C}$ es una matriz columna de constantes c_1, c_2, c_3 y c_4.

d) Reescriba el resultado de la computadora para la solución general del sistema en la forma $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p$, donde $\mathbf{X}_c = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3 + c_4\mathbf{X}_4$.

8.4 MATRIZ EXPONENCIAL

REPASO DE MATERIAL

- Apéndice II.1 (definiciones II.10 y II.11)

INTRODUCCIÓN Las matrices se pueden usar de una manera completamente distinta para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Recuerde que la ecuación diferencial lineal simple de primer orden $x' = ax$, donde a es constante, tiene la solución general $x = ce^{at}$, donde c es constante. Parece natural preguntar si se puede definir una función exponencial matricial $e^{\mathbf{A}t}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz de constantes por lo que una solución del sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ es $e^{\mathbf{A}t}$.

SISTEMAS HOMOGÉNEOS Ahora veremos que es posible definir una matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ tal que

$$\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C} \tag{1}$$

es una solución del sistema homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$. Aquí $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$ de constantes y $\mathbf{C}$ es una matriz columna $n \times 1$ de constantes arbitrarias. Observe en (1) que la matriz $\mathbf{C}$ se multiplica por la derecha a $e^{\mathbf{A}t}$ porque queremos que $e^{\mathbf{A}t}$ sea una matriz $n \times n$. Mientras que el desarrollo completo del significado y teoría de la matriz exponencial requeriría un conocimiento completo de álgebra de matrices, una forma de definir $e^{\mathbf{A}t}$ se basa en la representación en serie de potencias de la función exponencial escalar e^{at}:

$$e^{at} = 1 + at + a^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + a^k\frac{t^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a^k\frac{t^k}{k!}. \tag{2}$$

La serie en (2) converge para *toda* t. Si se usa esta serie, con la identidad I en vez de 1 y la constante a se reemplaza por una matriz $\mathbf{A}$ $n \times n$ de constantes, se obtiene una definición para la matriz $n \times n$, $e^{\mathbf{A}t}$.

DEFINICIÓN 8.4.1 Matriz exponencial

Para cualquier matriz $\mathbf{A}$ $n \times n$,

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^k\frac{t^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k\frac{t^k}{k!}. \tag{3}$$

Se puede demostrar que la serie dada en (3) converge a una matriz $n \times n$ para todo valor de t. También, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}(\mathbf{A})^2$, etcétera.

DERIVADA DE $e^{\mathbf{A}t}$ La derivada de la matriz exponencial es similar a la propiedad de derivación de la exponencial escalar $\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$. Para justificar

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}, \tag{4}$$

derivamos (3) término por término:

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^k\frac{t^k}{k!} + \cdots\right] = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^3t^2 + \cdots$$

$$= \mathbf{A}\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots\right] = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}.$$

Debido a (4), ahora se puede probar que (1) es una solución de $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ para todo vector $n \times 1$ $\mathbf{C}$ de constantes:

$$\mathbf{X}' = \frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C} = \mathbf{A}(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}) = \mathbf{AX}.$$

$e^{\mathbf{A}t}$ ES UNA MATRIZ FUNDAMENTAL Si se denota la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ con el símbolo $\mathbf{\Psi}(t)$, entonces (4) es equivalente a la ecuación diferencial matricial $\mathbf{\Psi}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{\Psi}(t)$ (véase (3) de la sección 8.3). Además, se deduce de inmediato de la definición 8.4.1 que $\mathbf{\Psi}(0) = e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$, y por tanto $\det \mathbf{\Psi}(0) \neq 0$. Se tiene que estas propiedades son suficientes para concluir que $\mathbf{\Psi}(t)$ es una matriz fundamental del sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.

SISTEMAS NO HOMOGÉNEOS Se vio en (4) de la sección 2.4 que la solución general de la ecuación diferencial lineal única de primer orden $x' = ax + f(t)$, donde a es una constante, se puede expresar como

$$x = x_c + x_p = ce^{at} + e^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-as}f(s)\,ds.$$

Para un sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, se puede demostrar que la solución general de $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$ de constantes, es

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C} + e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{F}(s)\,ds. \tag{5}$$

Puesto que la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ es una matriz fundamental, siempre es no singular y $e^{-\mathbf{A}s} = (e^{\mathbf{A}s})^{-1}$. En la práctica, $e^{-\mathbf{A}s}$ se puede obtener de $e^{\mathbf{A}t}$ al reemplazar t por $-s$.

CÁLCULO DE $e^{\mathbf{A}t}$ La definición de $e^{\mathbf{A}t}$ dada en (3) siempre se puede usar para calcular $e^{\mathbf{A}t}$. Sin embargo, la utilidad práctica de (3) está limitada por el hecho de que los elementos de $e^{\mathbf{A}t}$ son series de potencias en t. Con un deseo natural de trabajar con cosas simples y familiares, se trata de reconocer si estas series definen una función de forma cerrada. Véanse los problemas 1 a 4 de los ejercicios 8.4. Por fortuna, hay muchas formas alternativas de calcular $e^{\mathbf{A}t}$; la siguiente explicación muestra cómo se puede usar la transformada de Laplace.

USO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE Vimos en (5) que $\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}t}$ es una solución de $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$. De hecho, puesto que $e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$, $\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}t}$ es una solución de problema con valores iniciales

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{I}. \tag{6}$$

Si $\mathbf{x}(s) = \mathscr{L}\{\mathbf{X}(t)\} = \mathscr{L}\{e^{\mathbf{A}t}\}$, entonces la transformada de Laplace de (6) es

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) \quad \text{o} \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{I}.$$

Multiplicando la última ecuación por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ se tiene que $\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{I} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. En otras palabras, $\mathscr{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ o

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathscr{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}. \tag{7}$$

EJEMPLO 1 Matriz exponencial

Use la transformada de Laplace para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN Primero calcule la matriz $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ y determine su inversa:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s+2 \end{pmatrix},$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{s+2}{s(s+1)} & \dfrac{-1}{s(s+1)} \\ \dfrac{2}{s(s+1)} & \dfrac{s-1}{s(s+1)} \end{pmatrix}.$$

Entonces, descomponiendo las entradas de la última matriz en fracciones parciales:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{s} - \dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{2}{s} - \dfrac{2}{s+1} & -\dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{s+1} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Se deduce de (7) que la transformada de Laplace inversa de (8) proporciona el resultado deseado,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} 2 - e^{-t} & -1 + e^{-t} \\ 2 - 2e^{-t} & -1 + 2e^{-t} \end{pmatrix}. \qquad ■$$

USO DE COMPUTADORAS Para quienes por el momento están dispuestos a intercambiar la comprensión por la velocidad de solución, $e^{\mathbf{A}t}$ se puede calcular con la ayuda de software. Véanse los problemas 27 y 28 de los ejercicios 8.4.

EJERCICIOS 8.4 *Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-14.*

En los problemas 1 y 2 use (3) para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ y $e^{-\mathbf{A}t}$.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **2.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

En los problemas 3 y 4 use (3) para calcular $e^{\mathbf{A}t}$.

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ **4.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

En los problemas 5 a 8 use (1) para encontrar la solución general del sistema dado.

5. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ **6.** $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

7. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ **8.** $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

En los problemas 9 a 12 use (5) para encontrar la solución general del sistema dado.

9. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} t \\ e^{4t} \end{pmatrix}$

11. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \cosh t \\ \operatorname{senh} t \end{pmatrix}$

13. Resuelva el sistema en el problema 7 sujeto a la condición inicial

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

14. Resuelva el sistema del problema 9 sujeto a la condición inicial

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En los problemas 15 a 18, use el método del ejemplo 1 para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ para la matriz de coeficientes. Use (1) para encontrar la solución general del sistema dado.

15. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ **16.** $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

17. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ **18.** $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

Sea **P** una matriz cuyas columnas son eigenvectores $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ que corresponden a eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de una matriz **A** de $n \times n$. Entonces se puede demostrar que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, donde **D** se define por

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

En los problemas 19 y 20, compruebe el resultado anterior para la matriz dada.

19. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ **20.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

21. Suponga que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, donde **D** se define como en (9). Use (3) para demostrar que $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1}$.

22. Use (3) para demostrar que

$$e^{\mathbf{D}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

donde **D** se define como en (9).

En los problemas 23 y 24 use los resultados de los problemas 19 a 22 para resolver el sistema dado.

23. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ **24.** $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

Problemas para analizar

25. Vuelva a leer el análisis que lleva al resultado dado en (7). ¿La matriz $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ siempre tiene inversa? Explique.

26. Se dice que una matriz **A** es **nilpotente** cuando existe algún entero m tal que $\mathbf{A}^m = \mathbf{0}$. Compruebe que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es nilpotente. Analice porqué es relativamente fácil calcular $e^{\mathbf{A}t}$ cuando **A** es nilpotente. Calcule $e^{\mathbf{A}t}$ y luego utilice (1) para resolver el sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.

Tarea para el laboratorio de computación

27. a) Utilice (1) para obtener la solución general de $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$. Use un SAC para encontrar $e^{\mathbf{A}t}$. Luego emplee la computadora para determinar eigenvalores y eigenvectores de la matriz de coeficientes $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y forme la solución general de acuerdo con la sección 8.2. Por último, reconcilie las dos formas de la solución general del sistema.

b) Use (1) para determinar la solución general de $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$. Use un SAC, para determinar $e^{\mathbf{A}t}$. En el caso de un resultado complejo, utilice el software para hacer la simplificación; por ejemplo, en *Mathematica*, si **m = MatrixExp[A t]** tiene elementos complejos, entonces intente con la instrucción **Simplify[ComplexExpand[m]]**.

28. Use (1) para encontrar la solución general de

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

Use MATLAB o un SAC para encontrar $e^{\mathbf{A}t}$.

REPASO DEL CAPÍTULO 8

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-15.

En los problemas 1 y 2 complete los espacios en blanco.

1. El vector $\mathbf{X} = k\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ es una solución de

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} - \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para $k =$ __________.

2. El vector $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-9t} + c_2\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}e^{7t}$ es solución del problema con valores iniciales $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ para $c_1 =$ __________ y $c_2 =$ __________.

3. Considere el sistema lineal $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

Sin intentar resolver el sistema, determine cada uno de los vectores

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

es un eigenvector de la matriz de coeficientes. ¿Cuál es la solución del sistema correspondiente a este eigenvector?

4. Considere un sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ de dos ecuaciones diferenciales, donde $\mathbf{A}$ es una matriz de coeficientes reales. ¿Cuál es la solución general del sistema si se sabe que $\lambda_1 = 1 + 2i$ es un eigenvalor y $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ es un eigenvector correspondiente?

En los problemas 5 a 14 resuelva el sistema lineal dado.

5. $\dfrac{dx}{dt} = 2x + y$
$\dfrac{dy}{dt} = -x$

6. $\dfrac{dx}{dt} = -4x + 2y$
$\dfrac{dy}{dt} = 2x - 4y$

7. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

8. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

9. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

10. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

11. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 2 \\ 16t \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \tan t \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ \cot t \end{pmatrix}$

14. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$

15. a) Considere el sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ de tres ecuaciones diferenciales de primer orden, donde la matriz de coeficientes es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -5 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

y $\lambda = 2$ es un eigenvalor conocido de multiplicidad dos. Encuentre dos soluciones diferentes del sistema correspondiente a este eigenvalor sin usar una fórmula especial (como (12) de la sección 8.2)

b) Use el procedimiento del inciso a) para resolver

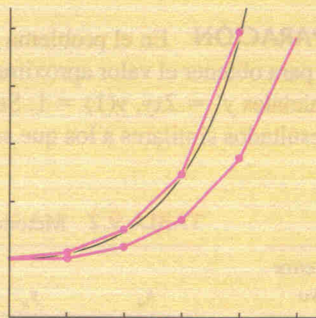
$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

16. Compruebe que $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}e^t$ es una solución del sistema lineal

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

para constantes arbitrarias c_1 y c_2. A mano, trace un diagrama de fase del sistema.

9 SOLUCIONES NUMÉRICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS



Aun cuando se pueda demostrar que la solución de una ecuación diferencial exista, no siempre es posible expresarla en forma explícita o implícita. En muchos casos tenemos que conformarnos con una aproximación de la solución. Si la solución existe, se representa por un conjunto de puntos en el plano cartesiano. En este capítulo continuamos investigando la idea básica de la sección 2.6, es decir, utilizar la ecuación diferencial para construir un algoritmo para aproximar las coordenadas y de los puntos de la curva solución real. Nuestro interés en este capítulo son principalmente los PVI $dy/dx = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. En la sección 4.9 vimos que los procedimientos numéricos desarrollados para las ED de primer orden se generalizan de una manera natural para sistemas de ecuaciones de primer orden y por tanto se pueden aproximar soluciones de una ecuación de orden superior remodelándola como un sistema de ED de primer orden. El capítulo 9 concluye con un método para aproximar soluciones de problemas con valores en la frontera lineales de segundo orden.

9.1 MÉTODOS DE EULER Y ANÁLISIS DE ERRORES

REPASO DE MATERIAL

- Sección 2.6

INTRODUCCIÓN En el capítulo 2 se examinó uno de los métodos numéricos más simples para aproximar soluciones de problemas con valores iniciales de primer orden $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Recuerde que la estructura del **método de Euler** fue la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \tag{1}$$

donde f es la función obtenida de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. El uso recursivo de (1) para $n = 0, 1, 2, \ldots$ produce las ordenadas $y, y_1, y_2, y_3, \ldots$ de puntos en "rectas tangentes" sucesivas respecto a la curva solución en $x_1, x_2, x_3, \ldots$ o $x_n = x_0 + nh$, donde h es una constante y es el tamaño de paso entre x_n y x_{n+1}. Los valores $y_1, y_2, y_3, \ldots$ aproximan los valores de una solución $y(x)$ del PVI en $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Pero sin importar la ventaja que la ecuación (1) tenga en su simplicidad, se pierde en la severidad de sus aproximaciones.

UNA COMPARACIÓN En el problema 4 de los ejercicios 2.6 se pidió usar el método de Euler para obtener el valor aproximado de $y(1.5)$ para la solución del problema con valores iniciales $y' = 2xy$, $y(1) = 1$. Se debe haber obtenido la solución analítica $y = e^{x^2-1}$ y resultados similares a los que se presentan en las tablas 9.1 y 9.2.

TABLA 9.1 Método de Euler con $h = 0.1$

x_n	y_n	Valor real	Valor absoluto	% de error relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.2000	1.2337	0.0337	2.73
1.20	1.4640	1.5527	0.0887	5.71
1.30	1.8154	1.9937	0.1784	8.95
1.40	2.2874	2.6117	0.3244	12.42
1.50	2.9278	3.4903	0.5625	16.12

TABLA 9.2 Método de Euler con $h = 0.05$

x_n	y_n	Valor real	Valor absoluto	% de error relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.05	1.1000	1.1079	0.0079	0.72
1.10	1.2155	1.2337	0.0182	1.47
1.15	1.3492	1.3806	0.0314	2.27
1.20	1.5044	1.5527	0.0483	3.11
1.25	1.6849	1.7551	0.0702	4.00
1.30	1.8955	1.9937	0.0982	4.93
1.35	2.1419	2.2762	0.1343	5.90
1.40	2.4311	2.6117	0.1806	6.92
1.45	2.7714	3.0117	0.2403	7.98
1.50	3.1733	3.4903	0.3171	9.08

En este caso, con un tamaño de paso $h = 0.1$, un error relativo de 16% en el cálculo de la aproximación a $y(1.5)$ es totalmente inaceptable. A expensas de duplicar el número de cálculos, se obtiene cierta mejoría en la precisión al reducir a la mitad el tamaño de paso, es decir $h = 0.05$.

ERRORES EN LOS MÉTODOS NUMÉRICOS Al elegir y usar un método numérico para la solución de un problema con valores iniciales, se debe estar consciente de las distintas fuentes de error. Para ciertas clases de cálculos, la acumulación de errores podría reducir la precisión de una aproximación al punto de hacer inútil el cálculo. Por otra parte, dependiendo del uso dado a una solución numérica, una precisión extrema podría no compensar el trabajo y la complicación adicionales.

Una fuente de error que siempre está presente en los cálculos es el **error de redondeo**. Este error es resultado del hecho de que cualquier calculadora o computadora puede representar números usando sólo un número finito de dígitos. Suponga, por

ejemplo, que se tiene una calculadora que usa aritmética base 10 y redondea a cuatro dígitos, de modo que $\frac{1}{3}$ se representa en la calculadora como 0.3333 y $\frac{1}{9}$ se representa como 0.1111. Si con esta calculadora se calcula $\left(x^2 - \frac{1}{9}\right)/\left(x - \frac{1}{3}\right)$ para $x = 0.3334$, se obtiene

$$\frac{(0.3334)^2 - 0.1111}{0.3334 - 0.3333} = \frac{0.1112 - 0.1111}{0.3334 - 0.3333} = 1.$$

Sin embargo, con ayuda de un poco de álgebra, vemos que

$$\frac{x^2 - \frac{1}{9}}{x - \frac{1}{3}} = \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{x - \frac{1}{3}} = x + \frac{1}{3},$$

por lo que cuando $x = 0.3334$, $\left(x^2 - \frac{1}{9}\right)/\left(x - \frac{1}{3}\right) \approx 0.3334 + 0.3333 = 0.6667$. Este ejemplo muestra que los efectos del redondeo pueden ser bastante considerables a menos que se tenga cierto cuidado. Una manera de reducir el efecto del redondeo es reducir el número de cálculos. Otra técnica en una computadora es usar aritmética de doble precisión para comprobar los resultados. En general, el error de redondeo es impredecible y difícil de analizar y se desprecia en el análisis siguiente, por lo que sólo nos dedicaremos a investigar el error introducido al usar una fórmula o algoritmo para aproximar los valores de la solución.

ERRORES DE TRUNCAMIENTO PARA EL MÉTODO DE EULER En la sucesión de valores $y_1, y_2, y_3, \ldots$ generados de (1), usualmente el valor de y_1 no concuerda con la solución real en x_1, en particular, $y(x_1)$, porque el algoritmo sólo da una aproximación de línea recta a la solución. Véase la figura 2.6.2. El error se llama **error de truncamiento local**, **error de fórmula** o **error de discretización**. Este ocurre en cada paso, es decir, si se supone que y_n es precisa, entonces y_{n+1} tendrá error de truncamiento local.

Para deducir una fórmula para el error de truncamiento local del método de Euler, se usa la fórmula de Taylor con residuo. Si una función $y(x)$ tiene $k + 1$ derivadas que son continuas en un intervalo abierto que contiene a a y a x, entonces

$$y(x) = y(a) + y'(a)\frac{x - a}{1!} + \cdots + y^{(k)}(a)\frac{(x - a)^k}{k!} + y^{(k+1)}(c)\frac{(x - a)^{k+1}}{(k + 1)!},$$

donde c es algún punto entre a y x. Al establecer $k = 1$, $a = x_n$ y $x = x_{n+1} = x_n + h$, se obtiene

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)\frac{h}{1!} + y''(c)\frac{h^2}{2!}$$

o

$$y(x_{n+1}) = \underbrace{y_n + hf(x_n, y_n)}_{y_{n+1}} + y''(c)\frac{h^2}{2!}.$$

El método de Euler (1) es la última fórmula sin el último término; por tanto, el error de truncamiento local en y_{n+1} es

$$y''(c)\frac{h^2}{2!}, \quad \text{donde} \quad x_n < c < x_{n+1}.$$

Usualmente se conoce el valor de c (existe desde el punto de vista teórico) y por tanto no se puede calcular el error *exacto*, pero un límite superior en el valor absoluto del error es $Mh^2/2!$, donde $M = \max_{x_n < x < x_{n+1}} |y''(x)|$.

Al analizar los errores que surgen del uso de métodos numéricos, es útil usar la notación $O(h^n)$. Para definir este concepto, se denota con $e(h)$ el error en un cálculo numérico dependiendo de h. Entonces se dice que $e(h)$ es de orden h^n, denotado con $O(h^n)$, si existe una constante C y un entero positivo n tal que $|e(h)| \le Ch^n$ para h suficientemente pequeña. Por lo que el error de truncamiento local para el método de Euler es $O(h^2)$. Se observa que, en general, si $e(h)$ en un método numérico es del orden h^n y h se reduce a la mitad, el nuevo error es más o menos $C(h/2)^n = Ch^n/2^n$; es decir, el error se redujo por un factor de $1/2^n$.

EJEMPLO 1 Límite para errores de truncamiento local

Determine un límite superior para los errores de truncamiento local del método de Euler aplicado a $y' = 2xy$, $y(1) = 1$.

SOLUCIÓN De la solución $y = e^{x^2-1}$ obtenemos $y'' = (2 + 4x^2)e^{x^2-1}$, por lo que el error de truncamiento es

$$y''(c)\frac{h^2}{2} = (2 + 4c^2)e^{(c^2-1)}\frac{h^2}{2},$$

donde c está entre x_n y $x_n + h$. En particular, para $h = 0.1$ se puede obtener un límite superior en el error de truncamiento local para y_1 al reemplazar c por 1.1:

$$[2 + (4)(1.1)^2]e^{((1.1)^2-1)}\frac{(0.1)^2}{2} = 0.0422.$$

De la tabla 9.1 se observa que el error después del primer paso es 0.0337, menor que el valor dado por el límite.

De igual forma, se puede obtener un límite para el error de truncamiento local de cualquiera de los cinco pasos que se muestran en la tabla 9.1 al reemplazar c por 1.5 (este valor de c da el valor más grande de $y''(c)$ de cualquiera de los pasos y puede ser demasiado generoso para los primeros pasos). Al hacer esto se obtiene

$$[2 + (4)(1.5)^2]e^{((1.5)^2-1)}\frac{(0.1)^2}{2} = 0.1920 \tag{2}$$

como un límite o cota superior para el error de truncamiento local en cada paso. ■

Observe que si h se reduce a 0.05 en el ejemplo 1, entonces el límite de error es 0.0480, casi un cuarto del valor que se muestra en (2). Esto es de esperarse porque el error de truncamiento local para el método de Euler es $O(h^2)$.

En el análisis anterior se supone que el valor de y_n fue exacto en el cálculo de y_{n+1} pero no lo es porque contiene errores de truncamiento local de los pasos anteriores. El error total en y_{n+1} es una acumulación de errores en cada uno de los pasos previos. Este error total se llama **error de truncamiento global**. Un análisis completo del error de truncamiento global queda fuera del alcance de este libro, pero se puede mostrar que el error de truncamiento global para el método de Euler es $O(h)$.

Se espera que para el método de Euler, si el tamaño de paso es la mitad, el error será más o menos la mitad. Esto se confirma en las tablas 9.1 y 9.2 donde el error absoluto en $x = 1.50$ con $h = 0.1$ es 0.5625 y con $h = 0.05$ es 0.3171, aproximadamente la mitad.

En general, se puede demostrar que si un método para la solución numérica de una ecuación diferencial tiene error de truncamiento local $O(h^{\alpha+1})$, entonces el error de truncamiento global es $O(h^{\alpha})$.

En lo que resta de esta sección y en las siguientes, se estudian métodos mucho más precisos que el método de Euler.

MÉTODO DE EULER MEJORADO El método numérico definido por la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})}{2}, \tag{3}$$

donde
$$y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \tag{4}$$

se conoce comúnmente como el **método de Euler mejorado**. Para calcular y_{n+1} para $n = 0, 1, 2, \ldots$ de (3), se debe, en cada paso, usar primero el método de Euler (4) para obtener una estimación inicial y^*_{n+1}. Por ejemplo, con $n = 0$, usando (4) se obtiene $y^*_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, y después, conociendo este valor, se usa (3) para obtener $y_1 = y_0 + h\dfrac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y^*_1)}{2}$, donde $x_1 = x_0 + h$. Estas ecuaciones se representan

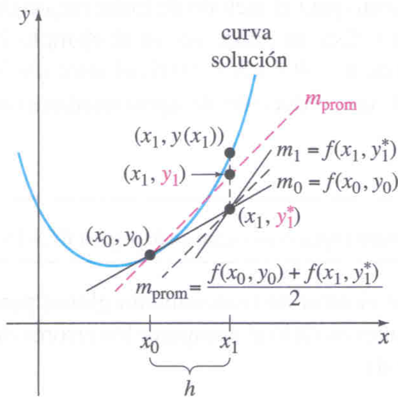


FIGURA 9.1.1 La pendiente de la recta roja punteada es el promedio de m_0 y m_1.

con facilidad. En la figura 9.1.1 se observa que $m_0 = f(x_0, y_0)$ y $m_1 = f(x_1, y_1^*)$ son pendientes de las rectas trazadas con la línea continua que pasan por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1^*), respectivamente. Tomando un promedio de estas pendientes, es decir, $m_{prom} = \dfrac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2}$, se obtiene la pendiente de las rectas paralelas inclinadas. Con el primer paso, más que avanzar a lo largo de la recta que pasa por (x_0, y_0) con pendiente $f(x_0, y_0)$ al punto con coordenada y y_1^* obtenida por el método de Euler, se avanza a lo largo de la recta punteada de color rojo que pasa por (x_0, y_0) con pendiente m_{prom} hasta llegar a x_1. Al examinar la figura parece posible que y_1 sea una mejora de y_1^*.

En general, el método de Euler mejorado es un ejemplo de un **método de predicción-corrección**. El valor de y_{n+1}^* dado por (4) predice un valor de $y(x_n)$, mientras que el valor de y_{n+1} definido por la fórmula (3) corrige esta estimación.

EJEMPLO 2 Método de Euler mejorado

Use el método de Euler mejorado para obtener el valor aproximado de $y(1.5)$ para la solución del problema con valores iniciales $y' = 2xy$, $y(1) = 1$. Compare los resultados para $h = 0.1$ y $h = 0.05$.

SOLUCIÓN Con $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $f(x_n, y_n) = 2x_ny_n$, $n = 0$ y $h = 0.1$, primero se calcula (4):

$$y_1^* = y_0 + (0.1)(2x_0y_0) = 1 + (0.1)2(1)(1) = 1.2.$$

Se usa este último valor en (3) junto con $x_1 = 1 + h = 1 + 0.1 = 1.1$:

$$y_1 = y_0 + (0.1)\frac{2x_0y_0 + 2x_1y_1^*}{2} = 1 + (0.1)\frac{2(1)(1) + 2(1.1)(1.2)}{2} = 1.232.$$

En las tablas 9.3 y 9.4, se presentan los valores comparativos de los cálculos para $h = 0.1$ y $h = 0.05$, respectivamente.

TABLA 9.3 Método de Euler mejorado con $h = 0.1$

x_n	y_n	Valor real	Valor absoluto	% de error relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.2320	1.2337	0.0017	0.14
1.20	1.5479	1.5527	0.0048	0.31
1.30	1.9832	1.9937	0.0106	0.53
1.40	2.5908	2.6117	0.0209	0.80
1.50	3.4509	3.4904	0.0394	1.13

TABLA 9.4 Método de Euler mejorado con $h = 0.05$

x_n	y_n	Valor real	Valor absoluto	% de error relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.05	1.1077	1.1079	0.0002	0.02
1.10	1.2332	1.2337	0.0004	0.04
1.15	1.3798	1.3806	0.0008	0.06
1.20	1.5514	1.5527	0.0013	0.08
1.25	1.7531	1.7551	0.0020	0.11
1.30	1.9909	1.9937	0.0029	0.14
1.35	2.2721	2.2762	0.0041	0.18
1.40	2.6060	2.6117	0.0057	0.22
1.45	3.0038	3.0117	0.0079	0.26
1.50	3.4795	3.4904	0.0108	0.31

■

Aquí es importante hacer una advertencia. No se pueden calcular primero todos los valores de y_n^*; y después sustituir sus valores en la fórmula (3). En otras palabras, no se pueden usar los datos de la tabla 9.1 para ayudar a construir los valores de la tabla 9.3. ¿Por qué no?

ERRORES DE TRUNCAMIENTO PARA EL MÉTODO DE EULER MEJORADO

El error de truncamiento local para el método de Euler mejorado es $O(h^3)$. La deducción de este resultado es similar a la deducción del error de truncamiento local para el

método de Euler. Puesto que el error de truncamiento para el método de Euler mejorado es $O(h^3)$, el error de truncamiento global es $O(h^2)$. Esto se puede ver en el ejemplo 2; cuando el tamaño de paso se reduce a la mitad de $h = 0.1$ a $h = 0.05$, el error absoluto en $x = 1.50$ se reduce de 0.0394 a 0.0108, una reducción de aproximadamente $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

EJERCICIOS 9.1

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-15.

En los problemas 1 a 10, use el método de Euler mejorado para obtener una aproximación de cuatro decimales del valor indicado. Primero use $h = 0.1$ y después $h = 0.05$.

1. $y' = 2x - 3y + 1, y(1) = 5;\quad y(1.5)$
2. $y' = 4x - 2y, y(0) = 2;\quad y(0.5)$
3. $y' = 1 + y^2, y(0) = 0;\quad y(0.5)$
4. $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1;\quad y(0.5)$
5. $y' = e^{-y}, y(0) = 0;\quad y(0.5)$
6. $y' = x + y^2, y(0) = 0;\quad y(0.5)$
7. $y' = (x - y)^2, y(0) = 0.5;\quad y(0.5)$
8. $y' = xy + \sqrt{y}, y(0) = 1;\quad y(0.5)$
9. $y' = xy^2 - \dfrac{y}{x}, y(1) = 1;\quad y(1.5)$
10. $y' = y - y^2, y(0) = 0.5;\quad y(0.5)$
11. Considere el problema con valores iniciales $y' = (x + y - 1)^2$, $y(0) = 2$. Use el método de Euler mejorado con $h = 0.1$ y $h = 0.05$ para obtener los valores aproximados de la solución en $x = 0.5$. En cada paso compare el valor aproximado con el valor real de la solución analítica.
12. Aunque podría no ser evidente de la ecuación diferencial, su solución podría tener "un mal comportamiento" cerca de un punto x en el que se desea aproximar $y(x)$. Los procedimientos numéricos podrían dar resultados bastante distintos cerca de este punto. Sea $y(x)$ la solución del problema con valores iniciales $y' = x^2 + y^3$, $y(1) = 1$.
    a) Use un programa de solución numérica para trazar la solución en el intervalo [1, 1.4].
    b) Con el tamaño de paso $h = 0.1$, compare los resultados obtenidos con el método de Euler con los del método de Euler mejorado en la aproximación de $y(1.4)$.
13. Considere el problema con valores iniciales $y' = 2y$, $y(0) = 1$. La solución analítica es $y = e^{2x}$.
    a) Aproxime $y(0.1)$ con un paso y el método de Euler.
    b) Determine un límite para el error de truncamiento local en y_1.
    c) Compare el error en y_1 con su límite de error.
    d) Aproxime $y(0.1)$ con dos pasos y el método de Euler.
    e) Compruebe que el error de truncamiento global para el método de Euler es $O(h)$ al comparar los errores de los incisos a) y d).
14. Repita el problema 13 con el método de Euler mejorado. Su error de truncamiento global es $O(h^2)$.
15. Repita el problema 13 con el problema con valores iniciales $y' = x - 2y$, $y(0) = 1$. La solución analítica es
$$y = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{4}e^{-2x}.$$
16. Repita el problema 15 usando el método de Euler mejorado. Su error de truncamiento global es $O(h^2)$.
17. Considere el problema con valores iniciales $y' = 2x - 3y + 1$, $y(1) = 5$. La solución analítica es
$$y(x) = \tfrac{1}{9} + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{38}{9}e^{-3(x-1)}.$$
    a) Encuentre una fórmula en la que intervengan c y h para el error de truncamiento local en el n-ésimo paso si se usa el método de Euler.
    b) Encuentre un límite para el error de truncamiento local en cada paso si se usa $h = 0.1$ para aproximar $y(1.5)$.
    c) Aproxime $y(1.5)$ con $h = 0.1$ y $h = 0.05$ con el método de Euler. Véase el problema 1 de los ejercicios 2.6.
    d) Calcule los errores del inciso c) y compruebe que el error de truncamiento global del método de Euler es $O(h)$.
18. Repita el problema 17 usando el método de Euler mejorado que tiene un error de truncamiento global $O(h^2)$. Véase el problema 1. Podría ser necesario conservar más de cuatro decimales para ver el efecto de reducir el orden del error.
19. Repita el problema 17 para el problema con valores iniciales $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$. La solución analítica es $y(x) = \ln(x + 1)$. Aproxime $y(0.5)$. Véase el problema 5 en los ejercicios 2.6.
20. Repita el problema 19 con el método de Euler mejorado, que tiene un error de truncamiento global $O(h^2)$. Véase el problema 5. Podría ser necesario conservar más de cuatro decimales para ver el efecto de reducir el orden de error.

Problemas para analizar

21. Conteste la pregunta "¿Por qué no?" que sigue a los tres enunciados después del ejemplo 2 de la página 343.

9.2 MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

REPASO DE MATERIAL

- Sección 2.8 (véase página 78).

INTRODUCCIÓN Probablemente uno de los procedimientos numéricos más populares, así como más preciso, usado para obtener soluciones aproximadas para un problema con valores iniciales $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ es el **método de Runge-Kutta de cuarto orden**. Como el nombre lo indica, existen métodos de Runge-Kutta de diferentes órdenes.

MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA En esencia, los métodos de Runge-Kutta son generalizaciones de la fórmula básica de Euler (1) de la sección 9.1 en que la función pendiente f se reemplaza por un promedio ponderado de pendientes en el intervalo $x_n \leq x \leq x_{n+1}$. Es decir,

$$y_{n+1} = y_n + h\,\overbrace{(w_1k_1 + w_2k_2 + \cdots + w_mk_m)}^{\text{promedio ponderado}}. \tag{1}$$

Aquí los pesos w_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, son constantes que generalmente satisfacen $w_1 + w_2 + \cdots + w_m = 1$, y cada k_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, es la función f evaluada en un punto seleccionado (x, y) para el que $x_n \leq x \leq x_{n+1}$. Veremos que las k_i se definen recursivamente. El número m se llama el **orden** del método. Observe que al tomar $m = 1$, $w_1 = 1$ y $k_1 = f(x_n, y_n)$, se obtiene la conocida fórmula de Euler $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$. Por esta razón, se dice que el método de Euler es un **método de Runge-Kutta de primer orden**.

El promedio en (1) no se forma a la fuerza, pero los parámetros se eligen de modo que (1) concuerda con un polinomio de Taylor de grado m. Como se vio en la sección anterior, si una función $y(x)$ tiene $k + 1$ derivadas que son continuas en un intervalo abierto que contiene a a y a x, entonces se puede escribir

$$y(x) = y(a) + y'(a)\frac{x-a}{1!} + y''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + y^{(k+1)}(c)\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!},$$

donde c es algún número entre a y x. Si se reemplaza a por x_n y x por $x_{n+1} = x_n + h$, entonces la fórmula anterior se convierte en

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(c),$$

donde c es ahora algún número entre x_n y x_{n+1}. Cuando $y(x)$ es una solución de $y' = f(x, y)$ en el caso $k = 1$ y el residuo $\frac{1}{2}h^2y''(c)$ es pequeño, vemos que un polinomio de Taylor $y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n)$ de grado uno concuerda con la fórmula de aproximación del método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n = y_n + hf(x_n, y_n).$$

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN Para ilustrar más (1), ahora se considera un **procedimiento de Runge-Kutta de segundo orden**. Éste consiste en encontrar constantes o parámetros w_1, w_2, α y β tal que la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1k_1 + w_2k_2), \tag{2}$$

donde

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta hk_1),$$

concuerda con un polinomio de Taylor de grado dos. Para nuestros objetivos es suficiente decir que esto se puede hacer siempre que las constantes satisfagan

$$w_1 + w_2 = 1, \qquad w_2\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad w_2\beta = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Este es un sistema algebraico de tres ecuaciones con cuatro incógnitas y tiene un número infinito de soluciones:

$$w_1 = 1 - w_2, \qquad \alpha = \frac{1}{2w_2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{2w_2}, \tag{4}$$

donde $w_2 \neq 0$. Por ejemplo, la elección $w_2 = \frac{1}{2}$ produce $w_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ y, por tanto (2) se convierte en

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2),$$

donde $$k_1 = f(x_n, y_n) \quad \text{y} \quad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1).$$

Puesto que $x_n + h = x_{n+1}$ y $y_n + hk_1 = y_n + hf(x_n, y_n)$ se reconoce al resultado anterior como el método mejorado de Euler que se resume en (3) y (4) de la sección 9.1.

En vista de que $w_2 \neq 0$ se puede elegir de modo arbitrario en (4), hay muchos posibles métodos de Runge-Kutta de segundo orden. Véase el problema 2 en los ejercicios 9.2.

Se omite cualquier explicación de los métodos de tercer orden para llegar al punto principal de análisis en esta sección.

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN Un **procedimiento de Runge-Kutta de cuarto orden** consiste en determinar parámetros de modo que la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + w_4k_4), \tag{5}$$

donde
$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 hk_1) \\ k_3 &= f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 hk_1 + \beta_3 hk_2) \\ k_4 &= f(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 hk_1 + \beta_5 hk_2 + \beta_6 hk_3), \end{aligned}$$

concuerda con un polinomio de Taylor de grado cuatro. Esto da como resultado un sistema de 11 ecuaciones con 13 incógnitas. El conjunto de valores usado con más frecuencia para los parámetros produce el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned} \tag{6}$$

Mientras que las otras fórmulas de cuarto orden se deducen con facilidad, el algoritmo resumido en (6) que es muy usado y reconocido como una invaluable herramienta de cálculo, se denomina *el* método de Runge-Kutta de cuarto orden o método *clásico* de Runge-Kutta. De aquí en adelante, se debe considerar a (6), cuando se use la abreviatura *método RK4*.

Se le aconseja que tenga cuidado con las fórmulas en (6); observe que k_2 depende de k_1, k_3 depende de k_2 y k_4 depende de k_3. También, k_2 y k_3 implican aproximaciones a la pendiente en el punto medio $x_n + \frac{1}{2}h$ en el intervalo definido por $x_n \leq x \leq x_{n+1}$.

EJEMPLO 1 Método RK4

Use el método RK4 con $h = 0.1$ para obtener una aproximación a $y(1.5)$ para la solución de $y' = 2xy$, $y(1) = 1$.

SOLUCIÓN Para ejemplificar permítanos calcular el caso cuando $n = 0$. De (6) se encuentra que

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) = 2x_0y_0 = 2 \\ k_2 &= f\left(x_0 + \tfrac{1}{2}(0.1), y_0 + \tfrac{1}{2}(0.1)2\right) \\ &= 2\left(x_0 + \tfrac{1}{2}(0.1)\right)\left(y_0 + \tfrac{1}{2}(0.2)\right) = 2.31 \\ k_3 &= f\left(x_0 + \tfrac{1}{2}(0.1), y_0 + \tfrac{1}{2}(0.1)2.31\right) \\ &= 2\left(x_0 + \tfrac{1}{2}(0.1)\right)\left(y_0 + \tfrac{1}{2}(0.231)\right) = 2.34255 \\ k_4 &= f(x_0 + (0.1), y_0 + (0.1)2.34255) \\ &= 2(x_0 + 0.1)(y_0 + 0.234255) = 2.715361 \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{0.1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 1 + \frac{0.1}{6}(2 + 2(2.31) + 2(2.34255) + 2.715361) = 1.23367435. \end{aligned}$$

Los cálculos que restan se resumen en la tabla 9.5, cuyas entradas se redondean a cuatro decimales. ■

TABLA 9.5 Método RK4 con $h = 0.1$

x_n	y_n	Valor real	Valor absoluto	% de error relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.2337	1.2337	0.0000	0.00
1.20	1.5527	1.5527	0.0000	0.00
1.30	1.9937	1.9937	0.0000	0.00
1.40	2.6116	2.6117	0.0001	0.00
1.50	3.4902	3.4904	0.0001	0.00

Al examinar la tabla 9.5 se encuentra por qué el método de Runge-Kutta de cuarto orden es popular. Si todo lo que se desea es una precisión de cuatro decimales, es innecesario usar un tamaño de paso más pequeño. En la tabla 9.6 se comparan los resultados de aplicar los métodos de Euler, de Euler mejorado y de Runge-Kutta de cuarto orden al problema con valores iniciales $y' = 2xy$, $y(1) = 1$. (Véanse las tablas 9.1 y 9.3.)

TABLA 9.6 $y' = 2xy$, $y(1) = 1$

Comparación de métodos numéricos con $h = 0.1$					Comparación de métodos numéricos con $h = 0.05$				
x_n	Euler	Euler mejorado	RK4	Valor real	x_n	Euler	Euler mejorado	RK4	Valor real
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.10	1.2000	1.2320	1.2337	1.2337	1.05	1.1000	1.1077	1.1079	1.1079
1.20	1.4640	1.5479	1.5527	1.5527	1.10	1.2155	1.2332	1.2337	1.2337
1.30	1.8154	1.9832	1.9937	1.9937	1.15	1.3492	1.3798	1.3806	1.3806
1.40	2.2874	2.5908	2.6116	2.6117	1.20	1.5044	1.5514	1.5527	1.5527
1.50	2.9278	3.4509	3.4902	3.4904	1.25	1.6849	1.7531	1.7551	1.7551
					1.30	1.8955	1.9909	1.9937	1.9937
					1.35	2.1419	2.2721	2.2762	2.2762
					1.40	2.4311	2.6060	2.6117	2.6117
					1.45	2.7714	3.0038	3.0117	3.0117
					1.50	3.1733	3.4795	3.4903	3.4904

ERRORES DE TRUNCAMIENTO PARA EL MÉTODO RK4 En la sección 9.1 vimos que los errores de truncamiento globales para el método de Euler y el método de Euler mejorado son, respectivamente, $O(h)$ y $O(h^2)$. Debido a que la primera ecuación en (6) concuerda con un polinomio de Taylor de cuarto grado, el error de truncamiento global para este método es $y^{(5)}(c)\,h^5/5!$ o $O(h^5)$, y así el error de truncamiento global es $O(h^4)$. Ahora es evidente por qué el método de Euler, el método de Euler mejorado y (6) son métodos de *primero*, *segundo* y *cuarto orden*, respectivamente.

EJEMPLO 2 Límite para errores de truncamiento locales

Determine un límite para los errores de truncamiento local del método RK4 aplicado a $y' = 2xy$, $y(1) = 1$.

SOLUCIÓN Al calcular la quinta derivada de la solución conocida $y(x) = e^{x^2-1}$ se obtiene

$$y^{(5)}(c)\frac{h^5}{5!} = (120c + 160c^3 + 32c^5)e^{c^2-1}\frac{h^5}{5!}. \tag{7}$$

Por lo que con $c = 1.5$, (7) se obtiene un límite de 0.00028 en el error de truncamiento local para cada uno de los cinco pasos cuando $h = 0.1$. Observe que en la tabla 9.5 el error en y_1 es mucho menor que este límite.

En la tabla 9.7 se presentan las aproximaciones a la solución del problema con valores iniciales en $x = 1.5$ que se obtienen del método RK4. Al calcular el valor de la solución analítica en $x = 1.5$, se puede encontrar el error en estas aproximaciones. Debido a que el método es tan preciso, se deben usar muchos decimales en la solución numérica para ver el efecto de reducir a la mitad el tamaño de paso. Observe que cuando h se reduce a la mitad, de $h = 0.1$ a $h = 0.05$, el error se divide entre un factor de aproximadamente $2^4 = 16$, como se esperaba. ■

TABLA 9.7 Método RK4

h	Aproximación	Error
0.1	3.49021064	$1.32321089 \times 10^{-4}$
0.05	3.49033382	$9.13776090 \times 10^{-6}$

MÉTODOS DE ADAPTACIÓN Se ha visto que la precisión de un método numérico para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales mejora al reducir el tamaño de paso h. Por supuesto, esta mayor precisión tiene usualmente un costo, en particular, incremento en el tiempo de cálculo y mayor posibilidad de error de redondeo. En general, en el intervalo de aproximación podría haber subintervalos donde un tamaño de paso relativamente grande es suficiente y otros subintervalos donde se requiere un tamaño de paso más pequeño para mantener el error de truncamiento dentro del límite deseado. Los métodos numéricos en los que se usa un tamaño de paso variable se llaman **métodos de adaptación**. Una de las rutinas más populares de adaptación es el **método de Runge-Kutta-Fehlberg**. Debido a que Fehlberg empleó dos métodos de Runge-Kutta de órdenes distintos, uno de cuarto y otro de quinto, este algoritmo suele denotarse como **método RKF45**.*

*El método de Runga-Kutta de orden cuarto usado en RKF45 *no* es el mismo que se presenta en (6).

EJERCICIOS 9.2

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-15.

1. Use el método RK4 con $h = 0.1$ para aproximar $y(0.5)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valores iniciales $y' = (x + y - 1)^2$, $y(0) = 2$. Compare este valor aproximado con el valor real obtenido en el problema 11 de los ejercicios 9.1.
2. Suponga que $w_2 = \frac{3}{4}$ en (4). Use el método de Runge-Kutta de segundo orden resultante para aproximar $y(0.5)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales en el problema 1. Compare este valor aproximado con el valor obtenido en el problema 11 en los ejercicios 9.1.

En los problemas 3 a 12, use el método RK4 con $h = 0.1$ para obtener una aproximación de cuatro decimales del valor indicado.

3. $y' = 2x - 3y + 1$, $y(1) = 5$; $y(1.5)$
4. $y' = 4x - 2y$, $y(0) = 2$; $y(0.5)$
5. $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$; $y(0.5)$
6. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$; $y(0.5)$
7. $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$; $y(0.5)$
8. $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$; $y(0.5)$
9. $y' = (x - y)^2$, $y(0) = 0.5$; $y(0.5)$
10. $y' = xy + \sqrt{y}$, $y(0) = 1$; $y(0.5)$
11. $y' = xy^2 - \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$; $y(1.5)$
12. $y' = y - y^2$, $y(0) = 0.5$; $y(0.5)$
13. Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea, entonces la velocidad v de una masa m que se deja caer desde cierta altura se determina de

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \qquad k > 0.$$

Sea $v(0) = 0$, $k = 0.125$, $m = 5$ slugs y $g = 32$ pies/s^2.

a) Use el método RK4 con $h = 1$ para aproximar la velocidad $v(5)$.

b) Utilice un programa de solución numérica para trazar la gráfica solución del PVI en el intervalo [0, 6].

c) Utilice la separación de variables para resolver el PVI y luego determine el valor real $v(5)$.

14. Un modelo matemático para el área A (en cm²) que ocupa una colonia de bacterias (*B. dendroides*) está dada por

$$\frac{dA}{dt} = A(2.128 - 0.0432A).*$$

Suponga que el área inicial es 0.24 cm².

a) Use el método RK4 con $h = 0.5$ para completar la siguiente tabla:

t (días)	1	2	3	4	5
A (observado)	2.78	13.53	36.30	47.50	49.40
A (aproximado)					

b) Use un programa de solución numérica para trazar la gráfica de solución del problema con valores iniciales. Calcule los valores $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$ y $A(5)$ de la gráfica.

c) Use la separación de variables para resolver el problema con valores iniciales y calcular los valores reales $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$ y $A(5)$.

15. Considere el problema con valores iniciales $y' = x^2 + y^3$, $y(1) = 1$. Véase el problema 12 de los ejercicios 9.1.

a) Compare los resultados obtenidos de usar el método RK4 en el intervalo [1, 1.4] con tamaños de paso $h = 0.1$ y $h = 0.05$.

b) Utilice un programa de solución numérica para trazar la gráfica solución del problema con valores iniciales en el intervalo [1, 1.4].

16. Considere el problema con valores iniciales $y' = 2y$, $y(0) = 1$. La solución analítica es $y(x) = e^{2x}$.

a) Aproxime $y(0.1)$ con un paso y el método RK4.

b) Determine un límite para el error de truncamiento local en y_1.

c) Compare el error en y_1 con el límite de error.

d) Aproxime $y(0.1)$ con dos pasos y el método RK4.

e) Compruebe que el error global de truncamiento para el método RK4 es $O(h^4)$ comparando los errores en los incisos a) y d).

17. Repita el problema 16 con el problema con valores iniciales $y' = -2y + x$, $y(0) = 1$. La solución analítica es

$$y(x) = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{4}e^{-2x}.$$

*Véase V. A. Kostitzin, *Mathematical Biology* (Londond: Harrap, 1939).

18. Considere el problema con valores iniciales $y' = 2x - 3y + 1$, $y(1) = 5$. La solución analítica es

$$y(x) = \tfrac{1}{9} + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{38}{9}e^{-3(x-1)}.$$

a) Encuentre una fórmula en la que intervengan c y h para el error de truncamiento local en el n-ésimo paso si se emplea el método RK4.

b) Calcule un límite para el error de truncamiento local en cada paso si se emplea $h = 0.1$ para aproximar $y(1.5)$.

c) Aproxime $y(1.5)$ con el método RK4 con $h = 0.1$ y $h = 0.05$. Véase el problema 3. Será necesario considerar más de seis cifras para ver el efecto de reducir el tamaño de paso.

19. Repita el problema 18 para el problema con valores iniciales $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$. La solución analítica es $y(x) = \ln(x + 1)$. Aproxime $y(0.5)$. Véase el problema 7.

Problemas para analizar

20. Se utiliza una cuenta del número de evaluaciones de la función usada para resolver el problema con valores iniciales $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ como medida de la complejidad de un método numérico. Determine el número de evaluaciones de f requeridas para cada paso de los métodos de Euler, de Euler mejorado y RK4. Considerando algunos ejemplos, compare la precisión de estos métodos cuando se usa con complejidades computacionales comparables.

Tarea para el laboratorio de computación

21. El método RK4 para resolver un problema con valores iniciales en un intervalo $[a, b]$ da como resultado un conjunto finito de puntos que se supone aproximan puntos en la gráfica de la solución exacta. Para ampliar este conjunto de puntos discretos a una solución aproximada definida en los puntos en el intervalo $[a, b]$, se puede usar una **función de interpolación**. Esta es una función incluida en la mayor parte de los sistemas de álgebra computarizados, que concuerda de modo exacto con los datos y asume una transición uniforme entre puntos. Estas funciones de interpolación pueden ser polinomios o conjuntos de polinomios que se unen suavemente. En *Mathematica* el comando **y = Interpolation[data]** se usa para obtener una función de interpolación por los puntos **data** = $\{\{x_0, y_0\}, \{x_1, y_1\}, \ldots, \{x_n, y_n\}\}$. La función de interpolación **y[x]** se puede tratar ahora como cualquier otra función integrada en el sistema algebraico computarizado.

a) Encuentre la solución analítica del problema con valores iniciales $y' = -y + 10 \operatorname{sen} 3x$; $y(0) = 0$ en el intervalo [0, 2]. Trace la gráfica de esta solución y determine sus raíces positivas.

b) Use el método RK4 con $h = 0.1$ para aproximar una solución del problema con valores iniciales del inciso a). Obtenga una función de interpolación y trace la gráfica. Encuentre las raíces positivas de la función de interpolación del intervalo [0, 2].

Problema aportado

Layachi Hadji
Profesor Asociado del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Alabama.

22. Un enfoque energético a los sistemas resorte/masa Considere un sistema que consiste en una masa M conectada a un resorte de constante elástica k. Despreciamos todos los efectos debidos a la fricción, suponemos que una fuerza constante F actúa sobre la masa. Si el resorte se estira una cantidad $x(t)$, entonces la *energía elástica* del resorte es $E_{elás} = \frac{1}{2}x^2$. Esta energía elástica se puede convertir a *energía cinética* $E_{cin} = \frac{1}{2}M(dx/dt)^2$. La energía potencial es $E_{pot} = Fx$. El principio de la conservación de la energía implica que $E_{elás} + E_{cin} + E_{pot} =$ constante, en particular,

$$\frac{1}{2}M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 + Fx = C,$$

donde C es una constante que denota la energía total en el sistema. Véase la figura 9.2.2.

a) Considere el caso de movimiento libre, es decir, haga $F = 0$. Muestre que el movimiento del sistema resorte/masa, para el cual la posición inicial de la masa es $x = 0$ está descrito por el siguiente problema con valores iniciales (PVI) de primer orden:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2x^2 = C, \quad x(0) = 0,$$

donde $\omega = \sqrt{k/M}$.

b) Si se toma la constante del inciso a) igual a $C = 1$, demuestre que si se considera la raíz cuadrada positiva, el PVI se reduce a

$$\frac{dy}{dt} = \omega\sqrt{1 - y^2}, \quad y(0) = 0, \qquad (8)$$

donde $y = \omega x$.

c) Resuelva el PVI del inciso b) usando cualquier método de Euler o el método RK4. Use los valores numéricos $M = 3$ kg para la masa y $k = 48$ N/m para la constante del resorte.

d) Observe que no importa qué tan pequeño haga su tamaño de paso h, la solución empieza en el punto $(0, 0)$ y aumenta casi linealmente a la solución constante $(x, 1)$. Demuestre que la solución numérica está descrita por

$$y(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{si } 0 \le t \le \pi/8, \\ 1, & \text{si } t > \pi/8. \end{cases}$$

¿Esta solución describe en forma real el movimiento de la masa?

e) La ecuación diferencial (8) es separable. Separe las variables e integre para obtener una solución analítica. ¿La solución analítica describe en forma real el movimiento del resorte?

f) Esta es otra forma de modelar el problema numéricamente. Derivando ambos lados de (8) respecto a t, demuestre que se obtiene el PVI de segundo orden con coeficientes constantes

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

g) Resuelva el PVI en el inciso f) numéricamente usando el método RK4 y compare con la solución analítica.

h) Repita el análisis anterior para el caso de movimiento forzado. Tome $F = 10$ N.

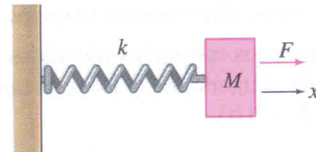


FIGURA 9.2.2 Sistema resorte/masa.

9.3 MÉTODOS MULTIPASOS

REPASO DE MATERIAL

- Secciones 9.1 y 9.2.

INTRODUCCIÓN Los métodos de Euler, de Euler mejorado y de Runge-Kutta son ejemplos de métodos de un **sólo paso** o **de inicio**. En estos métodos cada valor sucesivo y_{n+1} se calcula sólo con base en la información acerca del valor precedente inmediato y_n. Por otro lado, los **métodos multipasos** o **continuos** usan los valores de los diferentes pasos calculados para obtener el valor de y_{n+1}. Hay un gran número de fórmulas de métodos multipasos para aproximar soluciones de ED, pero como no se tiene la intención de estudiar el extenso campo de procedimientos numéricos, sólo consideraremos uno de estos métodos.

MÉTODO DE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON El método multipasos que se analiza en esta sección se llama **método de Adams-Bashforth-Moulton** de cuarto orden. Al igual que el método de Euler mejorado es un método de predicción-corrección, es decir, se emplea una fórmula para predecir un valor y^*_{n+1}, que a su vez se usa para obtener un valor corregido y_{n+1}. La predicción en este método es la fórmula de Adams-Bashforth

$$y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}), \tag{1}$$

$$y'_n = f(x_n, y_n)$$
$$y'_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$
$$y'_{n-2} = f(x_{n-2}, y_{n-2})$$
$$y'_{n-3} = f(x_{n-3}, y_{n-3})$$

para $n \geq 3$. Después se sustituye el valor de y^*_{n+1} en la corrección de Adams-Moulton

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9y'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}) \tag{2}$$
$$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y^*_{n+1}).$$

Observe que la fórmula (1) requiere conocer los valores de y_0, y_1, y_2 y y_3 para obtener y_4. Por supuesto, el valor de y_0 es la condición inicial dada. El error de truncamiento local del método de Adams-Bashforth-Moulton es $O(h^5)$, los valores de y_1, y_2 y y_3 se calculan generalmente con un método con la misma propiedad de error, tal como el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

EJEMPLO 1 Método de Adams-Bashforth-Moulton

Use el método de Adams-Bashforth-Moulton con $h = 0.2$ para obtener una aproximación a $y(0.8)$ para la solución de

$$y' = x + y - 1, \quad y(0) = 1.$$

SOLUCIÓN Con un tamaño de paso de $h = 0.2$, $y(0.8)$ se aproxima por y_4. En principio se emplea el método RK4 con $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $h = 0.2$ para obtener

$$y_1 = 1.02140000, \qquad y_2 = 1.09181796, \qquad y_3 = 1.22210646.$$

Ahora con las identificaciones $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ y $f(x, y) = x + y - 1$, encontramos

$$y'_0 = f(x_0, y_0) = (0) + (1) - 1 = 0$$
$$y'_1 = f(x_1, y_1) = (0.2) + (1.02140000) - 1 = 0.22140000$$
$$y'_2 = f(x_2, y_2) = (0.4) + (1.09181796) - 1 = 0.49181796$$
$$y'_3 = f(x_3, y_3) = (0.6) + (1.22210646) - 1 = 0.82210646.$$

Con los valores anteriores entonces la predicción (1) es

$$y^*_4 = y_3 + \frac{0.2}{24}(55y'_3 - 59y'_2 + 37y'_1 - 9y'_0) = 1.42535975.$$

Para usar la corrección (2), primero se necesita

$$y'_4 = f(x_4, y^*_4) = 0.8 + 1.42535975 - 1 = 1.22535975.$$

Por último, usando (2) se obtiene

$$y_4 = y_3 + \frac{0.2}{24}(9y_4' + 19y_3' - 5y_2' + y_1') = 1.42552788.$$

Se debe comprobar que el valor real de $y(0.8)$ en el ejemplo 1 es $y(0.8) = 1.42554093$. Véase el problema 1 en los ejercicios 9.3.

ESTABILIDAD DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS Una consideración importante al usar métodos numéricos para aproximar la solución de un problema con valores iniciales es la estabilidad del método. En términos simples, un método numérico es **estable** si cambios pequeños en la condición inicial dan como resultado sólo cambios pequeños en la solución calculada. Se dice que un método numérico es **inestable** si no es estable. La razón por la cual las consideraciones de estabilidad son importantes es que en cada paso después del primero de una técnica numérica esencialmente se empieza otra vez con un nuevo problema con valores iniciales, donde la condición inicial es el valor solución aproximado calculado en el paso anterior. Debido a la presencia del error de redondeo, es casi seguro que este valor varíe al menos un poco respecto al valor verdadero de la solución. Además del error de redondeo, otra fuente común de error ocurre en la condición inicial; en aplicaciones físicas los datos con frecuencia se obtienen con mediciones imprecisas.

Un posible método para detectar inestabilidad en la solución numérica de un problema con valores iniciales específico es comparar las soluciones aproximadas obtenidas cuando se emplean tamaños de paso reducidos. Si el método es inestable, el error puede aumentar en realidad con tamaños de paso más pequeños. Otra forma de comprobar la inestabilidad, es observar lo que sucede con las soluciones cuando se perturba un poco la condición inicial (por ejemplo, cambiar $y(0) = 1$ a $y(0) = 0.999$).

Para un estudio más detallado y preciso de la estabilidad, consulte un libro de análisis numérico. En general, los métodos examinados en este capítulo tienen buenas características de estabilidad.

VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LOS MÉTODOS MULTIPASOS Intervienen muchas consideraciones en la elección de un método para resolver de forma numérica una ecuación diferencial. Los métodos de un sólo paso, en particular el RK4, se eligen debido a su precisión y al hecho de que son fáciles de programar. Sin embargo, una desventaja importante es que el lado derecho de la ecuación diferencial se debe evaluar muchas veces en cada paso. Por ejemplo, el método RK4 requiere cuatro evaluaciones de función para cada paso. Por otro lado, si se han calculado y almacenado las evaluaciones de función del paso anterior, un método multipasos requiere sólo una nueva evaluación de función para cada paso. Esto puede originar grandes ahorros de tiempo y reducir costos.

Como ejemplo, resolver en forma numérica $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ usando n pasos con el método de Runge-Kutta de cuarto orden requiere $4n$ evaluaciones de la función. El método multipasos de Adams-Bashforth requiere 16 evaluaciones de la función para el iniciador de cuarto orden de Runge-Kutta y $n - 4$ para los n pasos de Adams-Bashforth, lo que da un total de $n + 12$ evaluaciones de la función para este método. En general, el método multipasos de Adams-Bashforth requiere poco más de un cuarto del número de evaluaciones de función necesarias para el método RK4. Si se complica la evaluación de $f(x, y)$, el método multipasos será más eficaz.

Otro asunto relacionado con los métodos multipasos es cuántas veces se debe repetir en cada paso la fórmula de corrección de Adams-Moulton. Cada vez que se usa la corrección, se hace otra evaluación de la función y por tanto se incrementa la precisión a expensas de perder una ventaja del método multipasos. En la práctica, la corrección se calcula una vez y si se cambia el valor de y_{n+1} por una cantidad grande, se reinicia todo el problema con un tamaño de paso más pequeño. Esta es con frecuencia la base de los métodos de tamaño de paso variable, cuyo análisis está fuera del alcance de este libro.

EJERCICIOS 9.3

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-16.

1. Determine la solución analítica del problema con valores iniciales del problema 1. Compare los valores reales de $y(0.2)$, $y(0.4)$, $y(0.6)$ y $y(0.8)$ con las aproximaciones y_1, y_2, y_3 y y_4.

2. Escriba un programa de computadora para ejecutar el método de Adams-Bashforth-Moulton.

En los problemas 3 y 4 use el método Adams-Bashforth-Moulton para aproximar $y(0.8)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales dado. Use $h = 0.2$ y el método RK4 para calcular y_1, y_2 y y_3.

3. $y' = 2x - 3y + 1, \quad y(0) = 1$

4. $y' = 4x - 2y, \quad y(0) = 2$

En los problemas 5 a 8, use el método de Adams-Bashforth-Moulton para aproximar $y(1.0)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales dado. Primero use $h = 0.2$ y después use $h = 0.1$. Use el método RK4 para calcular y_1, y_2 y y_3.

5. $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$

6. $y' = y + \cos x, \quad y(0) = 1$

7. $y' = (x - y)^2, \quad y(0) = 0$

8. $y' = xy + \sqrt{y}, \quad y(0) = 1$

9.4 ECUACIONES Y SISTEMAS DE ORDEN SUPERIOR

REPASO DE MATERIAL

- Sección 1.1 (forma normal de una ED de segundo orden)
- Sección 4.9 (ED de segundo orden escrita como un sistema de ED de primer orden)

INTRODUCCIÓN Hasta ahora, nos hemos concentrado en técnicas numéricas que se pueden usar para aproximar la solución de un problema con valores iniciales de primer orden $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Para aproximar la solución de un problema con valores iniciales de segundo orden, se debe expresar una ED de segundo orden como un sistema de dos ED de primer orden. Para hacer esto, se empieza por escribir la ED de segundo orden en forma normal al despejar y'' en términos de x, y y y'.

PVI DE SEGUNDO ORDEN Un problema con valores iniciales de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = u_0 \tag{1}$$

se puede expresar como un problema con valores iniciales para un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Si $y' = u$, la ecuación diferencial en (1) se convierte en el sistema

$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= f(x, y, u). \end{aligned} \tag{2}$$

Puesto que $y'(x_0) = u(x_0)$, las condiciones iniciales correspondientes para (2) son $y(x_0) = y_0$, $u(x_0) = u_0$. El sistema (2) se puede resolver de forma numérica mediante la simple aplicación de un método numérico a cada ecuación diferencial de primer orden en el sistema. Por ejemplo, el **método de Euler** aplicado al sistema (2) sería

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hu_n \\ u_{n+1} &= u_n + hf(x_n, y_n, u_n), \end{aligned} \tag{3}$$

mientras que el **método de Runge-Kutta de cuarto orden** o **método RK4**, sería

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \tag{4}$$

donde
$$\begin{aligned} m_1 &= u_n & k_1 &= f(x_n, y_n, u_n) \\ m_2 &= u_n + \tfrac{1}{2}hk_1 & k_2 &= f\left(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hm_1, u_n + \tfrac{1}{2}hk_1\right) \\ m_3 &= u_n + \tfrac{1}{2}hk_2 & k_3 &= f\left(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hm_2, u_n + \tfrac{1}{2}hk_2\right) \\ m_4 &= u_n + hk_3 & k_4 &= f(x_n + h, y_n + hm_3, u_n + hk_3). \end{aligned}$$

En general, se puede expresar cada ecuación diferencial de n-ésimo orden $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden usando las sustituciones $y = u_1$, $y' = u_2$, $y'' = u_3, \ldots, y^{(n-1)} = u^n$.

EJEMPLO 1 Método de Euler

Use el método de Euler para obtener el valor aproximado de $y(0.2)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \tag{5}$$

SOLUCIÓN En términos de la sustitución $y' = u$, la ecuación es equivalente para el sistema

$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= -xu - y. \end{aligned}$$

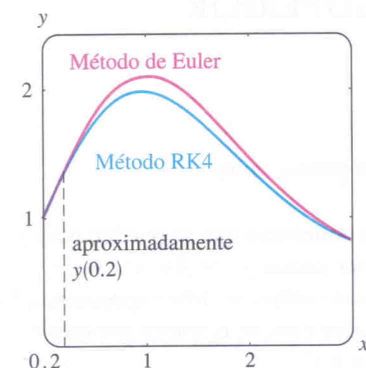
Por lo que de (3) se obtiene

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hu_n \\ u_{n+1} &= u_n + h[-x_n u_n - y_n]. \end{aligned}$$

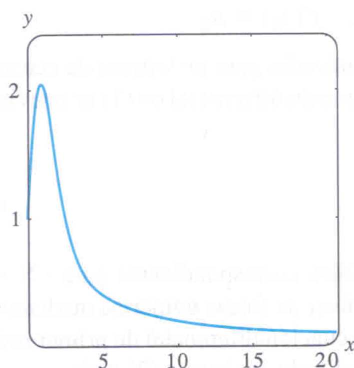
Usando el tamaño de paso $h = 0.1$ y $y_0 = 1$, $u_0 = 2$, encontramos

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + (0.1)u_0 = 1 + (0.1)2 = 1.2 \\ u_1 &= u_0 + (0.1)\,[-x_0u_0 - y_0] = 2 + (0.1)[-(0)(2) - 1] = 1.9 \\ y_2 &= y_1 + (0.1)u_1 = 1.2 + (0.1)(1.9) = 1.39 \\ u_2 &= u_1 + (0.1)[-x_1u_1 - y_1] = 1.9 + (0.1)[-(0.1)(1.9) - 1.2] = 1.761. \end{aligned}$$

En otras palabras, $y(0.2) \approx 1.39$ y $y'(0.2) \approx 1.761$. ■



a) Método de Euler (roja) y método RK4 (azul)



b) Método RK4

FIGURA 9.4.1 Curvas solución numérica generadas con diferentes métodos.

Con ayuda de la aplicación para graficar de un programa de solución numérica, en la figura 9.4.1a se compara la curva solución de (5) generada con el método de Euler ($h = 0.1$) en el intervalo $[0, 3]$ con la curva solución generada con el método RK4 ($h = 0.1$). De la figura 9.4.1b parece que la solución $y(x)$ de (4) tiene la propiedad que $y(x) \to 0$ conforme $x \to \infty$.

Si se desea, se puede usar el método de la sección 6.1 para obtener dos soluciones en serie de potencias de la ecuación diferencial en (5). Pero a menos que este método revele que la ED tiene una solución elemental, aún se puede aproximar $y(0.2)$ con una suma parcial. Examinando nuevamente las soluciones en serie infinitas de la ecuación diferencial de Airy $y'' + xy = 0$, vistas en la página 226, no muestran el comportamiento oscilatorio que las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ presentan en las gráficas de la figura 6.1.2. Esas gráficas se obtuvieron con un programa de solución numérica usando el método RK4 con tamaño de paso de $h = 0.1$.

SISTEMAS REDUCIDOS A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN Usando un procedimiento similar al que se acaba de describir para ecuaciones de segundo orden, se reduce un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior a un sistema de ecuaciones de primer orden, determinando primero la derivada de orden superior de cada variable dependiente y después haciendo las sustituciones apropiadas para las derivadas de orden menor.

EJEMPLO 2 Un sistema reescrito como un sistema de primer orden

Escriba
$$x'' - x' + 5x + 2y'' = e^t$$
$$-2x + y'' + 2y = 3t^2$$
como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

SOLUCIÓN Escriba el sistema como
$$x'' + 2y'' = e^t - 5x + x'$$
$$y'' = 3t^2 + 2x - 2y$$
y después elimine y'' multiplicando la segunda ecuación por 2 y restando. Esto da
$$x'' = -9x + 4y + x' + e^t - 6t^2.$$
Puesto que la segunda ecuación del sistema ya expresa la derivada de y de orden superior en términos de las demás funciones, ahora se tiene la posibilidad de introducir nuevas variables. Si se hace $x' = u$ y $y' = v$, las expresiones para x'' y y'' respectivamente, se convierten en
$$u' = x'' = -9x + 4y + u + e^t - 6t^2$$
$$v' = y'' = 2x - 2y + 3t^2.$$
El sistema original se puede escribir en la forma
$$x' = u$$
$$y' = v$$
$$u' = -9x + 4y + u + e^t - 6t^2$$
$$v' = 2x - 2y + 3t^2.$$
■

No siempre es posible realizar las reducciones que se muestran en el ejemplo 2.

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE UN SISTEMA La solución de un sistema de la forma
$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
se puede aproximar con una versión del método de Euler, de Runge-Kutta o de Adams-Bashforth-Moulton adaptada al sistema. Por ejemplo, el método RK4 aplicado al sistema
$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, y) \\ y' &= g(t, x, y) \\ x(t_0) &= x_0, \qquad y(t_0) = y_0, \end{aligned} \tag{6}$$
se parece a:
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned} \tag{7}$$

donde

$$\begin{aligned}
m_1 &= f(t_n, x_n, y_n) & k_1 &= g(t_n, x_n, y_n) \\
m_2 &= f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}hm_1, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1\right) & k_2 &= g\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}hm_1, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1\right) \\
m_3 &= f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}hm_2, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2\right) & k_3 &= g\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}hm_2, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2\right) \\
m_4 &= f(t_n + h, x_n + hm_3, y_n + hk_3) & k_4 &= g(t_n + h, x_n + hm_3, y_n + hk_3).
\end{aligned} \tag{8}$$

EJEMPLO 3 Método RK4

Considere el problema con valores iniciales

$$x' = 2x + 4y$$

$$y' = -x + 6y$$

$$x(0) = -1, \qquad y(0) = 6.$$

Use el método RK4 para aproximar $x(0.6)$ y $y(0.6)$. Compare los resultados para $h = 0.2$ y $h = 0.1$.

SOLUCIÓN Se muestran los cálculos de x_1 y y_1 con tamaño de paso $h = 0.2$. Con las identificaciones $f(t, x, y) = 2x + 4y$, $g(t, x, y) = -x + 6y$, $t_0 = 0$, $x_0 = -1$ y $y_0 = 6$, se ve de (8) que

$$m_1 = f(t_0, x_0, y_0) = f(0, -1, 6) = 2(-1) + 4(6) = 22$$

$$k_1 = g(t_0, x_0, y_0) = g(0, -1, 6) = -1(-1) + 6(6) = 37$$

$$m_2 = f\left(t_0 + \tfrac{1}{2}h, x_0 + \tfrac{1}{2}hm_1, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_1\right) = f(0.1, 1.2, 9.7) = 41.2$$

$$k_2 = g\left(t_0 + \tfrac{1}{2}h, x_0 + \tfrac{1}{2}hm_1, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_1\right) = g(0.1, 1.2, 9.7) = 57$$

$$m_3 = f\left(t_0 + \tfrac{1}{2}h, x_0 + \tfrac{1}{2}hm_2, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_2\right) = f(0.1, 3.12, 11.7) = 53.04$$

$$k_3 = g\left(t_0 + \tfrac{1}{2}h, x_0 + \tfrac{1}{2}hm_2, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_2\right) = g(0.1, 3.12, 11.7) = 67.08$$

$$m_4 = f(t_0 + h, x_0 + hm_3, y_0 + hk_3) = f(0.2, 9.608, 19.416) = 96.88$$

$$k_4 = g(t_0 + h, x_0 + hm_3, y_0 + hk_3) = g(0.2, 9.608, 19.416) = 106.888.$$

Por tanto de (7) se obtiene

$$x_1 = x_0 + \frac{0.2}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$= -1 + \frac{0.2}{6}(22 + 2(41.2) + 2(53.04) + 96.88) = 9.2453$$

$$y_1 = y_0 + \frac{0.2}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 6 + \frac{0.2}{6}(37 + 2(57) + 2(67.08) + 106.888) = 19.0683,$$

TABLA 9.8 $h = 0.2$

t_n	x_n	y_n
0.00	−1.0000	6.0000
0.20	9.2453	19.0683
0.40	46.0327	55.1203
0.60	158.9430	150.8192

TABLA 9.9 $h = 0.1$

t_n	x_n	y_n
0.00	−1.0000	6.0000
0.10	2.3840	10.8883
0.20	9.3379	19.1332
0.30	22.5541	32.8539
0.40	46.5103	55.4420
0.50	88.5729	93.3006
0.60	160.7563	152.0025

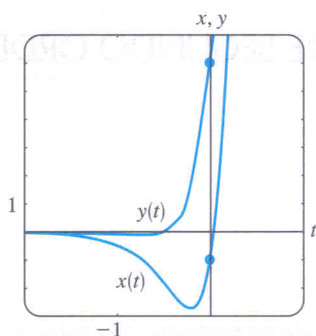


FIGURA 9.4.2 Curvas solución numérica para el PVI del ejemplo 3.

donde, como es usual, los valores calculados de x_1 y y_1 están redondeados a cuatro lugares decimales. Estos números nos dan la aproximación $x_1 \approx x(0.2)$ y $y_1 \approx y(0.2)$. Los valores subsecuentes, obtenidos con la ayuda de una computadora, se resumen en las tablas 9.8 y 9.9. ■

Se debe comprobar que la solución del problema con valores iniciales del ejemplo 3 está dada por $x(t) = (26t - 1)e^{4t}$, $y(t) = (13t + 6)e^{4t}$. De estas ecuaciones vemos que los valores reales $x(0.6) = 160.9384$ y $y(0.6) = 152.1198$ se comparan favorablemente con las entradas del último renglón de la tabla 9.9. La gráfica de la solución en una vecindad de $t = 0$ que se muestra en la figura 9.4.2; la gráfica se obtuvo de un programa de solución numérico usando el método RK4 con $h = 0.1$.

En conclusión, establacemos el método de Euler para el sistema general (6):

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n, y_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + hg(t_n, x_n, y_n).$$

EJERCICIOS 9.4

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-16.

1. Use el método de Euler para aproximar $y(0.2)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1.$$

Use $h = 0.1$. Encuentre la solución analítica del problema y compare el valor real de $y(0.2)$ con y_2.

2. Use el método de Euler para aproximar $y(1.2)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 9,$$

donde $x > 0$. Use $h = 0.1$. Encuentre la solución analítica del problema y compare el valor real de $y(1.2)$ con y_2.

En los problemas 3 y 4 repita el problema indicado con el método RK4. Primero utilice $h = 0.2$ y después $h = 0.1$.

3. Problema 1

4. Problema 2

5. Use el método RK4 para aproximar $y(0.2)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales.

$$y'' - 2y' + 2y = e^t \cos t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Primero use $h = 0.2$ y después $h = 0.1$.

6. Cuando $E = 100$ V, $R = 10\ \Omega$ y $L = 1$ h, el sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_1(t)$ e $i_3(t)$ en la red eléctrica dada en la figura 9.4.3 es

$$\frac{di_1}{dt} = -20i_1 + 10i_3 + 100$$

$$\frac{di_3}{dt} = 10i_1 - 20i_3,$$

donde $i_1(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$. Use el método RK4 para aproximar $i_1(t)$ e $i_3(t)$ en $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ y 0.5. Use $h = 0.1$. Mediante un programa de solución numérica obtenga la gráfica de la solución en el intervalo $0 \le t \le 5$. Use las gráficas para predecir el comportamiento de $i_1(t)$ e $i_3(t)$ conforme $t \to \infty$.

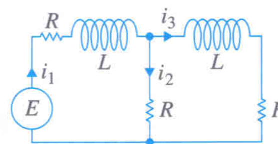


FIGURA 9.4.3 Red del problema 6.

En los problemas 7 a 12, use el método de Runge-Kutta para aproximar $x(0.2)$ y $y(0.2)$. Primero use $h = 0.2$ y después $h = 0.1$. Use un programa de solución numérica y $h = 0.1$ para trazar la gráfica de la solución en una vecindad de $t = 0$.

7. $x' = 2x - y$
$y' = x$
$x(0) = 6, \quad y(0) = 2$

8. $x' = x + 2y$
$y' = 4x + 3y$
$x(0) = 1, \quad y(0) = 1$

9. $x' = -y + t$
$y' = x - t$
$x(0) = -3, \quad y(0) = 5$

10. $x' = 6x + y + 6t$
$y' = 4x + 3y - 10t + 4$
$x(0) = 0.5, \quad y(0) = 0.2$

11. $x' + 4x - y' = 7t$
$x' + y' - 2y = 3t$
$x(0) = 1, \quad y(0) = -2$

12. $x' + y' = 4t$
$-x' + y' + y = 6t^2 + 10$
$x(0) = 3, \quad y(0) = -1$

9.5 PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA DE SEGUNDO ORDEN

REPASO DE MATERIAL

- Sección 4.1 (página 119)
- Ejercicios 4.3 (Problemas 37-40)
- Ejercicios 4.4 (Problemas 37-40)
- Sección 5.2

INTRODUCCIÓN En la sección 9.4 vimos cómo aproximar la solución de un *problema con valores iniciales de segundo orden*

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = u_0.$$

En esta sección se tratan dos métodos para encontrar una solución aproximada de un *problema con valores en la frontera de segundo orden*

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

A diferencia del procedimiento utilizado en los problemas con valores iniciales de segundo orden, en los métodos para los problemas con valores en la frontera de segundo orden no se requiere escribir la ED de segundo orden como un sistema de ED de primer orden.

APROXIMACIONES POR DIFERENCIAS FINITAS El desarrollo en serie de Taylor centrado en el punto a, de una función $y(x)$ es

$$y(x) = y(a) + y'(a)\frac{x-a}{1!} + y''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + y'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots.$$

Si se hace $h = x - a$, entonces el renglón anterior es igual a

$$y(x) = y(a) + y'(a)\frac{h}{1!} + y''(a)\frac{h^2}{2!} + y'''(a)\frac{h^3}{3!} + \cdots.$$

Para el análisis posterior es conveniente volver a escribir la última expresión en las dos formas alternativas:

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} + y'''(x)\frac{h^3}{6} + \cdots \tag{1}$$

y
$$y(x-h) = y(x) - y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} - y'''(x)\frac{h^3}{6} + \cdots. \tag{2}$$

Si h es pequeña, podemos despreciar los términos que implican a $h^4, h^5, \ldots$ puesto que estos valores son despreciables. En realidad, si se ignoran todos los términos con h^2 y superiores, y resolviendo (1) y (2), respectivamente, para $y'(x)$ se obtienen las aproximaciones siguientes para la primera derivada:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}[y(x+h) - y(x)] \tag{3}$$

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}[y(x) - y(x-h)]. \tag{4}$$

Restando (1) y (2) también se obtiene

$$y'(x) \approx \frac{1}{2h}[y(x+h) - y(x-h)]. \tag{5}$$

Por otro lado, si se ignoran los términos con h^3 y superiores, entonces al sumar (1) y (2) se obtiene una aproximación de la segunda derivada $y''(x)$:

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}[y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)]. \tag{6}$$

Los lados derechos de (3), (4), (5) y (6) se llaman **cocientes de diferencias**. Las expresiones

$$y(x+h) - y(x), \quad y(x) - y(x-h), \quad y(x+h) - y(x-h),$$

y

$$y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)$$

se llaman **diferencias finitas**. En particular, $y(x+h) - y(x)$ recibe el nombre de **diferencia hacia adelante**, $y(x) - y(x-h)$ es una **diferencia hacia atrás** y tanto $y(x+h) - y(x-h)$ como $y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)$ se llaman **diferencias centrales**. Los resultados que se presentan en (5) y (6) se llaman **aproximaciones por diferencias centrales** de las derivadas y' y y''.

MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS Ahora considere un problema lineal con valores en la frontera de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x), \qquad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{7}$$

Suponga que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ representa una partición regular del intervalo $[a, b]$, es decir, $x_i = a + ih$, donde $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $h = (b-a)/n$. Los puntos

$$x_1 = a + h, \qquad x_2 = a + 2h, \ldots, \qquad x_{n-1} = a + (n-1)h$$

se llaman **puntos de malla interiores** del intervalo $[a, b]$. Si hacemos

$$y_i = y(x_i), \qquad P_i = P(x_i), \qquad Q_i = Q(x_i) \qquad \text{y} \qquad f_i = f(x_i)$$

y si y'' y y' en (7) se reemplazan por las aproximaciones de diferencias centrales (5) y (6), se obtiene

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + P_i\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + Q_i y_i = f_i$$

o después de simplificar

$$\left(1 + \frac{h}{2}P_i\right)y_{i+1} + (-2 + h^2 Q_i)y_i + \left(1 - \frac{h}{2}P_i\right)y_{i-1} = h^2 f_i. \tag{8}$$

La ultima ecuación se conoce como **ecuación de diferencias finitas** y es una aproximación a la ecuación diferencial. Permite aproximar la solución $y(x)$ de (7) en los puntos de malla interiores $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ del intervalo $[a, b]$. Si i toma los valores $1, 2, \ldots, n-1$ en (8), se obtienen $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Considere que se conocen y_0 y y_n porque son las condiciones prescritas en la frontera $y_0 = y(x_0) = y(a) = \alpha$ y $y_n = y(x_n) = y(b) = \beta$.

En el ejemplo 1 se considera un problema con valores en la frontera para el que se pueden comparar los valores aproximados con los valores reales de una solución explícita.

EJEMPLO 1 Uso del método de diferencias finitas

Use la ecuación de diferencias (8) con $n = 4$ para aproximar la solución del problema con valores en la frontera $y'' - 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 5$.

SOLUCIÓN Para usar (8), se identifica $P(x) = 0$, $Q(x) = -4$, $f(x) = 0$ y $h = (1 - 0)/4 = \frac{1}{4}$. De donde la ecuación de diferencia es

$$y_{i+1} - 2.25y_i + y_{i-1} = 0. \tag{9}$$

Ahora, los puntos interiores son $x_1 = 0 + \frac{1}{4}$, $x_2 = 0 + \frac{2}{4}$, $x_3 = 0 + \frac{3}{4}$, por lo que para $i = 1, 2$ y 3, la ecuación (9) genera el sistema siguiente para las correspondientes y_1, y_2 y y_3

$$\begin{aligned} y_2 - 2.25y_1 + y_0 &= 0 \\ y_3 - 2.25y_2 + y_1 &= 0 \\ y_4 - 2.25y_3 + y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Con las condiciones en la frontera $y_0 = 0$ y $y_4 = 5$ el sistema anterior se convierte en

$$\begin{aligned} -2.25y_1 + y_2 \qquad &= 0 \\ y_1 - 2.25y_2 + y_3 &= 0 \\ y_2 - 2.25y_3 &= -5. \end{aligned}$$

La solución del sistema es $y_1 = 0.7256$, $y_2 = 1.6327$ y $y_3 = 2.9479$.

Ahora la solución general de la ecuación diferencial dada es $y = c_1 \cosh 2x + c_2 \operatorname{senh} 2x$. La condición $y(0) = 0$ significa que $c_1 = 0$. La otra condición en la frontera da c_2. De este modo se ve que una solución del problema con valores en la frontera es $y(x) = (5 \operatorname{senh} 2x)/\operatorname{senh} 2$. Por tanto, los valores reales (redondeados a cuatro decimales) de esta solución en los puntos interiores son los siguientes: $y(0.25) = 0.7184$, $y(0.5) = 1.6201$ y $y(0.75) = 2.9354$. ■

La precisión de las aproximaciones en el ejemplo 1 se puede mejorar usando un valor más pequeño de h. Por supuesto, usar un valor más pequeño de h requiere resolver un sistema más grande de ecuaciones. Se deja como ejercicio demostrar que con $h = \frac{1}{8}$, las aproximaciones a $y(0.25)$, $y(0.5)$ y $y(0.75)$ son 0.7202, 1.6233 y 2.9386, respectivamente. Véase el problema 11 en los ejercicios 9.5.

EJEMPLO 2 Usando el método de diferencias finitas

Use la ecuación diferencial (8) con $n = 10$ para aproximar la solución de

$$y'' + 3y' + 2y = 4x^2, \qquad y(1) = 1, \quad y(2) = 6.$$

SOLUCIÓN En este caso se identifica $P(x) = 3$, $Q(x) = 2$, $f(x) = 4x^2$ y $h = (2 - 1)/10 = 0.1$, y así (8) se convierte en

$$1.15y_{i+1} - 1.98y_i + 0.85y_{i-1} = 0.04x_i^2. \tag{10}$$

Ahora los puntos interiores son $x_1 = 1.1$, $x_2 = 1.2$, $x_3 = 1.3$, $x_4 = 1.4$, $x_5 = 1.5$, $x_6 = 1.6$, $x_7 = 1.7$, $x_8 = 1.8$ y $x_9 = 1.9$. Para $i = 1, 2, \ldots, 9$ y $y_0 = 1$, $y_{10} = 6$, la ecuación (10) da un sistema de nueve ecuaciones y nueve incógnitas:

$$\begin{aligned} 1.15y_2 - 1.98y_1 \qquad\qquad &= -0.8016 \\ 1.15y_3 - 1.98y_2 + 0.85y_1 &= 0.0576 \\ 1.15y_4 - 1.98y_3 + 0.85y_2 &= 0.0676 \\ 1.15y_5 - 1.98y_4 + 0.85y_3 &= 0.0784 \\ 1.15y_6 - 1.98y_5 + 0.85y_4 &= 0.0900 \\ 1.15y_7 - 1.98y_6 + 0.85y_5 &= 0.1024 \end{aligned}$$

$$1.15y_8 - 1.98y_7 + 0.85y_6 = 0.1156$$
$$1.15y_9 - 1.98y_8 + 0.85y_7 = 0.1296$$
$$-1.98y_9 + 0.85y_8 = -6.7556.$$

Se puede resolver este grande sistema usando eliminación de Gauss o, con relativa facilidad, por medio de un sistema algebraico computarizado. El resultado que se encuentra es $y_1 = 2.4047$, $y_2 = 3.4432$, $y_3 = 4.2010$, $y_4 = 4.7469$, $y_5 = 5.1359$, $y_6 = 5.4124$, $y_7 = 5.6117$, $y_8 = 5.7620$ y $y_9 = 5.8855$. ■

MÉTODO DE TANTEOS Otro modo de aproximar una solución de un problema con valores en la frontera $y'' = f(x, y, y')$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ se denomina **método de tanteos**. El punto de partida de este método es reemplazar el problema con valores en la frontera por un problema con valores iniciales

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = m_1. \tag{11}$$

El número m_1 en (11) es simplemente una suposición de la pendiente desconocida de la curva solución en el punto conocido $(a, y(a))$. Se puede aplicar entonces una de las técnicas numéricas paso a paso a la ecuación de segundo orden en (11) para encontrar una aproximación β_1 del valor de $y(b)$. Si β_1 concuerda con el valor dado $y(b) = \beta$ dentro de alguna tolerancia asignada antes, se detiene el cálculo; de otro modo se repiten los cálculos, empezando con una suposición distinta $y'(a) = m_2$ para obtener una segunda aproximación β_2 para $y(b)$. Se puede continuar con este método usando prueba y error o las pendientes siguientes $m_3, m_4, \ldots$ se ajustan de alguna manera sistemática. La interpolación lineal proporciona, en especial, resultados satisfactorios cuando la ecuación diferencial en (11) es lineal. El procedimiento es similar al tiro al blanco (el objetivo es elegir la pendiente inicial), se dispara hacia una objetivo ojo de buey $y(b)$ hasta que se acierta. Véase el problema 14 en los ejercicios 9.5.

Por supuesto, lo que subyace en el uso de estos métodos numéricos es la suposición de que existe una solución para el problema con valores en la frontera, la que se sabe, no está siempre garantizada.

COMENTARIOS

El método de aproximación con diferencias finitas se puede generalizar a problemas con valores en la frontera en los que la primera derivada se especifica en una frontera, por ejemplo, un problema del tipo $y'' = f(x, y, y')$, $y'(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$. Véase el problema 13 de los ejercicios 9.5.

EJERCICIOS 9.5

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-16.

En los problemas 1 a 10 use el método de diferencias finitas y el valor indicado de n para aproximar la solución de los problemas con valores en la frontera.

1. $y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 4, y(2) = 1; \quad n = 4$
2. $y'' - y = x^2, \quad y(0) = 0, y(1) = 0; \quad n = 4$
3. $y'' + 2y' + y = 5x, \quad y(0) = 0, y(1) = 0; \quad n = 5$
4. $y'' - 10y' + 25y = 1, \quad y(0) = 1, y(1) = 0; \quad n = 5$
5. $y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{2x},$ $y(0) = 3, y(1) = 0; \quad n = 6$
6. $y'' + 5y' = 4\sqrt{x}, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = -1; \quad n = 6$
7. $x^2y'' + 3xy' + 3y = 0, \quad y(1) = 5, y(2) = 0; \quad n = 8$
8. $x^2y'' - xy' + y = \ln x, \quad y(1) = 0, y(2) = -2; \quad n = 8$
9. $y'' + (1 - x)y' + xy = x, \quad y(0) = 0, y(1) = 2; \quad n = 10$
10. $y'' + xy' + y = x, \quad y(0) = 1, y(1) = 0; \quad n = 10$
11. Resuelva de nuevo el ejemplo 1 usando $n = 8$.
12. El potencial electrostático u entre dos esferas concéntricas de radio $r = 1$ y $r = 4$ se determina a partir de

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0, \quad u(1) = 50, \quad u(4) = 100.$$

Use el método de esta sección con $n = 6$ para aproximar la solución de este problema con valores en la frontera.

13. Considere el problema con valores en la frontera $y'' + xy = 0$, $y'(0) = 1$, $y(1) = -1$.

a) Encuentre la ecuación en diferencias correspondiente a la ecuación diferencial. Demuestre que para $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ la ecuación en diferencias produce n con $n + 1$ incógnitas $y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Aquí y_{-1} y y_0 son incógnitas, puesto que y_{-1} representa una aproximación a y al punto exterior $x = -h$ y y_0 no está especificada en $x = 0$.

b) Use la aproximación de diferencias centrales (5) para demostrar que $y_1 - y_{-2} = 2h$. Utilice esta ecuación para eliminar y_{-1} del sistema en el inciso a).

c) Use $n = 5$ y el sistema de ecuaciones encontradas en los incisos a) y b) para aproximar la solución del problema con valores en la frontera original.

Tarea para el laboratorio de computación

14. Considere el problema con valores en la frontera $y'' = y' - \operatorname{sen}(xy)$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1.5$. Use el método de tanteos para aproximar la solución de este problema. (La aproximación se puede obtener usando una técnica numérica, digamos, el método RK4 con $h = 0.1$; o, aún mejor, si tiene acceso a un SAC tal como *Mathematica* o *Maple*, puede usar la función **NDSolve**).

REPASO DEL CAPÍTULO 9

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-16.

En los problemas 1 a 4 construya una tabla para comparar los valores indicados de $y(x)$ mediante el método de Euler, el método de Euler mejorado y el método RK4. Calcule redondeando a cuatro cifras decimales. Primero use $h = 0.1$ y después $h = 0.05$.

1. $y' = 2 \ln xy$, $y(1) = 2$;
$y(1.1), y(1.2), y(1.3), y(1.4), y(1.5)$

2. $y' = \operatorname{sen} x^2 + \cos y^2$, $y(0) = 0$;
$y(0.1), y(0.2), y(0.3), y(0.4), y(0.5)$

3. $y' = \sqrt{x + y}$, $y(0.5) = 0.5$;
$y(0.6), y(0.7), y(0.8), y(0.9), y(1.0)$

4. $y' = xy + y^2$, $y(1) = 1$;
$y(1.1), y(1.2), y(1.3), y(1.4), y(1.5)$

5. Aplique el método de Euler para aproximar $y(0.2)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales $y'' - (2x + 1)y = 1$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$. Primero use un paso con $h = 0.2$ y después repita los cálculos usando dos pasos con $h = 0.1$.

6. Utilice el método de Adams-Bashforth-Moulton para aproximar $y(0.4)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales $y' = 4x - 2y$, $y(0) = 2$. Use $h = 0.1$ y el método de RK4 para calcular y_1, y_2, y y_3.

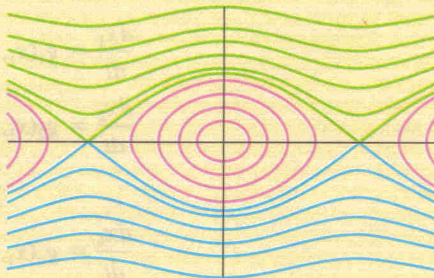
7. Utilice el método de Euler para aproximar $x(0.2)$ y $y(0.2)$, donde $x(t)$, $y(t)$ es la solución del problema con valores iniciales.

$$x' = x + y$$
$$y' = x - y$$
$$x(0) = 1, \qquad y(0) = 2.$$

8. Use el método de las diferencias finitas con $n = 10$, aproxime la solución del problema con valores en la frontera $y'' + 6.55(1 + x)y = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

10

SISTEMAS AUTÓNOMOS PLANOS



En el capítulo 8 se utilizaron técnicas matriciales para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$. Cuando un sistema de ecuaciones diferenciales no es lineal, generalmente no es posible encontrar soluciones en términos de funciones elementales. En este capítulo demostraremos la valiosa información de la naturaleza geométrica de las soluciones de sistemas que se puede obtener analizando primero soluciones constantes especiales obtenidas de puntos críticos del sistema y de la búsqueda de soluciones periódicas. Se introducirá el importante concepto de estabilidad y se ilustrará con ejemplos de física y ecología.

10.1 SISTEMAS AUTÓNOMOS

REPASO DE MATERIAL

- Es muy recomendable que lea de nuevo las páginas 37 a 41 de la sección 2.1.

INTRODUCCIÓN En la sección 2.1, se presentaron los conceptos de las ED autónomas de primer orden, los puntos críticos de una ED autónoma y la estabilidad de un punto crítico. Esta primera descripción de la estabilidad se mantuvo a propósito en un nivel bastante intuitivo; ahora es tiempo de presentar la definición precisa de este concepto y para hacerlo, necesitamos examinar *sistemas* autónomos de ED de primer orden. En esta sección definiremos los puntos críticos de sistemas autónomos de dos ED de primer orden; los sistemas autónomos pueden ser lineales o no lineales.

SISTEMAS AUTÓNOMOS Un sistema de ecuaciones lineales de primer orden se dice que es **autónomo** cuando se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Observe que la variable independiente t no se presenta en forma explícita en el miembro de la derecha de cada ecuación diferencial. Compare el sistema (1) con el sistema general de ecuaciones (2) de la sección 8.1.

EJEMPLO 1 Un sistema no autónomo

El sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 3x_2 + t^2 \quad \leftarrow \text{dependencia de } t$$

$$\frac{dx_2}{dt} = tx_1 \operatorname{sen} x_2 \quad \leftarrow \text{dependencia de } t$$

es un sistema *no* autónomo debido a la presencia de t en los miembros a la derecha de ambas ED. ■

NOTA Cuando $n = 1$ en el sistema (1), una sola ecuación diferencial de primer orden toma la forma $dx/dt = g(x)$. Esta última ecuación es equivalente a (1) de la sección 2.1, donde los símbolos x y t juegan los papeles de y y x, respectivamente. Se pueden formar soluciones explícitas, ya que la ecuación diferencial $dx/dt = g(x)$ es separable, lo que aprovecharemos para presentar ejemplos de los conceptos en este capítulo.

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN COMO UN SISTEMA Cualquier ecuación diferencial de segundo orden, $x'' = g(x, x')$, se puede escribir en forma de un sistema autónomo. Como se hizo en la sección 4.9, si hacemos $y = x'$, entonces $x'' = g(x, x')$ se transforma en $y' = g(x, y)$. Así, la ecuación diferencial de segundo orden se transforma en el sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= g(x, y). \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 La ED del péndulo como un sistema autónomo

En la ecuación (6) de la sección 5.3, demostramos que el ángulo de desplazamiento θ de un péndulo satisface la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0.$$

Si hacemos $x = \theta$ y $y = \theta'$, esta ecuación diferencial de segundo orden se puede expresar en forma del sistema autónomo

$$x' = y$$
$$y' = -\frac{g}{l}\,\text{sen}\,x. \qquad ■$$

NOTACIÓN Si $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ denotan respectivamente los vectores columna

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix},$$

entonces el sistema autónomo de las ecuaciones (1) se puede escribir de manera compacta en **forma de vector columna** $\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X})$. El sistema lineal homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ que estudiamos en la sección 8.2 es un importante caso especial.

En este capítulo también es conveniente escribir el sistema (1) usando vectores renglón. Si hacemos que $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ y

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = (g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

entonces el sistema autónomo (1) también se podría expresar en la **forma de vector renglón** $\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X})$. *Del contexto, debe ser claro si se está usando la forma de vector columna o renglón; por tanto no distinguiremos entre* $\mathbf{X}$ *y* $\mathbf{X}^T$, *la traspuesta de* $\mathbf{X}$. En particular, cuando $n = 2$, es conveniente usar la forma de vector renglón y escribir una condición inicial en la forma $\mathbf{X}(0) = (x_0, y_0)$.

Cuando la variable t se interpreta como tiempo, llamaremos al sistema (1) de ecuaciones diferenciales como **sistema dinámico** y a una solución $\mathbf{X}(t)$ como el **estado del sistema** o la **respuesta del sistema** en el tiempo t. Con esta terminología, un sistema dinámico es autónomo cuando la razón $\mathbf{X}'(t)$ con la que cambia el sistema sólo depende del estado actual $\mathbf{X}(t)$ del sistema. El sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$ que estudiamos en el capítulo 8 es entonces autónomo cuando $\mathbf{F}(t)$ es constante. En el caso en que $n = 2$ o 3 podemos llamar una solución como **camino** o **trayectoria**, porque se pueden considerar $x = x_1(t)$, $y = x_2(t)$ y $z = x_3(t)$ como las ecuaciones paramétricas de una curva.

INTERPRETACIÓN COMO CAMPO VECTORIAL Cuando $n = 2$, el sistema (1) se llama **sistema autónomo plano**, y se escribe como

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y). \tag{2}$$

El vector $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ define un **campo vectorial** en una región del plano y una solución del sistema puede interpretarse como la trayectoria resultante de una partícula que se mueve a través de la región. Para ser más específicos, sea que $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ denote la velocidad de una corriente en la posición (x, y) y supongamos que una pequeña partícula (tal como un corcho) se suelta en la corriente en la posición (x_0, y_0). Si $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ denota la posición de la partícula en el tiempo t,

entonces $\mathbf{X}'(t) = (x'(t), y'(t))$ es el vector velocidad $\mathbf{V}$. Cuando no hay fuerzas externas y se desprecian las fuerzas de fricción, la velocidad de la partícula al tiempo t es igual a la velocidad de la corriente en la posición $\mathbf{X}(t)$:

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{V}(x(t), y(t)) \quad \text{o} \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x(t), y(t)) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Así la trayectoria de la partícula es una solución del sistema, que satisface la condición inicial $\mathbf{X}(0) = (x_0, y_0)$. Frecuentemente nos referiremos a esta simple interpretación de un sistema autónomo plano, para ilustrar conceptos nuevos.

EJEMPLO 3 Sistema autónomo plano de un campo vectorial

Un campo vectorial para el estado estable del flujo de un fluido en torno a un cilindro de radio 1 está dado por

$$\mathbf{V}(x, y) = V_0\left(1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right),$$

donde V_0 es la rapidez del fluido lejos del cilindro. Si se coloca un pequeño corcho en $(-3, 1)$, la trayectoria del corcho $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ satisface al sistema autónomo plano

$$\frac{dx}{dt} = V_0\left(1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = V_0\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

sujeto a la condición inicial $\mathbf{X}(0) = (-3, 1)$. Véanse la figura 10.1.1 y el problema 46 de los ejercicios 2.4. ■

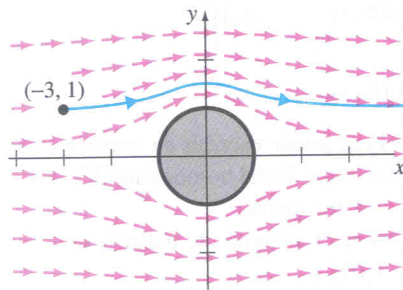


FIGURA 10.1.1 Campo vectorial del flujo de un fluido en torno a un cilindro circular.

TIPOS DE SOLUCIONES Si $P(x, y)$, $Q(x, y)$ y las primeras derivadas parciales $\partial P/\partial x$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ y $\partial Q/\partial y$ son continuas en una región R del plano, entonces una solución del sistema autónomo plano (2) que satisface $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ es única y es de uno de los tres tipos básicos:

i) Una **solución constante** $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ (o $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0$ para todo t). A una solución constante se le llama punto **crítico** o **punto estacionario**. Cuando la partícula se coloca en un punto crítico $\mathbf{X}_0$, (esto es, $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$), permanece ahí indefinidamente. Por esta razón, a una solución constante también se le llama **solución de equilibrio**. Observe que como $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{0}$, un punto crítico es una solución del sistema de ecuaciones algebraicas

$$P(x, y) = 0$$

$$Q(x, y) = 0.$$

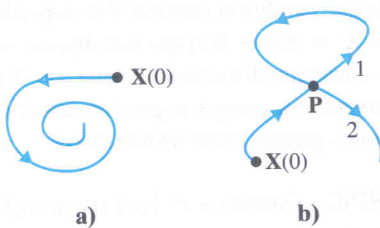


FIGURA 10.1.2 La curva en a) se llama arco.

ii) Una solución $x = x(t)$, $y = y(t)$ que define un **arco**, es decir, una curva plana que *no* se cruza a sí misma. Por tanto la curva de la figura 10.2a puede ser una solución de un sistema autónomo plano, mientras que la de la figura 10.1.2b puede no ser una solución. Habría *dos soluciones* que iniciarían en el punto de intersección **P**.

iii) Una **solución periódica** $x = x(t)$, $y = y(t)$. A una solución se le llama **ciclo**. Si p es el periodo de la solución, entonces $\mathbf{X}(t + p) = \mathbf{X}(t)$ y una partícula colocada sobre la curva en $\mathbf{X}_0$ circulará la curva y regresará a $\mathbf{X}_0$ en p unidades de tiempo. Véase la figura 10.1.3.

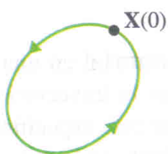


FIGURA 10.1.3 Solución periódica o ciclo.

EJEMPLO 4 Encontrando puntos críticos

Encuentre todos los puntos críticos de cada uno de los siguientes sistemas autónomos planos:

a) $x' = -x + y$, $y' = x - y$ **b)** $x' = x^2 + y^2 - 6$, $y' = x^2 - y$ **c)** $x' = 0.01x(100 - x - y)$, $y' = 0.05y(60 - y - 0.2x)$

SOLUCIÓN Encontramos los puntos críticos igualando a cero los miembros de la derecha de las ecuaciones diferenciales.

a) La solución del sistema

$$-x + y = 0$$
$$x - y = 0$$

consiste en todos los puntos en la recta $y = x$. Por tanto, hay una cantidad infinita de puntos críticos.

b) Para resolver el sistema

$$x^2 + y^2 - 6 = 0$$
$$x^2 - y = 0$$

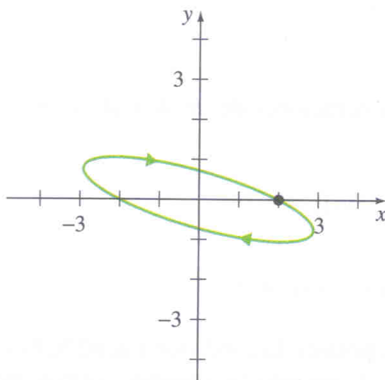
sustituimos la segunda ecuación, $x^2 = y$ en la primera ecuación para obtener $y^2 + y - 6 = (y + 3)(y - 2) = 0$. Si $y = -3$, entonces $x^2 = -3$, por lo que no hay soluciones reales. Si $y = 2$, entonces $x = \pm\sqrt{2}$, así los puntos críticos son $(\sqrt{2}, 2)$ y $(-\sqrt{2}, 2)$.

c) Para la determinación de los puntos críticos en este inciso c) se necesita examinar con cuidado los casos. La ecuación $0.0lx(100 - x - y) = 0$ implica que $x = 0$ o que $x + y = 100$.

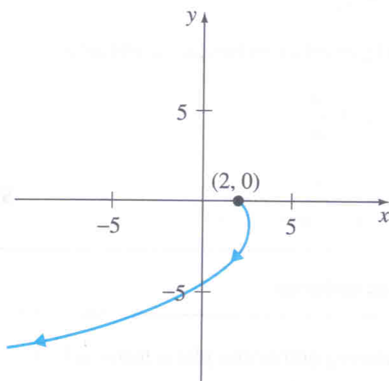
Si $x = 0$, entonces al sustituir en $0.05y(60 - y - 0.2x) = 0$, se tiene que $y(60 - y) = 0$. Por lo que $y = 0$ o 60, así (0, 0) y (0, 60) son puntos críticos.

Si $x + y = 100$, entonces $0 = y(60 - y - 0.2(100 - y)) = y(40 - 0.8y)$. Por lo que $y = 0$ o 50, así (100, 0) y (50, 50) son puntos críticos. ■

Cuando el sistema autónomo plano es lineal empleamos los métodos del capítulo 8 para investigar las soluciones.



a) Solución periódica.



b) Solución no periódica.

FIGURA 10.1.4 Curvas solución para el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Descubriendo soluciones periódicas

Determine si el sistema lineal dado tiene una solución periódica:

a) $x' = 2x + 8y$, $y' = -x - 2y$ **b)** $x' = x + 2y$, $y' = -\frac{1}{2}x + y$

En cada caso dibuje la gráfica de la solución que satisface $\mathbf{X}(0) = (2, 0)$.

SOLUCIÓN **a)** En el ejemplo 6 de la sección 8.2 utilizamos el método del eigenvalor-eigenvector para demostrar que

$$x = c_1(2\cos 2t - 2\,\text{sen}\,2t) + c_2(2\cos 2t + 2\,\text{sen}\,2t)$$
$$y = -c_1\cos 2t - c_2\,\text{sen}\,2t.$$

Así, toda solución es periódica, con periodo $p = \pi$. La solución que satisface $\mathbf{X}(0) = (2, 0)$ es $x = 2\cos 2t + 2\,\text{sen}\,2t$, $y = -\text{sen}\,2t$. Esta solución genera la elipse que se muestra en la figura 10.1.4a.

b) Utilizando el método del eigenvalor-eigenvector, podemos demostrar que

$$x = 2c_1e^t\cos t + 2c_2e^t\,\text{sen}\,t, \quad y = -c_1e^t\,\text{sen}\,t + c_2e^t\cos t.$$

Debido a la presencia de e^t en la solución general, no hay soluciones periódicas (es decir, ciclos). La solución que satisface $\mathbf{X}(0) = (2, 0)$ es $x = 2e^t\cos t$, $y = -e^t\,\text{sen}\,t$, y en la figura 10.1.4b se muestra la curva resultante. ■

CAMBIANDO A COORDENADAS POLARES Excepto en el caso en que hay soluciones constantes, por lo general no es posible llegar a ecuaciones explícitas de las soluciones de un sistema autónomo *no lineal*. Sin embargo, se pueden resolver algunos sistemas no lineales al cambiarlos a coordenadas polares. De las fórmulas $r^2 = x^2 + y^2$ y $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ se obtienen

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right), \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(-y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right). \tag{3}$$

En ocasiones se pueden usar las ecuaciones (3) para convertir un sistema autónomo plano en coordenadas rectangulares en un sistema más sencillo en coordenadas polares.

EJEMPLO 6 Cambiando a coordenadas polares

Determine la solución del sistema autónomo plano no lineal

$$x' = -y - x\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y' = x - y\sqrt{x^2 + y^2}$$

que satisfaga la condición inicial $\mathbf{X}(0) = (3, 3)$.

SOLUCIÓN Sustituyendo dx/dt y dy/dt en las ecuaciones de dr/dt y $d\theta/dt$ en el sistema (3), se obtienen

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}[x(-y - xr) + y(x - yr)] = -r^2$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}[-y(-y - xr) + x(x - yr)] = 1.$$

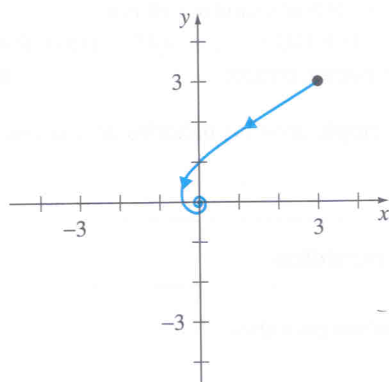


FIGURA 10.1.5 Curva solución del ejemplo 6.

Puesto que (3, 3) es $(3\sqrt{2}, \pi/4)$ en coordenadas polares, la condición inicial $\mathbf{X}(0) = (3, 3)$ se convierte en $r(0) = 3\sqrt{2}$ y $\theta(0) = \pi/4$. Separando las variables, vemos que la solución del sistema es

$$r = \frac{1}{t + c_1}, \qquad \theta = t + c_2$$

para $r \neq 0$. (¡Compruébelo!) Entonces aplicando la condición inicial se obtiene

$$r = \frac{1}{t + \sqrt{2}/6}, \qquad \theta = t + \frac{\pi}{4}.$$

En la figura 10.1.5 se presenta la espiral $r = \dfrac{1}{\theta + \sqrt{2}/6 - \pi/4}$. ■

EJEMPLO 7 Soluciones en coordenadas polares

Cuando se expresa en coordenadas polares, cierto sistema autónomo plano toma la forma

$$\frac{dr}{dt} = 0.5(3 - r)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1.$$

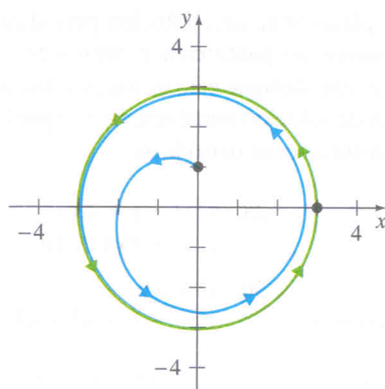


FIGURA 10.1.6 La curva en verde es una función periódica.

Determine y trace las gráficas de las soluciones que satisfacen que $\mathbf{X}(0) = (0, 1)$ y $\mathbf{X}(0) = (3, 0)$, en coordenadas rectangulares.

SOLUCIÓN Aplicando separación de variables a $dr/dt = 0.5(3 - r)$ e integrando $d\theta/dt$ se obtiene la solución $r = 3 + c_1e^{-0.5t}$, $\theta = t + c_2$.

Si $\mathbf{X}(0) = (0, 1)$, entonces $r(0) = 1$ y $\theta(0) = \pi/2$. Por lo que $c_1 = -2$ y $c_2 = \pi/2$. La curva solución es la espiral $r = 3 - 2e^{-0.5(\theta - \pi/2)}$. Observe que conforme $t \to \infty$, θ aumenta sin límite y r tiende a 3.

Si $\mathbf{X}(0) = (3, 0)$, entonces $r(0) = 3$ y $\theta(0) = 0$. Por lo que $c_1 = c_2 = 0$, así $r = 3$ y $\theta = t$. Como $x = r\cos\theta = 3\cos t$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta = 3\,\text{sen}\,t$, la solución es periódica. Esta solución genera una circunferencia de radio 3 en torno a (0, 0). En la figura 10.1.6 se presentan ambas soluciones. ■

EJERCICIOS 10.1

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-17.

En los problemas 1 a 6 dada la ecuación diferencial no lineal de segundo orden escríbala como un sistema autónomo plano. Encuentre todos los puntos críticos del sistema resultante.

1. $x'' + 9\,\text{sen}\,x = 0$

2. $x'' + (x')^2 + 2x = 0$

3. $x'' + x'(1 - x^3) - x^2 = 0$

4. $x'' + 4\dfrac{x}{1 + x^2} + 2x' = 0$

5. $x'' + x = \epsilon x^3$ para $\epsilon > 0$

6. $x'' + x - \epsilon x|x| = 0$ para $\epsilon > 0$

En los problemas 7 a 16 encuentre todos los puntos críticos del sistema autónomo plano dado.

7. $x' = x + xy$
$y' = -y - xy$

8. $x' = y^2 - x$
$y' = x^2 - y$

9. $x' = 3x^2 - 4y$
$y' = x - y$

10. $x' = x^3 - y$
$y' = x - y^3$

11. $x' = x\left(10 - x - \frac{1}{2}y\right)$
$y' = y(16 - y - x)$

12. $x' = -2x + y + 10$
$y' = 2x - y - 15\dfrac{y}{y + 5}$

13. $x' = x^2e^y$
$y' = y(e^x - 1)$

14. $x' = \text{sen}\,y$
$y' = e^{x-y} - 1$

15. $x' = x(1 - x^2 - 3y^2)$
$y' = y(3 - x^2 - 3y^2)$

16. $x' = -x(4 - y^2)$
$y' = 4y(1 - x^2)$

En los problemas 17 a 22 se tomaron los sistemas lineales dados de los ejercicios 8.2.

a) Determine la solución general y si hay soluciones periódicas.

b) Encuentre la solución que satisfaga la condición inicial dada.

c) Con ayuda de una calculadora graficadora o de un SAC, trace la solución del inciso b) e indique la dirección en la que se recorre la curva.

17. $x' = x + 2y$
$y' = 4x + 3y$, $\mathbf{X}(0) = (-2, 2)$
(Problema 1, Ejercicios 8.2)

18. $x' = -6x + 2y$
$y' = -3x + y$, $\mathbf{X}(0) = (3, 4)$
(Problema 6, Ejercicios 8.2)

19. $x' = 4x - 5y$
$y' = 5x - 4y$, $\mathbf{X}(0) = (4, 5)$
(Problema 37, Ejercicios 8.2)

20. $x' = x + y$
$y' = -2x - y$, $\mathbf{X}(0) = (-2, 2)$
(Problema 34, Ejercicios 8.2)

21. $x' = 5x + y$
$y' = -2x + 3y$, $\mathbf{X}(0) = (-1, 2)$
(Problema 35, Ejercicios 8.2)

22. $x' = x - 8y$
$y' = x - 3y$, $\mathbf{X}(0) = (2, 1)$
(Problema 38, Ejercicios 8.2)

En los problemas 23 a 26, resuelva el sistema autónomo plano no lineal dado, cambiado a coordenadas polares. Describa el comportamiento geométrico de la solución que satisfaga las condiciones iniciales dadas.

23. $x' = -y - x(x^2 + y^2)^2$
$y' = x - y(x^2 + y^2)^2$, $\mathbf{X}(0) = (4, 0)$

24. $x' = y + x(x^2 + y^2)$
$y' = -x + y(x^2 + y^2)$, $\mathbf{X}(0) = (4, 0)$

25. $x' = -y + x(1 - x^2 - y^2)$
$y' = x + y(1 - x^2 - y^2)$, $\mathbf{X}(0) = (1, 0), \mathbf{X}(0) = (2, 0)$
[*Sugerencia*: La ecuación diferencial resultante para r es una ecuación diferencial de Bernoulli. Véase la sección 2.5.]

26. $x' = y - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(4 - x^2 - y^2)$
$y' = -x - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}(4 - x^2 - y^2)$,
$\mathbf{X}(0) = (1, 0), \mathbf{X}(0) = (2, 0)$

Si un sistema autónomo plano tiene una solución periódica, entonces debe haber al menos un punto crítico dentro de 1a curva generada por la solución. Aplique esto en los problemas 27 a 30 y con un programa de solución numérica, investigue la posibilidad de que existan soluciones periódicas.

27. $x' = -x + 6y$
$y' = xy + 12$

28. $x' = -x + 6xy$
$y' = -8xy + 2y$

29. $x' = y$
$y' = y(1 - 3x^2 - 2y^2) - x$

30. $x' = xy$
$y' = -1 - x^2 - y^2$

10.2 ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES

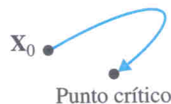
REPASO DE MATERIAL

- Sección 10.1, en particular los ejemplos 3 y 4.

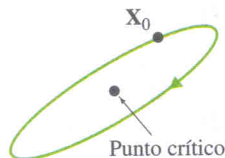
INTRODUCCIÓN Hemos visto que un sistema autónomo plano

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

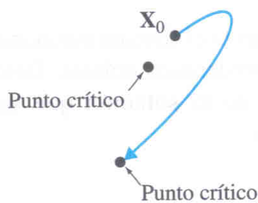
origina un campo vectorial $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ y que una solución $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ se puede interpretar como la trayectoria resultante de una partícula que se coloca inicialmente en la posición $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$. Si $\mathbf{X}_0$ es un punto crítico, la partícula permanece en reposo. En esta sección examinaremos el comportamiento de soluciones cuando $\mathbf{X}_0$ se elige cerca de un punto crítico del sistema.



a) Localmente estable



b) Localmente estable



c) Inestable

FIGURA 10.2.1 Puntos críticos.

ALGUNAS PREGUNTAS FUNDAMENTALES Suponga que $\mathbf{X}_1$ es un punto crítico de un sistema autónomo plano y que $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ es una solución del sistema que satisface que $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$. Si se interpreta la solución como una trayectoria de una partícula en movimiento, nos interesan las respuestas de las siguientes preguntas, cuando $\mathbf{X}_0$ está cerca de $\mathbf{X}_1$:

i) ¿Regresará la partícula al punto crítico? Más precisamente $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1$?

ii) Si la partícula *no* regresa al punto crítico, ¿permanece cerca de él o se aleja? Es concebible que, por ejemplo, la partícula sólo describa circunferencias en torno al punto crítico o que pueda incluso regresar a un punto crítico distinto o que no vaya a ninguno. Véase la figura 10.2.1.

Si en alguna vecindad del punto crítico *siempre* ocurre el caso a) o el b) de la figura 10.2.1, ese punto crítico se llama **localmente estable**. Sin embargo, si se encuentra en cualquier vecindad un valor inicial $\mathbf{X}_0$ que ocasione un comportamiento parecido al caso c), ese punto crítico se llama **inestable**. Estos conceptos se tratarán con mayor precisión en la sección 10.3, donde investigaremos las preguntas *i*) e *ii*) para sistemas no lineales.

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD Primero investigaremos estos dos casos de estabilidad para sistemas autónomos lineales planos, estableciendo las bases para la sección 10.3. Los métodos de solución del capítulo 8 nos permiten efectuar un análisis geométrico cuidadoso de las soluciones de

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \qquad (1)$$

en términos de los eigenvalores y eigenvectores de la matriz de coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Para asegurar que $\mathbf{X}_0 = (0, 0)$ sea el único punto crítico, supondremos que el determinante $\Delta = ad - bc \neq 0$. Si $\tau = a + d$ es la traza* de la matriz $\mathbf{A}$, entonces, la ecuación característica $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ se puede reescribir como

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0.$$

Por tanto, los eigenvalores de $\mathbf{A}$ son $\lambda = \left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}\right)/2$, y los tres casos usuales para esas raíces se presentan según si $\tau^2 - 4\Delta$ es positivo, negativo o cero. En el siguiente ejemplo usamos un programa de solución numérica para determinar la naturaleza de las soluciones correspondientes a estos casos.

EJEMPLO 1 Eigenvalores y la forma de las soluciones

Determine los eigenvalores del sistema lineal

$$x' = -x + y$$

$$y' = cx - y$$

en términos de c y utilice un programa de solución numérica para descubrir las formas de las soluciones correspondientes a los casos $c = \frac{1}{4}$, 4, 0 y -9.

SOLUCIÓN La matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ tiene traza $\tau = -2$ y determinante $\Delta = 1 - c$ y por tanto los eigenvalores son

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1 - c)}}{2} = -1 \pm \sqrt{c}.$$

La naturaleza de los eigenvalores está determinada por el signo de c.

Si $c = \frac{1}{4}$, entonces los eigenvalores son negativos y diferentes, $\lambda = -\frac{1}{2}$ y $-\frac{3}{2}$. En la figura 10.2.2a hemos usado un programa de solución numérica para generar curvas solución o trayectorias, que corresponden a diversas condiciones iniciales. Observe que, excepto las trayectorias dibujadas en rojo de la figura, todas las trayectorias parecen tender a $\mathbf{0}$ desde una dirección fija. Recuerde, del capítulo 8, que un conjunto de trayectorias en el plano xy o **plano fase**, se llama **diagrama de fase** del sistema.

Cuando $c = 4$, los eigenvalores tienen signos contrarios, $\lambda = 1$ y $\lambda = -3$, y se presenta un fenómeno interesante. Todas las trayectorias se alejan del origen en una dirección fija, excepto las soluciones que comienzan a lo largo de la recta dibujada en rojo de la figura 10.2.2b. Ya hemos visto comportamientos parecidos, en el diagrama de fase de la figura 8.2.2. Experimente con su programa de solución numérica y compruebe estas observaciones.

La selección $c = 0$ conduce a un solo eigenvalor real $\lambda = -1$. Este caso es muy parecido al caso $c = \frac{1}{4}$ con una excepción notable. Todas las curvas solución en la figura 10.2.2c parecen tender a $\mathbf{0}$ desde una dirección fija, conforme t aumenta.

Por último, cuando $c = -9$, $\lambda = -1 \pm \sqrt{-9} = -1 \pm 3i$. Por tanto, los eigenvalores son números complejos conjugados, con parte real negativa -1. La figura 10.2.2d muestra que la curva solución describe una espiral hacia el origen $\mathbf{0}$ cuando t aumenta. ■

Los comportamientos de las trayectorias que se han observado en los cuatro diagramas de fase de la figura 10.2.2 del ejemplo 1 se pueden explicar usando la solución eigenvalor-eigenvector resultante del capítulo 8.

*En general si $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$ la **traza** de $\mathbf{A}$ es la suma de las diagonales principales.

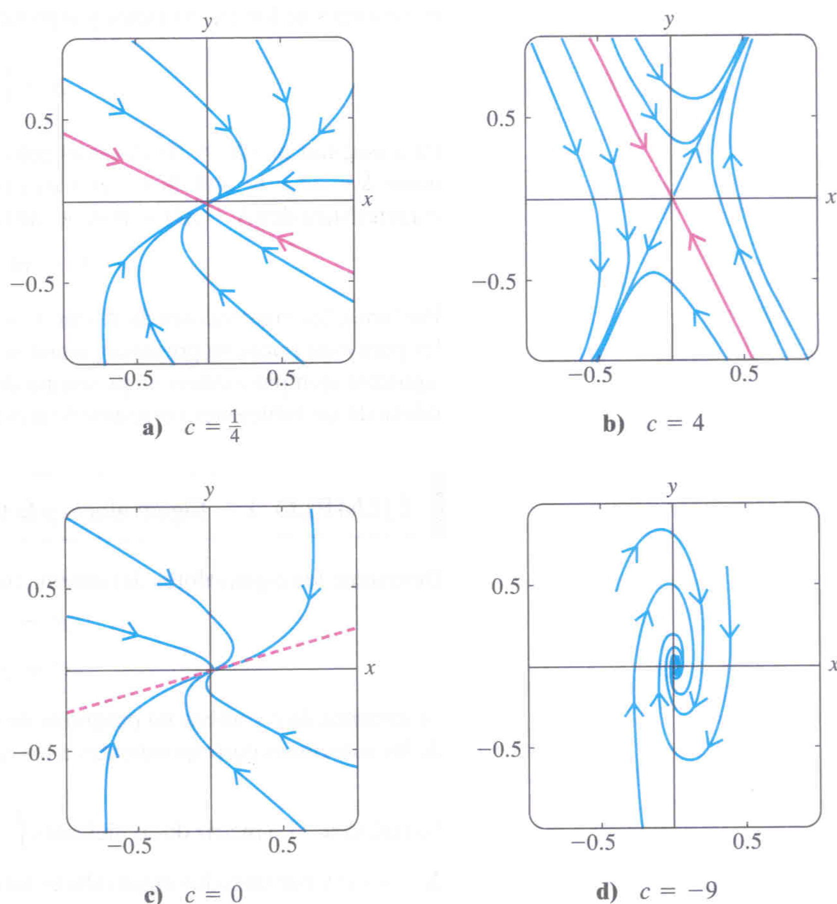


FIGURA 10.2.2 Diagramas de fase del sistema lineal del ejemplo 1 para diferentes valores de c.

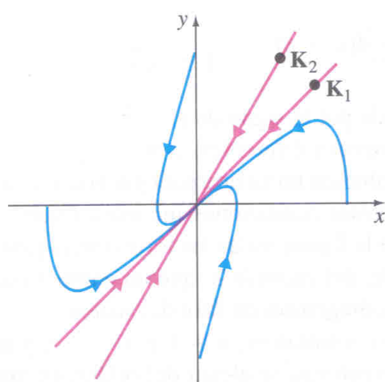


FIGURA 10.2.3 Nodo estable.

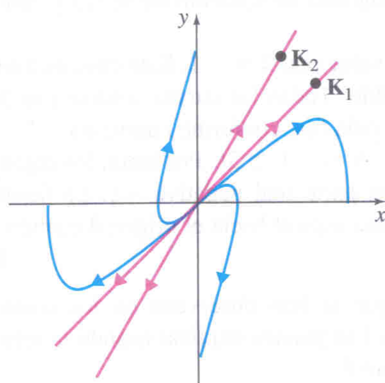


FIGURA 10.2.4 Nodo inestable.

CASO I: EIGENVALORES REALES Y DISTINTOS ($\tau^2 - 4\Delta > 0$) De acuerdo con el teorema 8.2.1 de la sección 8.2, la solución general del sistema (1) está dada por

$$\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{2}$$

en donde λ_1 y λ_2 son los eigenvalores y $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ son los eigenvectores correspondientes. Observe que $\mathbf{X}(t)$ también se puede escribir como

$$\mathbf{X}(t) = e^{\lambda_1 t}[c_1\mathbf{K}_1 + c_2\mathbf{K}_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}]. \tag{3}$$

a) **Ambos eigenvalores son negativos** ($\tau^2 - 4\Delta > 0$, $\tau < 0$, y $\Delta > 0$)
Nodo estable ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$): Puesto que ambos eigenvalores son negativos, se tiene de la ecuación (2) que $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{0}$. Si suponemos que $\lambda_2 < \lambda_1$, entonces $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, por lo que $e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$ es una función exponencial de decaimiento. Por tanto podemos concluir de la ecuación (3) que $\mathbf{X}(t) \approx c_1\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t}$ para valores grandes de t. Cuando $c_1 \neq 0$, $\mathbf{X}(t)$ tiende a $\mathbf{0}$ de una de las dos direcciones determinadas por el eigenvector $\mathbf{K}_1$ correspondiente a λ_1. Si $c_1 = 0$, $\mathbf{X}(t) = c_2\mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t}$ y $\mathbf{X}(t)$ tiende a $\mathbf{0}$ a lo largo de la recta determinada por el eigenvector $\mathbf{K}_2$. La figura 10.2.3 muestra un conjunto de curvas solución alrededor del origen. Un punto crítico se llama **nodo estable** cuando ambos eigenvalores son negativos.

b) **Ambos eigenvalores son positivos** ($\tau^2 - 4\Delta > 0$, $\tau > 0$, y $\Delta > 0$)
Nodo inestable ($0 < \lambda_2 < \lambda_1$): El análisis de este caso es similar al anterior. Nuevamente, de acuerdo con (2), $\mathbf{X}(t)$ es ilimitado conforme t aumenta. Además, suponiendo nuevamente que $\lambda_2 < \lambda_1$ y usando la ecuación (3), se ve que $\mathbf{X}(t)$ aumenta sin límite en una de las direcciones determinadas por el eigenvector $\mathbf{K}_1$ (cuando $c_1 \neq 0$) o está a lo largo de la recta determinada por el

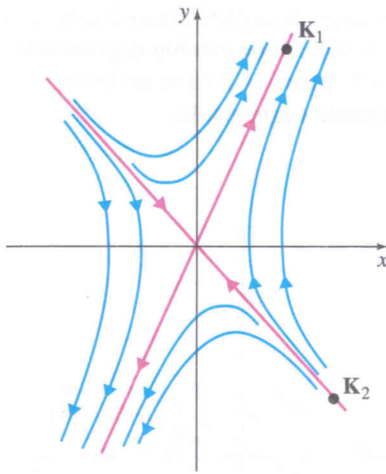


FIGURA 10.2.5 Punto silla.

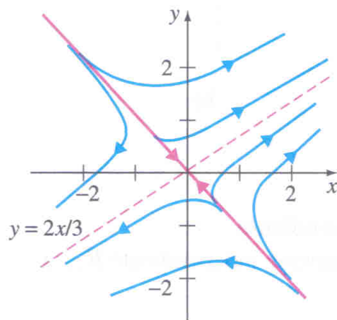


FIGURA 10.2.6 Punto silla.

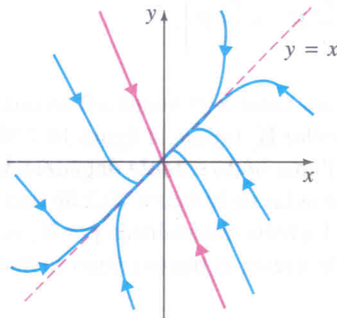


FIGURA 10.2.7 Nodo estable.

eigenvector $\mathbf{K}_2$ (cuando $c_1 = 0$). La figura 10.2.4 muestra un conjunto típico de curvas solución. Esta clase de puntos críticos, que corresponden al caso en el que ambos eigenvalores son positivos, se llama **nodo inestable**.

c) **Los eigenvalores tienen signos opuestos** ($\tau^2 - 4\Delta > 0$ y $\Delta < 0$)
Punto de silla ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$): El análisis de las soluciones es idéntico al del inciso b), con una excepción. Cuando $c_1 = 0$, $\mathbf{X}(t) = c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda_2 t}$, y puesto que $\lambda_2 < 0$, $\mathbf{X}(t)$ tenderá a $\mathbf{0}$ a lo largo de la recta determinada por el eigenvector $\mathbf{K}_2$. Si $\mathbf{X}(0)$ no está en la recta determinada por $\mathbf{K}_2$, la recta determinada por $\mathbf{K}_1$ sirve de asíntota para $\mathbf{X}(t)$. Por tanto el punto crítico es inestable aunque algunas soluciones tiendan a $\mathbf{0}$ conforme t aumenta. Este punto crítico inestable se llama **punto silla**. Véase la figura 10.2.5.

EJEMPLO 2 Eigenvalores reales distintos

Clasifique el punto crítico (0, 0) en cada uno de los sistemas lineales $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ siguientes ya sea como un nodo estable, un nodo inestable o un punto de silla.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 15 & -19 \end{pmatrix}$

En cada caso analice la naturaleza de las soluciones en una vecindad de (0, 0).

SOLUCIÓN **a)** Ya que la traza es $\tau = 3$ y el determinante $\Delta = -4$, los eigenvalores son

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4, -1.$$

Los eigenvalores tienen signos opuestos, por lo que (0, 0) es un punto silla. No es difícil demostrar (véase el ejemplo 1, sección 8.2) que los eigenvectores correspondientes a $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1$ son

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Si $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ está en la recta $y = -x$, entonces $\mathbf{X}(t)$ tiende a $\mathbf{0}$. Para cualquier otra condición inicial, $\mathbf{X}(t)$ no tiene límite en las direcciones determinadas por $\mathbf{K}_1$. En otras palabras, la recta $y = \frac{2}{3}x$ es una asíntota para todas estas curvas solución. Véase la figura 10.2.6.

b) De $\tau = -29$ y $\Delta = 100$ se tiene que los eigenvalores de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = -25$. Ambos eigenvalores son negativos, así que en este caso (0, 0) es un nodo estable. Puesto que los eigenvectores correspondientes a $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = -25$ son

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

respectivamente, por lo que todas las soluciones tienden a $\mathbf{0}$ desde la dirección definida por $\mathbf{K}_1$, excepto aquellas para las que $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ está en la recta $y = -\frac{5}{2}x$ determinada por $\mathbf{K}_2$. Esas soluciones tienden a $\mathbf{0}$ a lo largo de $y = -\frac{5}{2}x$. Véase la figura 10.2.7. ■

CASO II: UN EIGENVALOR REAL REPETIDO ($\tau^2 - 4\Delta = 0$)

NODOS DEGENERADOS: Recuerde de la sección 8.2, que la solución general toma una de las dos formas distintas dependiendo de si se pueden determinar uno o dos eigenvectores linealmente independientes, para el eigenvalor λ_1 repetido.

a) **Dos eigenvectores linealmente independientes**
Si $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ son dos eigenvectores linealmente independientes correspondientes a λ_1, entonces la solución general está dada por

$$\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda_1 t} = (c_1\mathbf{K}_1 + c_2\mathbf{K}_2)e^{\lambda_1 t}.$$

Si $\lambda_1 < 0$, entonces $\mathbf{X}(t)$ tiende a $\mathbf{0}$ a lo largo de la recta determinada por el vector $c_1\mathbf{K}_1 + c_2\mathbf{K}_2$ y el punto crítico se llama **nodo estable degenerado** (véase la figura 10.2.8a). Las flechas de la figura 10.2.8a se invierten cuando $\lambda_1 > 0$, y se tiene un **nodo inestable degenerado**.

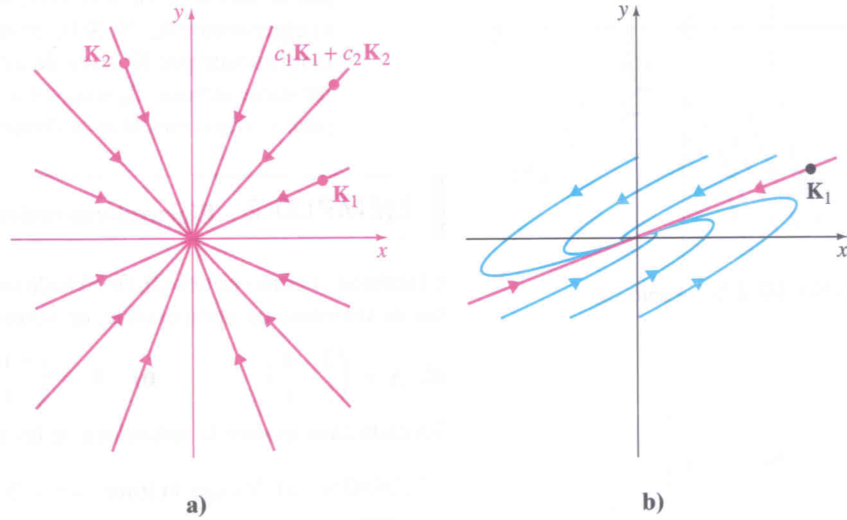


FIGURA 10.2.8 Nodos estables degenerados.

b) Un solo eigenvector linealmente independiente
Cuando sólo existe un eigenvector linealmente independiente $\mathbf{K}_1$, la solución general se determina por

$$\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + c_2(\mathbf{K}_1te^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}e^{\lambda_1 t}),$$

en donde $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}_1$ (véase la sección 8.2 (12) a (14)) y la solución se puede reescribir como

$$\mathbf{X}(t) = te^{\lambda_1 t}\left[c_2\mathbf{K}_1 + \frac{c_1}{t}\mathbf{K}_1 + \frac{c_2}{t}\mathbf{P}\right].$$

Si $\lambda_1 < 0$, entonces $\lim_{t\to\infty} te^{\lambda_1 t} = 0$, y por tanto $\mathbf{X}(t)$ tiende a $\mathbf{0}$ en una de las direcciones determinadas por el vector $\mathbf{K}_1$ (véase la figura 10.2.8b). El punto crítico en este caso también se llama **nodo estable degenerado**. Cuando $\lambda_1 > 0$, las soluciones se ven como las de la figura 10.2.8b con las direcciones de las flechas invertidas. La recta determinada por $\mathbf{K}_1$ es una asíntota para *todas* las soluciones. De nuevo, el punto crítico se llama **nodo inestable degenerado**.

CASO III: EIGENVALORES COMPLEJOS ($\tau^2 - 4\Delta < 0$) Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, y $\lambda_1 = \alpha - i\beta$ son los eigenvalores complejos y si $\mathbf{K}_1 = \mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2$ es un eigenvector complejo correspondiente a λ_1, la solución general se puede escribir como $\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{X}_1(t) + c_2\mathbf{X}_2(t)$, donde

$$\mathbf{X}_1(t) = (\mathbf{B}_1\cos\beta t - \mathbf{B}_2\,\text{sen}\,\beta t)e^{\alpha t}, \qquad \mathbf{X}_2(t) = (\mathbf{B}_2\cos\beta t + \mathbf{B}_1\,\text{sen}\,\beta t)e^{\alpha t}.$$

Véanse las ecuaciones (23) y (24) en la sección 8.2. Por tanto una solución se puede escribir en la forma

$$x(t) = e^{\alpha t}(c_{11}\cos\beta t + c_{12}\,\text{sen}\,\beta t), \qquad y(t) = e^{\alpha t}(c_{21}\cos\beta t + c_{22}\,\text{sen}\,\beta t), \qquad (4)$$

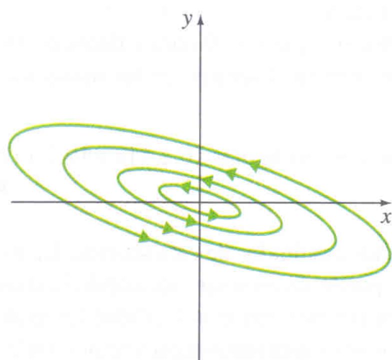


FIGURA 10.2.9 Centro.

y cuando $\alpha = 0$ se tiene que

$$x(t) = c_{11}\cos\beta t + c_{12}\,\text{sen}\,\beta t, \qquad y(t) = c_{21}\cos\beta t + c_{22}\,\text{sen}\,\beta t. \tag{5}$$

a) **Raíces imaginarias puras** ($\tau^2 - 4\Delta < 0$, $\tau = 0$)

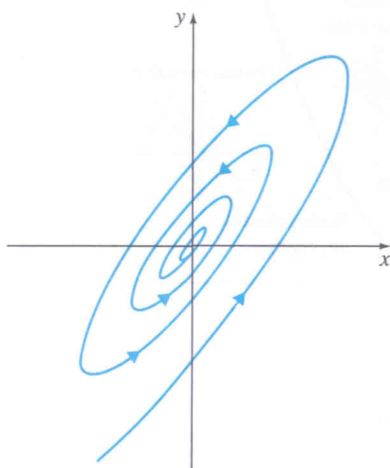
Centro: Cuando $\alpha = 0$, los eigenvalores son imaginarios puros, y de las ecuaciones (5) todas las soluciones son periódicas con periodo $p = 2\pi/\beta$. Observe que si ocurriera que tanto c_{12} como c_{21} fueran iguales a cero, entonces el sistema (5) se reduciría a

$$x(t) = c_{11}\cos\beta t, \qquad y(t) = c_{22}\,\text{sen}\,\beta t,$$

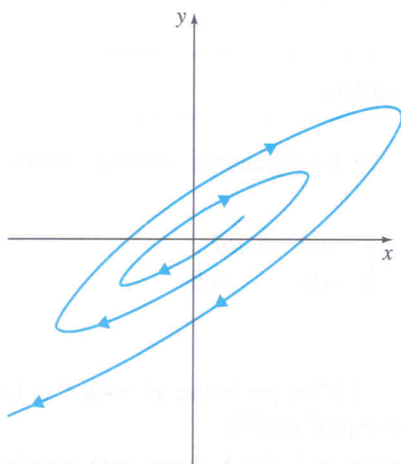
que es una representación paramétrica estándar de la elipse $x^2/c_{11}^2 + y^2/c_{22}^2 = 1$. Resolviendo el sistema de ecuaciones (4) para $\cos\beta t$ y $\text{sen}\,\beta t$ del sistema y usando la identidad $\text{sen}^2\beta t + \cos^2\beta t = 1$, es posible demostrar que todas *las soluciones son elipses* con centro en el origen. El punto crítico (0, 0) se llama **centro** y la figura 10.2.9 muestra un conjunto característico de curvas solución. *Todas* las elipses se recorren en el sentido de las manecillas del reloj o *todas* en sentido opuesto.

b) **Parte real distinta de cero** ($\tau^2 - 4\Delta < 0$, $\tau \neq 0$)

Puntos espirales: Cuando $\alpha \neq 0$, el efecto del término $e^{\alpha t}$ del sistema (4) es parecido al del término exponencial en el análisis del movimiento amortiguado explicado en la sección 5.1. Cuando $\alpha < 0$, $e^{\alpha t} \to 0$ y las soluciones en forma de espirales elípticas se acercan cada vez más al origen. Al punto crítico se le llama **punto espiral estable**. Cuando $\alpha > 0$, el efecto es contrario. Una solución elíptica se aleja cada vez más del origen y ahora el punto crítico se llama **punto espiral inestable**. Véase la figura 10.2.10.



a) Punto espiral estable



b) Punto espiral inestable

FIGURA 10.2.10 Puntos espirales.

EJEMPLO 3 Eigenvalores complejos repetidos

Clasifique el punto crítico (0, 0) de cada uno de los siguientes sistemas lineales $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

En cada caso, describa la naturaleza de la solución que satisface $\mathbf{X}(0) = (1, 0)$. Determine ecuaciones paramétricas para cada solución.

SOLUCIÓN **a)** Como $\tau = -6$ y $\Delta = 9$, el polinomio característico es $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$, por lo que (0, 0) es un nodo estable degenerado. Para el eigenvalor repetido $\lambda = -3$ se determina un solo eigenvector $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, por lo que la solución $\mathbf{X}(t)$ que satisface a $\mathbf{X}(0) = (1, 0)$ tiende a (0, 0) desde la dirección especificada por la recta $y = x/3$.

b) Como $\tau = 0$ y $\Delta = 1$, los eigenvalores son $\lambda = \pm i$, así que (0, 0) es un centro. La solución $\mathbf{X}(t)$ que satisface a $\mathbf{X}(0) = (1, 0)$ es una elipse que da vuelta al origen cada 2π unidades de tiempo.

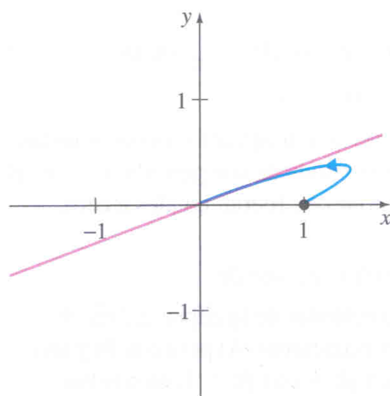
De acuerdo con el ejemplo 4 de la sección 8.2, la solución general del sistema en a) es

$$\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}e^{-3t}\right].$$

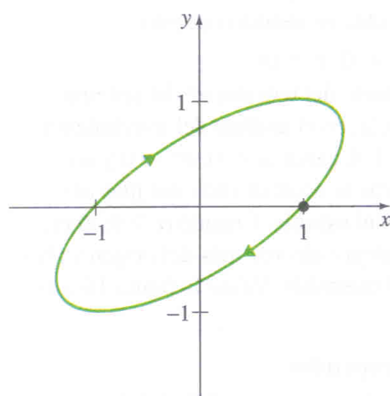
La condición inicial significa que $c_1 = 0$ y $c_2 = 2$ y por tanto $x = (6t + 1)e^{-3t}$, $y = 2te^{-3t}$ son ecuaciones paramétricas de la solución.

La solución general del sistema en b) es

$$\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} \cos t + \text{sen}\,t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t - \text{sen}\,t \\ -\text{sen}\,t \end{pmatrix}.$$



a) Nodo estable degenerado



b) Centro

FIGURA 10.2.11 Puntos críticos del ejemplo 3.

La condición inicial da $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$, por tanto $x = \cos t - \operatorname{sen} t$, $y = -\operatorname{sen} t$ son ecuaciones paramétricas de la elipse. Observe que $y < 0$ para valores positivos pequeños de t, por lo que la elipse se recorre en el sentido de las manecillas del reloj.

Las soluciones de los incisos a) y b) se muestran en las figuras 10.2.11a y 10.2.11b, respectivamente. ■

La figura 10.2.12 resume convenientemente los resultados de esta sección. La naturaleza geométrica general de las soluciones se puede determinar calculando la traza y el determinante de **A**. En la práctica, se pueden obtener con más facilidad las gráficas de las soluciones *no* construyendo las soluciones eigenvalor-eigenvector explícitas sino más bien generando las soluciones con un programa de solución numérica y el método de Runge-Kutta para sistemas de primer orden.

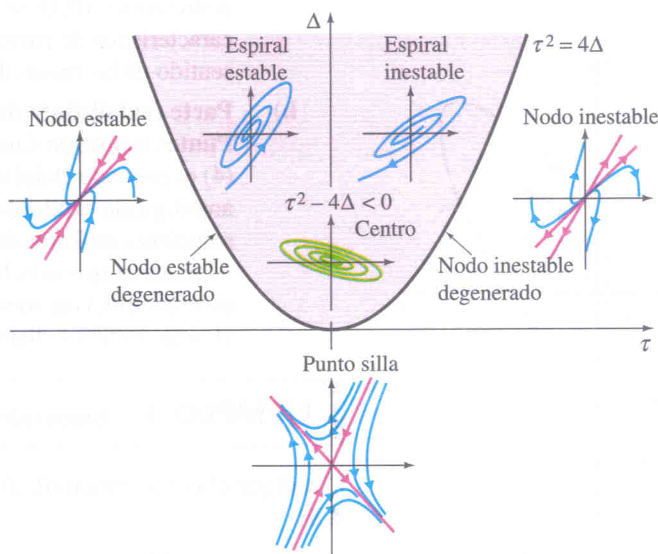


FIGURA 10.2.12 Resumen geométrico de los casos I, II y III.

EJEMPLO 4 Clasificación de puntos críticos

Clasifique el punto crítico (0, 0) de cada uno de los siguientes sistemas lineales $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.01 & 3.10 \\ -1.10 & -1.02 \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a\hat{x} & -ab\hat{x} \\ -cd\hat{y} & -d\hat{y} \end{pmatrix}$

para las constantes positivas $a, b, c, d, \hat{x}$, y $\hat{y}$.

SOLUCIÓN **a)** Para esta matriz $\tau = -0.01$, $\Delta = 2.3798$, por lo que $\tau^2 - 4\Delta < 0$. En la figura 10.2.12 se ve que (0, 0) es un punto espiral estable.

b) Esta matriz surge del modelo de competencia de Lotka-Volterra, que estudiaremos en la sección 10.4. Puesto que $\tau = -(a\hat{x} + d\hat{y})$ y todas las constantes de la matriz son positivas, $\tau < 0$. El determinante se puede escribir en la forma $\Delta = ad\hat{x}\hat{y}(1 - bc)$. Si $bc > 1$, entonces $\Delta < 0$ y el punto crítico es punto silla. Si $bc < 1$, $\Delta > 0$ y el punto crítico puede ya ser un nodo estable, un nodo estable degenerado o un punto espiral estable. En los tres casos $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{0}$. ■

Las respuestas a las preguntas que se presentaron al principio de esta sección para el sistema autónomo plano (1) con $ad - bc \neq 0$, se pueden resumir en el siguiente teorema.

TEOREMA 10.2.1 Criterio de estabilidad para sistemas lineales

Para un sistema lineal autónomo plano $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ en el que $\det \mathbf{A} \neq 0$, sea que $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ denote la solución que satisface la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$, donde $\mathbf{X}_0 \neq \mathbf{0}$.

a) $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{0}$ si y sólo si los eigenvalores de $\mathbf{A}$ tienen partes reales negativas. Esto sucede cuando $\Delta > 0$ y $\tau < 0$.

b) $\mathbf{X}(t)$ es periódica si y sólo si los eigenvalores de $\mathbf{A}$ son imaginarios puros. Esto sucede cuando $\Delta > 0$ y $\tau = 0$.

c) En todos los otros casos, dada cualquier vecindad del origen, existe al menos un $\mathbf{X}_0$ en ella para la cual $\mathbf{X}(t)$ se vuelve ilimitado conforme t aumenta.

COMENTARIOS

La terminología que usamos para describir los tipos de puntos críticos varía de uno a otro libro. La siguiente tabla es una lista de los muchos términos alternativos que podrá encontrar en su lectura.

Término	Términos alternativos
punto crítico	punto de equilibrio, punto singular, punto estacionario, punto de reposo
punto espiral	foco, punto focal, punto vórtice
nodo o punto espiral estable	atractor, sumidero
nodo o punto espiral inestable	repulsor, fuente

EJERCICIOS 10.2

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-17.

En los problemas 1 a 8 se presenta la solución general del sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.

a) En cada caso, analice la naturaleza de las soluciones en una vecindad de (0, 0).

b) Con ayuda de una calculadora graficadora o de un SAC trace la gráfica de la solución que satisface $\mathbf{X}(0) = (1,1)$.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-6t}$

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}e^{2t}$

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}(t) = e^{t}\left[c_1\begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}\right]$

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{X}(t) = e^{-t}\left[c_1\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}\right]$$

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}e^{-t}\right]$$

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}te^{4t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t}\right]$$

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-t}$

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ \cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} 2t \\ 2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}$$

En los problemas 9 a 16 clasifique el punto crítico (0, 0) del sistema lineal correspondiente, calculando la traza τ y el determinante Δ y utilizando la figura 10.2.12.

9. $x' = -5x + 3y$
$y' = 2x + 7y$

10. $x' = -5x + 3y$
$y' = 2x - 7y$

11. $x' = -5x + 3y$
$y' = -2x + 5y$

12. $x' = -5x + 3y$
$y' = -7x + 4y$

13. $x' = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y$
$y' = -x - \frac{1}{2}y$

14. $x' = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y$
$y' = -x + \frac{1}{2}y$

15. $x' = 0.02x - 0.11y$
$y' = 0.10x - 0.05y$

16. $x' = 0.03x + 0.01y$
$y' = -0.01x + 0.05y$

17. Determine las condiciones de la constante real μ tal que (0, 0) sea un centro para el sistema lineal

$$x' = -\mu x + y$$
$$y' = -x + \mu y.$$

18. Determine una condición de la constante real μ tal que (0, 0) sea un punto espiral estable del sistema lineal

$$x' = y$$
$$y' = -x + \mu y.$$

19. Demuestre que (0, 0) siempre es un punto crítico inestable del sistema lineal

$$x' = \mu x + y$$
$$y' = -x + y,$$

donde μ es una constante real y $\mu \neq -1$. ¿Cuándo (0, 0) es un punto silla inestable? ¿Cuándo (0, 0) es un punto espiral inestable?

20. Sea $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ la respuesta de un sistema dinámico lineal

$$x' = \alpha x - \beta y$$
$$y' = \beta x + \alpha y$$

que satisface la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$. Determine las condiciones sobre las constantes reales α y β que aseguren que $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = (0, 0)$. ¿Puede (0, 0) ser un nodo o un punto silla?

21. Demuestre que el sistema lineal no homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$ tiene un punto crítico único $\mathbf{X}_1$ cuando $\Delta = \det \mathbf{A} \neq 0$. Concluyendo si $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ es una solución del sistema no homogéneo, $\tau < 0$ y $\Delta > 0$, entonces $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1$. [*Sugerencia*: $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_c(t) + \mathbf{X}_1$.]

22. En el ejemplo 4b demuestre que (0, 0) es un nodo estable cuando $bc < 1$.

En los problemas 23 a 26 un sistema lineal no homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$ está dado.

a) En cada caso, determine el único punto crítico $\mathbf{X}_1$.

b) Con un programa de solución numérica, determine la naturaleza del punto crítico en el inciso a).

c) Investigue la relación entre $\mathbf{X}_1$ y el punto crítico (0, 0) del sistema lineal homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.

23. $x' = 2x + 3y - 6$
$y' = -x - 2y + 5$

24. $x' = -5x + 9y + 13$
$y' = -x - 11y - 23$

25. $x' = 0.1x - 0.2y + 0.35$
$y' = 0.1x + 0.1y - 0.25$

26. $x' = 3x - 2y - 1$
$y' = 5x - 3y - 2$

10.3 LINEALIZACIÓN Y ESTABILIDAD LOCAL

REPASO DE MATERIAL

- El concepto de linealización se presentó por vez primera en la sección 2.6.

INTRODUCCIÓN En esta sección, el concepto clave es el de la linealización. Una **linealización**, de una función derivable f en un punto $(x_1, f(x_1))$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en ese punto: $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$. Para x cerca de x_1, los puntos de la gráfica de f están cerca de los puntos de la recta tangente, por lo que los valores $y(x)$ obtenidos con esta ecuación se pueden usar como aproximaciones de los valores correspondientes de $f(x)$. En esta sección usaremos la linealización como un medio de análisis de ED no lineales y de sistemas no lineales; la idea es reemplazarlas por ED lineales y por sistemas lineales.

CUENTA DESLIZANTE Comenzaremos esta sección refinando el concepto de estabilidad que presentamos en la sección 10.2, de tal modo que se pueda aplicar también a sistemas autónomos no lineales. Aunque el sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ tiene sólo un punto crítico cuando $\det \mathbf{A} \neq 0$, vimos en la sección 10.1 que un sistema no lineal puede tener muchos puntos críticos, por lo que no podemos esperar que una partícula que se coloca

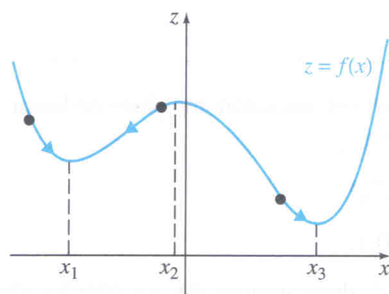


FIGURA 10.3.1 Cuenta deslizándose sobre la gráfica de $z = f(x)$.

inicialmente en $\mathbf{X}_0$ permanezca cerca de un punto crítico dado $\mathbf{X}_1$ a menos que inicialmente $\mathbf{X}_0$ se haya colocado suficientemente cerca de $\mathbf{X}_1$. Podría ser que la partícula fuera impulsada a un segundo punto crítico. Para subrayar esta idea, considere el sistema físico que se muestra en la figura 10.3.1, donde una cuenta se desliza a lo largo de la curva $z = f(x)$, únicamente bajo la influencia de la gravedad. En la sección 10.4 demostraremos que la coordenada x de la cuenta satisface una ecuación diferencial no lineal de segundo orden, $x'' = g(x, x')$; por tanto, haciendo $y = x'$ se satisface el sistema autónomo no lineal

$$x' = y$$
$$y' = g(x, y).$$

Si la cuenta se coloca en $P = (x, f(x))$ y su velocidad inicial es cero, permanecerá en P suponiendo que $f'(x) = 0$. Si se coloca cerca del punto crítico localizado en $x = x_1$, permanecerá cerca de $x = x_1$ sólo si su velocidad inicial no la impulsa y hace que rebase la "joroba" que hay en $x = x_2$ cuando va hacia el punto crítico que está en $x = x_3$. Por tanto, $\mathbf{X}(0) = (x(0), x'(0))$ debe estar cerca de $(x_1, 0)$.

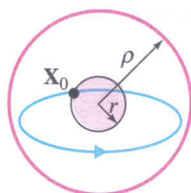
En la siguiente definición representaremos la distancia entre dos puntos $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ con $|\mathbf{X} - \mathbf{Y}|$. Recuerde que si $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, entonces

$$|\mathbf{X} - \mathbf{Y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

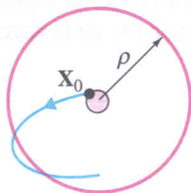
DEFINICIÓN 10.3.1 Puntos críticos estables

Sea $\mathbf{X}_1$ un punto crítico de un sistema autónomo y sea $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ la solución que satisface la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$, donde $\mathbf{X}_0 \neq \mathbf{X}_1$. Se dice que $\mathbf{X}_1$ es un **punto crítico estable** cuando, dado cualquier radio $\rho > 0$, hay un radio correspondiente $r > 0$ tal que si la posición inicial $\mathbf{X}_0$ satisface $|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1| < r$, entonces la solución $\mathbf{X}(t)$ correspondiente satisface $|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_1| < \rho$ para todo $t > 0$. Si además, $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1$ siempre que $|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1| < r$, se dice que $\mathbf{X}_1$ es un **punto crítico asintóticamente estable**.

Esta definición se ilustra en la figura 10.3.2a. Dado cualquier disco de radio ρ en torno al punto crítico $\mathbf{X}_1$ una solución permanecerá dentro de este disco siempre que $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ se selecciona suficientemente cerca de $\mathbf{X}_1$. *No* es necesario que una solución tienda al punto crítico para que $\mathbf{X}_1$ sea estable. Los nodos estables, los puntos espiral estables y los centros son ejemplos de puntos críticos estables de sistemas lineales. Para subrayar que $\mathbf{X}_0$ se debe seleccionar cerca de $\mathbf{X}_1$, también se usa la terminología **punto crítico localmente estable**.



a) Estable



b) Inestable

FIGURA 10.3.2 Puntos críticos estables.

Con la negación de la definición 10.3.1 se obtiene la definición de un punto crítico inestable.

DEFINICIÓN 10.3.2 Punto crítico inestable

Sea $\mathbf{X}_1$ un punto crítico de un sistema autónomo y $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ la solución que satisface la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$, donde $\mathbf{X}_0 \neq \mathbf{X}_1$. Se dice que $\mathbf{X}_1$ es un **punto crítico inestable** si hay un disco de radio $\rho > 0$ con la propiedad de que para toda $r > 0$ hay, al menos, una posición inicial $\mathbf{X}_0$ que satisface $|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1| < r$, sin embargo la solución correspondiente $\mathbf{X}(t)$ satisface $|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_1| \geq \rho$ para al menos un $t > 0$.

Si un punto crítico $\mathbf{X}_1$ es inestable, independientemente de lo pequeña que sea la vecindad de $\mathbf{X}_1$, siempre se puede encontrar una posición inicial $\mathbf{X}_0$ que resulte ser una solución que salga de un disco de radio ρ en algún tiempo t futuro. Véase la figura 10.3.2b. Por tanto los nodos inestables, los puntos espiral inestables y los puntos silla son ejemplos de puntos críticos inestables de los sistemas lineales. En la figura 10.3.1 el punto crítico $(x_2, 0)$ es inestable. El mínimo desplazamiento o velocidad inicial hacen que la cuenta se deslice alejándose del punto $(x_2, f(x_2))$.

EJEMPLO 1 Un punto crítico estable

Demuestre que (0, 0) es un punto crítico estable del sistema autónomo plano no lineal

$$x' = -y - x\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y' = x - y\sqrt{x^2 + y^2}$$

que se consideró en el ejemplo 6 de la sección 10.1.

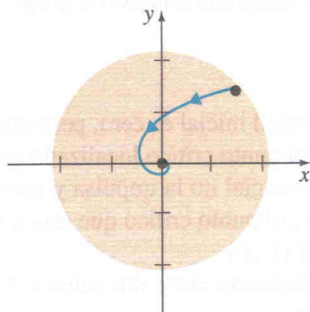


FIGURA 10.3.3 Punto crítico asintóticamente estable.

SOLUCIÓN En el ejemplo 6 de la sección 10.1, demostramos que en coordenadas polares, la solución del sistema es $r = 1/(t + c_1)$, $\theta = t + c_2$. Si $\mathbf{X}(0) = (r_0, \theta_0)$ es la condición inicial en coordenadas polares, entonces

$$r = \frac{r_0}{r_0 t + 1}, \qquad \theta = t + \theta_0.$$

Observe que $r \le r_0$ para $t \ge 0$ y que r tiende a (0, 0) conforme t aumenta. Por tanto, dado $\rho > 0$, una solución que se comienza estando a menos de ρ unidades del punto (0, 0) permanece dentro de ρ unidades del origen para todo $t \ge 0$. Así, el punto crítico (0, 0) es estable y de hecho es asintóticamente estable. Una solución característica es la que se muestra en la figura 10.3.3. ■

EJEMPLO 2 Un punto crítico inestable

Cuando se expresa en coordenadas polares, un sistema autónomo plano tiene la forma

$$\frac{dr}{dt} = 0.05r(3 - r)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -1.$$

Demuestre que $(x, y) = (0, 0)$ es un punto crítico inestable.

SOLUCIÓN Puesto que $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, se tiene que

$$\frac{dx}{dt} = -r\,\text{sen}\,\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\cos\theta$$

$$\frac{dy}{dt} = r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\,\text{sen}\,\theta.$$

A partir de $dr/dt = 0.05r(3 - r)$, se ve que $dr/dt = 0$ cuando $r = 0$ y se puede llegar a la conclusión de que $(x, y) = (0, 0)$ es un punto crítico, sustituyendo $r = 0$ en el sistema nuevo.

La ecuación diferencial $dr/dt = 0.05r(3 - r)$ es una ecuación logística que se puede resolver por separación de variables o con la ecuación (5) de la sección 3.2. Si $r(0) = r_0$, y si $r_0 \ne 0$, entonces

$$r = \frac{3}{1 + c_0 e^{-0.15t}},$$

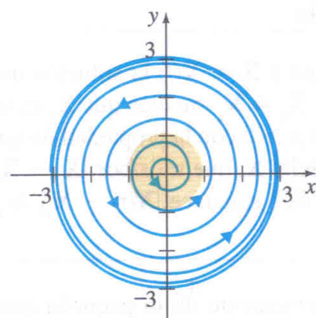


FIGURA 10.3.4 Punto crítico inestable.

donde $c_0 = (3 - r_0)/r_0$. Puesto que $\lim_{t\to\infty} \dfrac{3}{1 + c_0 e^{-0.15t}} = 3$, se tiene que, independientemente de lo cerca que comience una solución de (0, 0), la solución deja un disco de radio 1 centrado en el origen. Por tanto (0, 0) es un punto crítico inestable. En la figura 10.3.4 se muestra una solución típica que inicia cerca de (0, 0). ■

LINEALIZACIÓN Rara vez es posible determinar la estabilidad de un punto crítico de un sistema no lineal determinando soluciones explícitas, como hicimos en los ejemplos 1 y 2. En su lugar, se reemplaza el término $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ en el sistema original autónomo

$\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X})$ por un término lineal $\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)$, que está lo más cerca posible a $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ en la vecindad de $\mathbf{X}_1$. Este proceso de sustitución, se llama **linealización** y se ejemplificará primero para la ecuación diferencial de primer orden $x' = g(x)$.

Una ecuación de la recta tangente a la curva $y = g(x)$ en $x = x_1$ es $y = g(x_1) + g'(x_1)(x - x_1)$ y si x_1 es un punto crítico de $x' = g(x)$, se tiene que $x' = g(x) \approx g'(x_1)(x - x_1)$. La solución general de la ecuación diferencial lineal es $x' = g'(x_1)(x - x_1)$ es $x = x_1 + ce^{\lambda_1 t}$, donde $\lambda_1 = g'(x_1)$. Por lo que si $g'(x_1) < 0$, entonces $x(t)$ tiende a x_1. El teorema 10.3.1 afirma que se tiene el mismo comportamiento en la ecuación original, suponiendo que $x(0) = x_0$ está lo suficientemente cerca de x_1.

TEOREMA 10.3.1 Criterio de estabilidad para $x' = g(x)$

Sea x_1 un punto crítico de la ecuación diferencial autónoma $x' = g(x)$, donde g es derivable en x_1.

a) Si $g'(x_1) < 0$, entonces x_1 es un punto crítico asintóticamente estable.

b) Si $g'(x_1) > 0$, entonces x_1 es un punto crítico inestable.

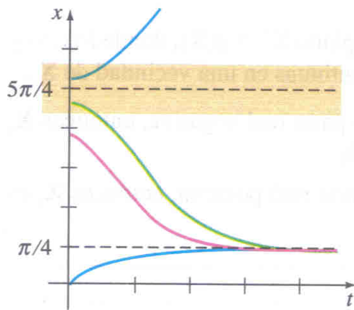


FIGURA 10.3.5 $\pi/4$ es asintóticamente estable y $5\pi/4$ es inestable.

EJEMPLO 3 Estabilidad en una ED de primer orden no lineal

Tanto $x = \pi/4$ como $x = 5\pi/4$ son puntos críticos de la ecuación diferencial autónoma $x' = \cos x - \text{sen}\, x$. Es difícil resolver en forma explícita esta ecuación, pero se puede utilizar el teorema 10.2 para predecir el comportamiento de las soluciones cerca de estos dos puntos críticos.

Puesto que $g'(x) = -\text{sen}\, x - \cos x$, entonces $g'(\pi/4) = -\sqrt{2} < 0$ y $g'(5\pi/4) = \sqrt{2} > 0$. Por tanto $x = \pi/4$ es un punto crítico asintóticamente estable, pero $x = 5\pi/4$ es inestable. En la figura 10.3.5 usamos un programa de solución numérica para investigar las soluciones que inician cerca de $(0, \pi/4)$ y $(0, 5\pi/4)$. Observe que las curvas solución que inician cerca de $(0, 5\pi/4)$ se alejan rápidamente de la recta $x = 5\pi/4$, como se predijo. ■

EJEMPLO 4 Análisis de estabilidad de una ED logística

Sin resolverla en forma explícita, analice los puntos críticos de la ecuación diferencial logística (véase la sección 3.2) $x' = \dfrac{r}{K}x(K - x)$, donde r y K son constantes positivas.

SOLUCIÓN Los dos puntos críticos son $x = 0$ y $x = K$, así, de $g'(x) = r(K - 2x)/K$ se obtiene $g'(0) = r$ y $g'(K) = -r$. Por el teorema 10.3.1 concluimos que $x = 0$ es un punto crítico inestable y que $x = K$ es un punto crítico asintóticamente estable. ■

MATRIZ JACOBIANA Se puede realizar un análisis similar para un sistema autónomo plano. Una ecuación del plano tangente a la superficie $z = g(x, y)$ en $\mathbf{X}_1 = (x_1, y_1)$ es

$$z = g(x_1, y_1) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_1,\, y_1)}(x - x_1) + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_1,\, y_1)}(y - y_1),$$

y $g(x, y)$ se puede aproximar con su plano tangente en una vecindad de $\mathbf{X}_1$.

Cuando $\mathbf{X}_1$ es un punto crítico de un sistema autónomo plano, $P(x_1, y_1) = Q(x_1, y_1) = 0$ y se tiene que

$$x' = P(x, y) \approx \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{(x_1,\, y_1)}(x - x_1) + \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{(x_1,\, y_1)}(y - y_1)$$

$$y' = Q(x, y) \approx \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x_1,\, y_1)}(x - x_1) + \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{(x_1,\, y_1)}(y - y_1).$$

$\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X})$ por un término lineal $\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)$, que está lo más cerca posible a $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ en la vecindad de $\mathbf{X}_1$. Este proceso de sustitución, se llama **linealización** y se ejemplificará primero para la ecuación diferencial de primer orden $x' = g(x)$.

Una ecuación de la recta tangente a la curva $y = g(x)$ en $x = x_1$ es $y = g(x_1) + g'(x_1)(x - x_1)$ y si x_1 es un punto crítico de $x' = g(x)$, se tiene que $x' = g(x) \approx g'(x_1)(x - x_1)$. La solución general de la ecuación diferencial lineal es $x' = g'(x_1)(x - x_1)$ es $x = x_1 + ce^{\lambda_1 t}$, donde $\lambda_1 = g'(x_1)$. Por lo que si $g'(x_1) < 0$, entonces $x(t)$ tiende a x_1. El teorema 10.3.1 afirma que se tiene el mismo comportamiento en la ecuación original, suponiendo que $x(0) = x_0$ está lo suficientemente cerca de x_1.

TEOREMA 10.3.1 Criterio de estabilidad para $x' = g(x)$

Sea x_1 un punto crítico de la ecuación diferencial autónoma $x' = g(x)$, donde g es derivable en x_1.

a) Si $g'(x_1) < 0$, entonces x_1 es un punto crítico asintóticamente estable.

b) Si $g'(x_1) > 0$, entonces x_1 es un punto crítico inestable.

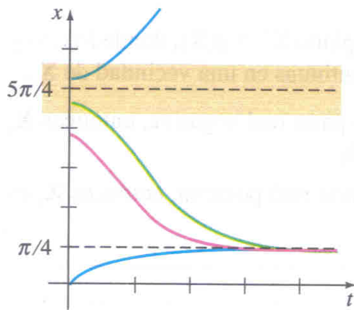


FIGURA 10.3.5 $\pi/4$ es asintóticamente estable y $5\pi/4$ es inestable.

EJEMPLO 3 Estabilidad en una ED de primer orden no lineal

Tanto $x = \pi/4$ como $x = 5\pi/4$ son puntos críticos de la ecuación diferencial autónoma $x' = \cos x - \operatorname{sen} x$. Es difícil resolver en forma explícita esta ecuación, pero se puede utilizar el teorema 10.2 para predecir el comportamiento de las soluciones cerca de estos dos puntos críticos.

Puesto que $g'(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x$, entonces $g'(\pi/4) = -\sqrt{2} < 0$ y $g'(5\pi/4) = \sqrt{2} > 0$. Por tanto $x = \pi/4$ es un punto crítico asintóticamente estable, pero $x = 5\pi/4$ es inestable. En la figura 10.3.5 usamos un programa de solución numérica para investigar las soluciones que inician cerca de $(0, \pi/4)$ y $(0, 5\pi/4)$. Observe que las curvas solución que inician cerca de $(0, 5\pi/4)$ se alejan rápidamente de la recta $x = 5\pi/4$, como se predijo. ■

EJEMPLO 4 Análisis de estabilidad de una ED logística

Sin resolverla en forma explícita, analice los puntos críticos de la ecuación diferencial logística (véase la sección 3.2) $x' = \frac{r}{K}x(K - x)$, donde r y K son constantes positivas.

SOLUCIÓN Los dos puntos críticos son $x = 0$ y $x = K$, así, de $g'(x) = r(K - 2x)/K$ se obtiene $g'(0) = r$ y $g'(K) = -r$. Por el teorema 10.3.1 concluimos que $x = 0$ es un punto crítico inestable y que $x = K$ es un punto crítico asintóticamente estable. ■

MATRIZ JACOBIANA Se puede realizar un análisis similar para un sistema autónomo plano. Una ecuación del plano tangente a la superficie $z = g(x, y)$ en $\mathbf{X}_1 = (x_1, y_1)$ es

$$z = g(x_1, y_1) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)}(x - x_1) + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_1, y_1)}(y - y_1),$$

y $g(x, y)$ se puede aproximar con su plano tangente en una vecindad de $\mathbf{X}_1$.

Cuando $\mathbf{X}_1$ es un punto crítico de un sistema autónomo plano, $P(x_1, y_1) = Q(x_1, y_1) = 0$ y se tiene que

$$x' = P(x, y) \approx \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)}(x - x_1) + \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{(x_1, y_1)}(y - y_1)$$

$$y' = Q(x, y) \approx \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)}(x - x_1) + \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{(x_1, y_1)}(y - y_1).$$

El sistema original $\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X})$ se puede aproximar en una vecindad del punto crítico $\mathbf{X}_1$ con el sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial P}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)} & \left.\dfrac{\partial P}{\partial y}\right|_{(x_1, y_1)} \\ \left.\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)} & \left.\dfrac{\partial Q}{\partial y}\right|_{(x_1, y_1)} \end{pmatrix}.$$

A esta matriz se le llama **matriz Jacobiana** en $\mathbf{X}_1$ y se denota por $\mathbf{g}'(\mathbf{X}_1)$. Si se hace que $\mathbf{H} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_1$, entonces el sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)$ se transforma en $\mathbf{H}' = \mathbf{A}\mathbf{H}$, que es la forma del sistema lineal que analizamos en la sección 10.2. El punto crítico $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1$ para $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)$ corresponde ahora al punto crítico $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ para $\mathbf{H}' = \mathbf{A}\mathbf{H}$. Si los eigenvalores de $\mathbf{A}$ tienen partes reales negativas, entonces por el teorema 10.2.1, $\mathbf{0}$ es un punto crítico asintóticamente estable para $\mathbf{H}' = \mathbf{A}\mathbf{H}$. Si hay un eigenvalor con parte real positiva, $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ es un punto crítico inestable. El teorema 10.3.2 afirma que se puede llegar a las mismas conclusiones para el punto crítico $\mathbf{X}_1$ del sistema original.

TEOREMA 10.3.2 Criterio de estabilidad para sistemas autónomos planos

Sea $\mathbf{X}_1$ un punto crítico del sistema autónomo plano $\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X})$, donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en una vecindad de $\mathbf{X}_1$.

a) Si los eigenvalores de $\mathbf{A} = \mathbf{g}'(\mathbf{X}_1)$ tienen parte real negativa, entonces $\mathbf{X}_1$ es un punto crítico asintóticamente estable.

b) Si $\mathbf{A} = \mathbf{g}'(\mathbf{X}_1)$ tiene un eigenvalor con parte real positiva, entonces $\mathbf{X}_1$ es un punto crítico inestable.

EJEMPLO 5 Análisis de estabilidad de sistemas no lineales

Clasifique (si es posible) los puntos críticos de cada uno de los siguientes sistemas autónomos planos como estable o inestable.

a) $x' = x^2 + y^2 - 6$
$y' = x^2 - y$

b) $x' = 0.01x(100 - x - y)$
$y' = 0.05y(60 - y - 0.2x)$

SOLUCIÓN Los puntos críticos de cada sistema se determinaron en el ejemplo 4 de la sección 10.1.

a) Los puntos críticos son $(\sqrt{2}, 2)$ y $(-\sqrt{2}, 2)$. La matriz Jacobiana es

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -1 \end{pmatrix},$$

y así

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{g}'((\sqrt{2}, 2)) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 4 \\ 2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{g}'((-\sqrt{2}, 2)) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 4 \\ -2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante de $\mathbf{A}_1$ es negativo, $\mathbf{A}_1$ tiene un eigenvalor real positivo. Por tanto $(\sqrt{2}, 2)$ es un punto crítico inestable. La matriz $\mathbf{A}_2$ tiene un determinante positivo y una traza negativa, por lo que ambos eigenvalores tienen partes reales negativas. Por tanto $(-\sqrt{2}, 2)$ es un punto crítico estable.

b) Los puntos críticos son (0, 0), (0, 60), (100, 0) y (50, 50), la matriz Jacobiana es

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 0.01(100 - 2x - y) & -0.01x \\ -0.01y & 0.05(60 - 2y - 0.2y) \end{pmatrix},$$

y así

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{g}'((0, 0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \mathbf{g}'((0, 60)) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ -0.6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{g}'((100, 0)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_4 = \mathbf{g}'((50, 50)) = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -2.5 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz $\mathbf{A}_1$ tiene un determinante positivo y una traza positiva, ambos eigenvalores tienen partes reales positivas. Por tanto (0, 0) es un punto crítico inestable. Los determinantes de las matrices $\mathbf{A}_2$ y $\mathbf{A}_3$ son negativos, así que en cada caso uno de los eigenvalores es positivo. Entonces, tanto (0, 60) como (100, 0) son puntos críticos inestables. Ya que la matriz $\mathbf{A}_4$ tiene un determinante positivo y una traza negativa, (50, 50) es un punto crítico estable. ■

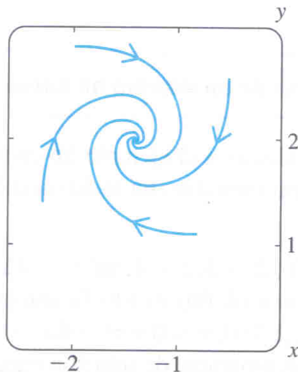


FIGURA 10.3.6 $(-\sqrt{2}, 2)$ se presenta como un punto espiral estable.

En el ejemplo 5 no calculamos $\tau^2 - 4\Delta$ (como en la sección 10.2) e intentamos clasificar los puntos críticos en nodos estables, puntos espirales estables, puntos silla, etc. Por ejemplo, para $\mathbf{X}_1 = (-\sqrt{2}, 2)$ en el ejemplo 5a, $\tau^2 - 4\Delta < 0$, y si el sistema fuera lineal, podríamos concluir que $\mathbf{X}_1$ era un punto espiral estable. La figura 10.3.6 muestra varias curvas solución cercanas a $\mathbf{X}_1$, que se obtuvieron con un programa de solución numérico y cada solución se *presenta* en espiral hacia el punto crítico.

CLASIFICACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS Es natural preguntar si se puede inferir más información geométrica acerca de las soluciones cerca de un punto crítico $\mathbf{X}_1$ de un sistema autónomo no lineal, a partir de un análisis del punto crítico del sistema real correspondiente. La respuesta se resume en la figura 10.3.7, pero debe analizar los siguientes comentarios.

i) En cinco casos separados (nodo estable, punto espiral estable, punto espiral inestable, nodo inestable y punto silla) el punto crítico se puede clasificar como el punto crítico del sistema lineal correspondiente. Las soluciones tienen las mismas propiedades geométricas generales que las soluciones del sistema lineal y mientras más pequeña sea la vecindad en torno a $\mathbf{X}_1$, el parecido es mayor.

ii) Si $\tau^2 = 4\Delta$ y $\tau > 0$, el punto crítico $\mathbf{X}_1$ es inestable, pero en este caso límite *aún no se puede decidir si* $\mathbf{X}_1$ *es una espiral inestable, un nodo inestable o un nodo inestable degenerado*. De la misma manera, si $\tau^2 = 4\Delta$

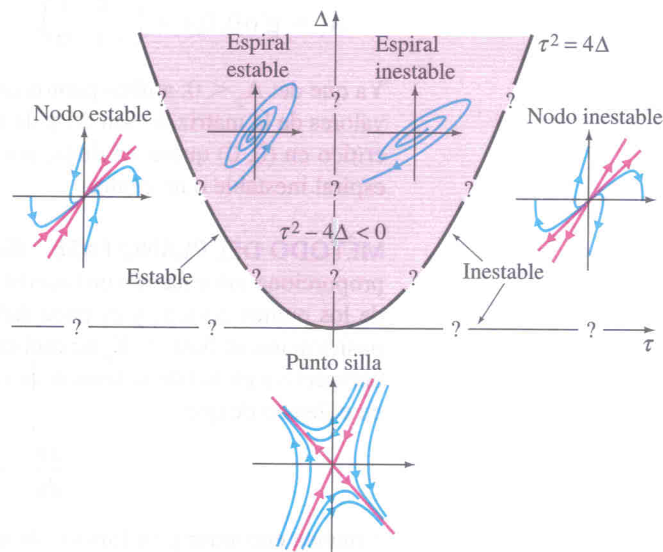


FIGURA 10.3.7 Resumen geométrico de algunas conclusiones (véase *i*)) y algunas preguntas no contestadas (véase *ii*) y *iii*)) acerca de sistemas autónomos no lineales.

y $\tau < 0$, el punto crítico $\mathbf{X}_1$ es estable pero puede ser también una espiral estable, un nodo estable o un nodo estable degenerado.

iii) Si $\tau = 0$ y $\Delta > 0$, los eigenvalores de $\mathbf{A} = \mathbf{g}'(\mathbf{X})$ son imaginarios puros y en su caso límite $\mathbf{X}_1$ puede ser una espiral estable, una espiral inestable o un centro. *Por tanto aún no es posible determinar si* $\mathbf{X}_1$ *es estable o inestable.*

EJEMPLO 6 Clasificación de puntos críticos de un sistema no lineal

Clasifique cada punto crítico del sistema autónomo plano en el ejemplo 5b como un nodo estable, un punto espiral estable, un punto espiral inestable, un nodo inestable o un punto silla.

SOLUCIÓN Para la matriz $\mathbf{A}_1$ correspondiente a $(0, 0)$, $\Delta = 3$, $\tau = 4$, así $\tau^2 - 4\Delta = 4$. Por tanto, $(0, 0)$ es un nodo inestable. Los puntos críticos $(0, 60)$ y $(100, 0)$ son puntos silla, porque en ambos casos $\Delta < 0$. Para la matriz $\mathbf{A}_4$, $\Delta > 0$, $\tau < 0$ y $\tau^2 - 4\Delta > 0$, por lo que $(50, 50)$ es un nodo estable. Experimente con un programa de solución numérica para comprobar estas conclusiones. ■

EJEMPLO 7 Análisis de estabilidad para un resorte suave

Recuerde que en la sección 5.3 vimos que la ecuación diferencial de segundo orden $mx'' + kx + k_1x^3 = 0$, para $k > 0$, representa un modelo general de las oscilaciones libres no amortiguadas, de una masa m fija a un resorte no lineal. Si $k = 1$ y $k_1 = -1$, el resorte se llama *suave* y el sistema autónomo plano que corresponde a la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $x'' + x - x^3 = 0$ es

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x^3 - x. \end{aligned}$$

Encuentre y clasifique (si es posible) los puntos críticos.

SOLUCIÓN Puesto que $x^3 - x = x(x^2 - 1)$, los puntos críticos son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Las matrices Jacobianas correspondientes son

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{g}'((0,0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \mathbf{g}'((1,0)) = \mathbf{g}'((-1,0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ya que $\det \mathbf{A}_2 < 0$, ambos puntos críticos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ son puntos silla. Los eigenvalores de la matriz $\mathbf{A}_1$ son $\pm i$ y de acuerdo con el comentario *iii*), el estado del punto crítico en $(0, 0)$ queda en duda, por lo que puede tratarse de una espiral estable, una espiral inestable o un centro. ■

MÉTODO DEL PLANO FASE El método de linealización, cuando se puede aplicar, proporciona información útil acerca del comportamiento local de las soluciones cerca de los puntos críticos y es poco útil cuando estamos interesados en soluciones cuya posición inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ no está cerca de un punto crítico o si deseamos obtener una perspectiva global de la familia de curvas solución. El **método del plano fase** se basa en el hecho de que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

e intenta encontrar y en función de x con uno de los métodos disponibles para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden (capítulo 2). Como se mostró en los ejemplos 8 y 9, este método en ocasiones se puede emplear para decidir si un punto crítico, tal como $(0, 0)$ en el ejemplo 7, es una espiral estable, una espiral inestable o un centro.

EJEMPLO 8 Método del plano fase

Use el método del plano fase para clasificar el único punto crítico (0, 0) del sistema autónomo plano

$$x' = y^2$$
$$y' = x^2.$$

SOLUCIÓN El determinante de la matriz Jacobiana

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

es 0 en (0, 0), por lo que la naturaleza del punto crítico (0, 0) queda en duda. Al aplicar el método del plano fase se obtiene la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{x^2}{y^2},$$

que se puede resolver con facilidad por separación de variables:

$$\int y^2\,dy = \int x^2\,dx \qquad \text{o} \qquad y^3 = x^3 + c.$$

Si $\mathbf{X}(0) = (0, y_0)$, se tiene que $y^3 = x^3 + y_0^3$ o $y = \sqrt[3]{x^3 + y_0^3}$. La figura 10.3.8 muestra un conjunto de curvas solución que corresponden a diversas elecciones de y_0. La naturaleza del punto crítico queda claro con este plano fase independientemente de lo cerca de (0, 0) que inicie la solución, $\mathbf{X}(t)$ se aleja del origen conforme t aumenta. Por tanto el punto crítico en (0, 0) es inestable. ■

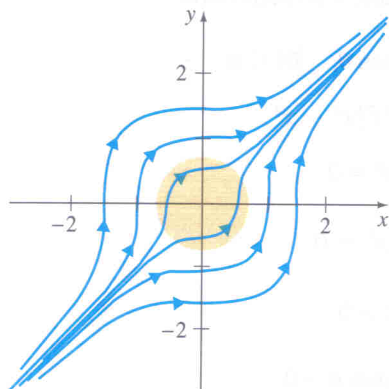


FIGURA 10.3.8 Plano fase del sistema no lineal del ejemplo 8.

EJEMPLO 9 Análisis del plano fase de un resorte suave

Utilice el método del plano fase para determinar la naturaleza de las soluciones de $x'' + x - x^3 = 0$ en una vecindad de (0, 0).

SOLUCIÓN Si hacemos que $dx/dt = y$, entonces $dy/dt = x^3 - x$. A partir de esto se obtiene la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{x^3 - x}{y},$$

que se puede resolver por separación de variables. Integrando

$$\int y\,dy = \int (x^3 - x)\,dx \quad \text{se obtiene} \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + c.$$

Después de completar el cuadrado, podemos escribir la solución como $y^2 = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^2 + c_0$. Si $\mathbf{X}(0) = (x_0, 0)$, donde $0 < x_0 < 1$, entonces $c_0 = -\frac{1}{2}(x_0^2 - 1)^2$, y así

$$y^2 = \frac{(x^2-1)^2}{2} - \frac{(x_0^2-1)^2}{2} = \frac{(2 - x^2 - x_0^2)(x_0^2 - x^2)}{2}.$$

Observe que $y = 0$ cuando $x = -x_0$. Además, el lado derecho es positivo cuando $-x_0 < x < x_0$, por lo que cada x tiene *dos* valores correspondientes de y. La solución $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ que satisface $\mathbf{X}(0) = (x_0, 0)$ es, por tanto, periódica, así que (0, 0) es un centro.

La figura 10.3.9 muestra una familia de curvas solución o plano fase, del sistema original. Usamos el sistema autónomo plano original para determinar las direcciones indicadas en cada trayectoria. ■

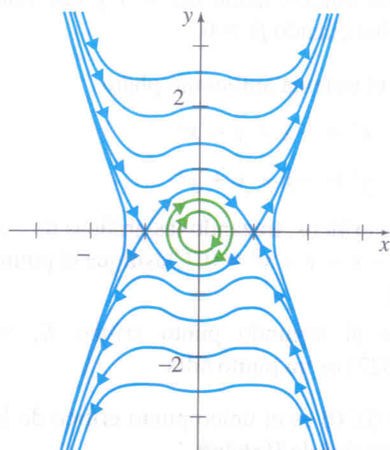


FIGURA 10.3.9 Plano fase del sistema no lineal del ejemplo 9.

EJERCICIOS 10.3

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-17.

1. Demuestre que (0, 0) es un punto crítico asintóticamente estable del sistema autónomo no lineal

$$x' = \alpha x - \beta y + y^2$$
$$y' = \beta x + \alpha y - xy$$

cuando $\alpha < 0$ y un punto crítico inestable cuando $\alpha > 0$. [*Sugerencia*: Cambie a coordenadas polares].

2. Cuando se expresa en coordenadas polares, un sistema autónomo plano tiene la forma

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r(5 - r)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = -1.$$

Demuestre que (0, 0) es un punto crítico asintóticamente estable si y sólo si $\alpha < 0$.

En los problemas 3 a 10, sin resolverlos explícitamente, clasifique los puntos críticos de las ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden en asintóticamente estables o inestables. Se supone que todas las constantes son positivas.

3. $\dfrac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x)$

4. $\dfrac{dx}{dt} = -kx \ln \dfrac{x}{K}, \quad x > 0$

5. $\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_0)$

6. $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$

7. $\dfrac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x), \quad \alpha > \beta$

8. $\dfrac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x)(\gamma - x), \quad \alpha > \beta > \gamma$

9. $\dfrac{dP}{dt} = P(a - bP)(1 - cP^{-1}), \quad P > 0, a < bc$

10. $\dfrac{dA}{dt} = k\sqrt{A}\,(K - \sqrt{A}), \quad A > 0$

En los problemas 11 a 20 clasifique (si es posible) cada punto crítico del sistema autónomo plano dado, como un nodo estable, un punto espiral estable, un punto espiral inestable, un nodo inestable o un punto silla.

11. $x' = 1 - 2xy$, $y' = 2xy - y$

12. $x' = x^2 - y^2 - 1$, $y' = 2y$

13. $x' = y - x^2 + 2$, $y' = x^2 - xy$

14. $x' = 2x - y^2$, $y' = -y + xy$

15. $x' = -3x + y^2 + 2$, $y' = x^2 - y^2$

16. $x' = xy - 3y - 4$, $y' = y^2 - x^2$

17. $x' = -2xy$, $y' = y - x + xy - y^3$

18. $x' = x(1 - x^2 - 3y^2)$, $y' = y(3 - x^2 - 3y^2)$

19. $x' = x\left(10 - x - \frac{1}{2}y\right)$, $y' = y(16 - y - x)$

20. $x' = -2x + y + 10$, $y' = 2x - y - 15\dfrac{y}{y + 5}$

En los problemas 21 a 26 clasifique (si es posible) cada punto crítico de la ecuación diferencial de segundo orden dada como un nodo estable, un punto espiral estable, un punto espiral inestable, un nodo inestable o un punto silla.

21. $\theta'' = (\cos\theta - 0.5)\,\text{sen}\,\theta, \quad |\theta| < \pi$

22. $x'' + x = \left(\frac{1}{2} - 3(x')^2\right)x' - x^2$

23. $x'' + x'(1 - x^3) - x^2 = 0$

24. $x'' + 4\dfrac{x}{1 + x^2} + 2x' = 0$

25. $x'' + x = \epsilon x^3$ para $\epsilon > 0$

26. $x'' + x - \epsilon x|x| = 0$ para $\epsilon > 0$

$\left[\textit{Sugerencia: } \dfrac{d}{dx}x\,|x| = 2|x|.\right]$

27. Demuestre que la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$(1 + \alpha^2x^2)x'' + (\beta + \alpha^2(x')^2)x = 0$$

tiene un punto silla en (0, 0) cuando $\beta < 0$.

28. Demuestre que el sistema dinámico

$$x' = -\alpha x + xy$$
$$y' = 1 - \beta y - x^2$$

tiene un punto crítico único cuando $\alpha\beta > 1$ y que este punto crítico es estable cuando $\beta > 0$.

29. a) Demuestre que el sistema autónomo plano

$$x' = -x + y - x^3$$
$$y' = -x - y + y^2$$

tiene dos puntos críticos, trazando las gráficas de $-x + y - x^3 = 0$ y $-x - y + y^2 = 0$. Clasifique el punto crítico en (0, 0).

b) Demuestre que el segundo punto crítico $\mathbf{X}_1 = (0.88054, 1.56327)$ es un punto silla.

30. a) Demuestre que (0, 0) es el único punto crítico de la **ecuación diferencial de Raleigh**

$$x'' + \epsilon\left(\tfrac{1}{3}(x')^3 - x'\right) + x = 0.$$

b) Demuestre que (0, 0) es inestable cuando $\epsilon > 0$. ¿Cuándo es (0, 0) un punto espiral inestable?

c) Demuestre que (0, 0) es estable cuando $\epsilon < 0$. ¿Cuándo es (0, 0) un punto espiral estable?

d) Demuestre que (0, 0) es un centro cuando $\epsilon = 0$.

31. Use el método del plano fase para mostrar que (0, 0) es un centro de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $x'' + 2x^3 = 0$.

32. Utilice el método del plano fase para demostrar que la solución de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $x'' + 2x - x^2 = 0$, que satisface $x(0) = 1$ y $x'(0)$, $= 0$ es periódica.

33. a) Determine los puntos críticos del sistema autónomo plano

$$x' = 2xy$$
$$y' = 1 - x^2 + y^2,$$

y demuestre que la linealización no aporta información acerca de la naturaleza de estos puntos críticos.

b) Use el método del plano fase para demostrar que ambos puntos críticos en a) son centros. [*Sugerencia*: Sea $u = y^2/x$ y demuestre que $(x - c)^2 + y^2 = c^2 - 1$.]

34. El origen es el único punto crítico de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $x'' + (x')^2 + x = 0$.

a) Demuestre que el método del plano fase conduce a la ecuación diferencial de Bernoulli $dy/dx = -y - xy^{-1}$.

b) Demuestre que la solución que satisface $x(0) = \frac{1}{2}$ y $x'(0) = 0$ no es periódica.

35. Una solución de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $x'' + x - x^3 = 0$ satisface $x(0) = 0$ y $x'(0) = v_0$. Aplique el método del plano fase para determinar cuándo la solución resultante es periódica. [*Sugerencia*: Véase el ejemplo 9.]

36. La ecuación diferencial no lineal $x'' + x = 1 + \epsilon x^2$ surge en el análisis del movimiento planetario usando teoría de la relatividad. Clasifique (si es posible) los puntos críticos del sistema plano autónomo correspondiente.

37. Cuando en un circuito *RCL* hay un capacitor no lineal, la caída de voltaje ya no se expresa con q/C sino que se describe con más exactitud con $\alpha q + \beta q^3$, donde α y β son constantes y $\alpha > 0$. Entonces, la ecuación diferencial (34) de la sección 5.1 del circuito libre se reemplaza por

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \alpha q + \beta q^3 = 0.$$

Encuentre y clasifique todos los puntos críticos de esta ecuación diferencial no lineal. [*Sugerencia*: Divida en dos casos: cuando $\beta > 0$ y cuando $\beta < 0$.]

38. La ecuación no lineal $mx'' + kx + k_1x^3 = 0$ para $k > 0$ representa un modelo general de las oscilaciones libres no amortiguadas, de una masa *m* fija a un resorte. Si $k_1 > 0$, el resorte se llama *duro* (véase el ejemplo 1 de la sección 5.3). Determine la naturaleza de las soluciones de $x'' + x + x^3 = 0$ en una vecindad de (0, 0).

39. La ecuación no lineal $\theta'' + \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$ se puede interpretar como modelo para cierto péndulo bajo la acción de una función de fuerza aplicada constante.

a) Demuestre que $(\pi/6, 0)$ y $(5\pi/6, 0)$ son puntos críticos del sistema autónomo plano correspondiente.

b) Clasifique el punto crítico $(5\pi/6, 0)$ usando linealización.

c) Use el método del plano fase para clasificar el punto crítico $(\pi/6, 0)$.

Problemas para analizar

40. a) Demuestre que (0, 0) es un punto crítico aislado del sistema autónomo plano

$$x' = x^4 - 2xy^3$$
$$y' = 2x^3y - y^4$$

pero que con la linealización no se obtiene información útil acerca de la naturaleza de este punto crítico.

b) Utilice el método del plano fase para demostrar que $x^3 + y^3 = 3cxy$. A esta curva clásica se le llama **hoja de Descartes**. Las ecuaciones paramétricas de una de estas hojas son

$$x = \frac{3ct}{1 + t^3}, \qquad y = \frac{3ct^2}{1 + t^3}.$$

[*Sugerencia*: La ecuación diferencial en *x* y *y* es homogénea.]

c) Con un programa para graficar o un programa de solución numérica, trace las curvas solución. Con base en sus gráficas, ¿clasificaría el punto crítico como estable o como inestable? ¿Clasificaría el punto crítico como nodo, punto silla, centro o punto espiral? Explique por qué.

10.4 SISTEMAS AUTÓNOMOS COMO MODELOS MATEMÁTICOS

REPASO DE MATERIAL

- Secciones 1.3, 3.3 y 10.3.

INTRODUCCIÓN En muchas aplicaciones de la física surgen ecuaciones diferenciales autónomas no lineales de segundo orden, es decir ED de la forma $x'' = g(x, x')$. Por ejemplo, en el análisis del movimiento libre amortiguado, en la sección 5.1, supusimos que la fuerza de amortiguamiento era proporcional a la velocidad x' y el modelo resultante fue $mx'' = -\beta x' - kx$ que es una ecuación diferencial lineal. Pero si la magnitud de la fuerza de amortiguamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad, la nueva ecuación diferencial $mx'' = -\beta x'|x'| - kx$ es no lineal. El sistema autónomo plano correspondiente es no lineal:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{\beta}{m}y|y| - \frac{k}{m}x. \end{aligned}$$

En esta sección también analizaremos el péndulo no lineal, el movimiento de una cuenta sobre una curva, los modelos depredador-presa de Lotka-Volterra y el modelo de competencia de Lotka-Volterra. En los ejercicios se presentan otros modelos.

PÉNDULO NO LINEAL En la ecuación (6) de la sección 5.3 demostramos que el ángulo θ de desplazamiento de un péndulo simple satisface la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0.$$

Cuando hacemos $x = \theta$ y $y = \theta'$, esta ecuación diferencial de segundo orden se puede expresar como el sistema dinámico

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{g}{l}\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

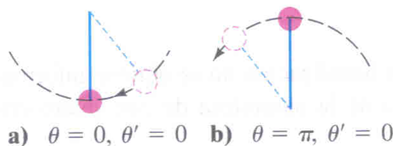


FIGURA 10.4.1 (0, 0) es estable y (π, 0) es inestable.

Los puntos críticos son $(\pm k\pi, 0)$ y se demuestra con facilidad que la matriz Jacobiana es

$$\mathbf{g}'((\pm k\pi, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1}\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $k = 2n + 1$, entonces $\Delta < 0$, por lo que todos los puntos críticos $(\pm(2n + 1)\pi, 0)$ son puntos silla. En particular, el punto crítico en $(\pi, 0)$ es inestable, como era de esperarse. Véase la figura 10.4.1. Cuando $k = 2\pi$, los eigenvalores son imaginarios puros y así la naturaleza de esos puntos críticos queda en duda. Dado que hemos supuesto que no hay fuerzas de amortiguamiento que actúen sobre el péndulo, esperamos que todos los puntos críticos $(\pm 2n\pi, 0)$ sean centros. Esto se puede comprobar utilizando el método del plano fase. De

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{g}{l}\frac{\operatorname{sen} x}{y}$$

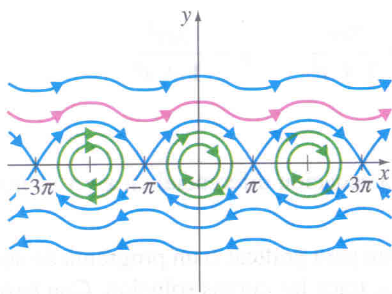


FIGURA 10.4.2 Plano fase de un péndulo; las curvas onduladas indican que el péndulo está girando respecto a su pivote.

se tiene que $y^2 = (2g/l)\cos x + c$. Si $\mathbf{X}(0) = (x_0, 0)$, entonces $y^2 = (2g/l)(\cos x - \cos x_0)$. Observe que $y = 0$ cuando $x = -x_0$ y que $(2g/l)(\cos x - \cos x_0) > 0$ para $|x| < |x_0| < \pi$. Así, cada x tiene dos valores correspondientes de y, por lo que la solución $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ que satisface $\mathbf{X}(0) = (x_0, 0)$ es periódica. Podemos concluir que (0, 0) es un centro. Observe que $x = \theta$ aumenta para soluciones que corresponden a velocidades iniciales grandes, como la dibujada en rojo en la figura 10.4.2. En este caso, el péndulo da vuelta o gira en circunferencias completas alrededor de su pivote.

EJEMPLO 1 Soluciones periódicas de la ED del péndulo

A un péndulo en una posición de equilibrio con $\theta = 0$ se le proporciona una velocidad angular inicial de ω_0 rad/s. Determine bajo qué condiciones es periódico el movimiento resultante.

SOLUCIÓN Se nos pide examinar la solución del sistema autónomo plano que satisface $\mathbf{X}(0) = (0, \omega_0)$. A partir de $y^2 = (2g/l)\cos x + c$ se tiene que

$$y^2 = \frac{2g}{l}\left(\cos x - 1 + \frac{l}{2g}\omega_0^2\right).$$

Para establecer si la solución $\mathbf{X}(t)$ es periódica, basta demostrar que hay dos intersecciones con el eje x, $x = \pm x_0$ entre $-\pi$ y π y que el miembro de la derecha es positivo para $|x| < |x_0|$. Cada x tiene dos valores correspondientes de y.

Si $y = 0$, $\cos x = 1 - (l/2g)\omega_0^2$, y esta ecuación tiene dos soluciones $x = \pm x_0$ entre $-\pi$ y π, suponiendo que $1 - (l\ 2g)\omega_0^2 > -1$. Observe que $(2g/l)(\cos x - \cos x_0)$ es entonces positivo para $|x| < |x_0|$. Esta restricción de la velocidad angular se puede escribir como $|\omega_0| < 2\sqrt{g/l}$. ■

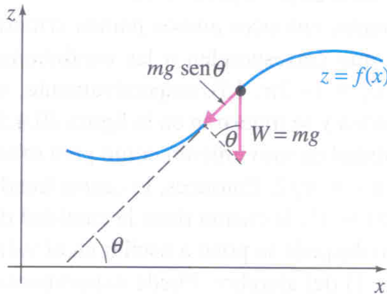


FIGURA 10.4.3 Algunas de las fuerzas que actúan sobre la cuenta deslizante.

OSCILACIONES NO LINEALES: LA CUENTA DESLIZANTE Supongamos que, como se muestra en la figura 10.4.3, una cuenta de masa m se desliza a lo largo de un alambre delgado, cuya forma se describe por la función $z = f(x)$. Cambiando la forma del alambre y haciendo diferentes hipótesis acerca de las fuerzas que actúan sobre la cuenta se puede obtener gran variedad de oscilaciones no lineales.

La fuerza tangencial $\mathbf{F}$ debida al peso $W = mg$ tiene la magnitud mg sen θ y por tanto la componente de $\mathbf{F}$ en el eje x es $F_x = -mg$ sen $\theta \cos\theta$. Puesto que $\tan\theta = f'(x)$, se pueden usar las identidades $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ y $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ para concluir que

$$F_x = -mg\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = -mg\frac{f'(x)}{1 + [f'(x)]^2}.$$

Suponemos (como en la sección 5.1) que una fuerza de amortiguamiento $\mathbf{D}$, que actúa en dirección opuesta al movimiento, es un múltiplo constante de la velocidad de la cuenta. La componente x de $\mathbf{D}$ es, por tanto, $D_x = -\beta x'$. Si se desprecia la fuerza de fricción entre el alambre y la cuenta y se supone que no hay otras fuerzas externas que actúen sobre el sistema, entonces de la segunda ley de Newton se tiene que

$$mx'' = -mg\frac{f'(x)}{1 + [f'(x)]^2} - \beta x',$$

y el correspondiente sistema autónomo plano es

$$x' = y$$

$$y' = -g\frac{f'(x)}{1 + [f'(x)]^2} - \frac{\beta}{m}y.$$

Si $\mathbf{X}_1 = (x_1, y_1)$ es un punto crítico del sistema, $y_1 = 0$ y, por tanto, $f'(x_1) = 0$. En consecuencia la cuenta debe estar en reposo en un punto del alambre donde la recta tangente es horizontal. Cuando f es dos veces derivable, la matriz Jacobiana de $\mathbf{X}_1$ es

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -gf''(x_1) & -\beta/m \end{pmatrix},$$

por lo que $\tau = -\beta/m$, $\Delta = gf''(x_1)$ y $\tau^2 - 4\Delta = \beta^2/m^2 - 4gf''(x_1)$. Utilizando los resultados de la sección 10.3, podemos hacer las siguientes conclusiones:

i) $f''(x_1) < 0$:
Por tanto, se presenta un máximo relativo en $x = x_1$ y puesto que $\Delta < 0$, hay un *punto silla inestable* en $\mathbf{X}_1 = (x_1, 0)$.

ii) $f''(x_1) > 0$ y $\beta > 0$:
Por tanto, hay un mínimo relativo en $x = x_1$ y puesto que $\tau < 0$ y $\Delta > 0$, $\mathbf{X}_1 = (x_1, 0)$ es un *punto crítico estable*. Si $\beta^2 > 4gm^2f''(x_1)$, el sistema está **sobreamortiguado** y el punto crítico es un *nodo estable*. Si $\beta^2 < 4gm^2f''(x_1)$ el sistema está **subamortiguado** y el punto crítico es un *punto espiral estable*. Si $\beta^2 = 4gm^2f''(x_1)$ queda aún en duda la naturaleza exacta del punto crítico estable.

iii) $f''(x_1) > 0$ y el sistema es no amortiguado ($\beta = 0$):
En este caso, los eigenvalores son imaginarios puros, pero se puede usar el método del plano fase para demostrar que el punto crítico es un *centro*. Por tanto, las soluciones con $\mathbf{X}(0) = (x(0), x'(0))$ cerca de $\mathbf{X}_1 = (x_1, 0)$ son periódicas.

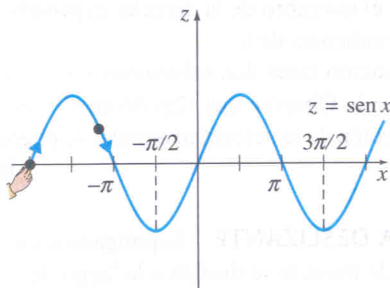


FIGURA 10.4.4 $-\pi/2$ y $3\pi/2$ son estables.

EJEMPLO 2 Cuenta deslizante a lo largo de una onda senoidal

Una cuenta de 10 gramos resbala por la gráfica de $z = \text{sen}\,x$. De acuerdo con la conclusión *ii)*, los mínimos relativos en $x_1 = -\pi/2$ y $3\pi/2$ dan lugar a puntos críticos estables (véase la figura 10.4.4). Puesto que $f''(-\pi/2) = f''(3\pi/2) = 1$, el sistema estará subamortiguado cuando $\beta^2 < 4gm^2$. Si se usan unidades del SI, $m = 0.01$ kg y $g = 9.8$ m/s^2, entonces la condición para un sistema subamortiguado se convierte en $\beta^2 < 3.92 \times 10^{-3}$.

Si $\beta = 0.01$ es la constante de amortiguamiento, entonces ambos puntos críticos son puntos espiral estables. Las dos soluciones que corresponden a las condiciones iniciales $\mathbf{X}(0) = (x(0), x'(0)) = (-2\pi, 10)$ y $\mathbf{X}(0) = (-2\pi, 15)$, respectivamente, se obtuvieron usando un programa de solución numérica y se muestran en la figura 10.4.5. Cuando $x'(0) = 10$, la cuenta tiene suficiente cantidad de movimiento como para rebasar la colina en $x = -3\pi/2$, pero no la que está en $x = \pi/2$. Entonces, la cuenta tiende al mínimo relativo que está en $x = -\pi/2$. Si $x'(0) = 15$, la cuenta tiene la cantidad de movimiento para pasar sobre las dos colinas, pero después se pone a oscilar en el valle que está en $x = 3\pi/2$ y tiende al punto $(3\pi/2, -1)$ del alambre. Puede experimentar con otras condiciones iniciales usando su propio programa de solución numérica.

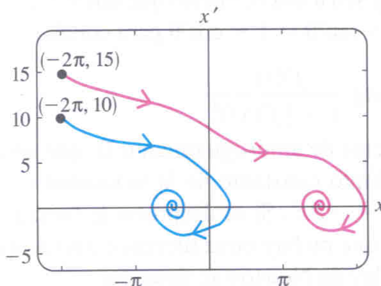


FIGURA 10.4.5 $\beta = 0.01$.

La figura 10.4.6 muestra un conjunto de curvas solución obtenidas con un programa de solución numérica para el caso no amortiguado. Puesto que $\beta = 0$, los puntos críticos que corresponden a $x_1 = -\pi/2$ y $3\pi/2$ son ahora centros. Cuando $\mathbf{X}(0) = (-2\pi, 10)$, la cuenta tiene la cantidad suficiente de movimiento para pasar sobre *todas* las colinas. En la figura también se indica que cuando se suelta la cuenta y parte del reposo en una posición del alambre entre $x = -3\pi/2$ y $x = \pi/2$, el movimiento resultante es periódico. ■

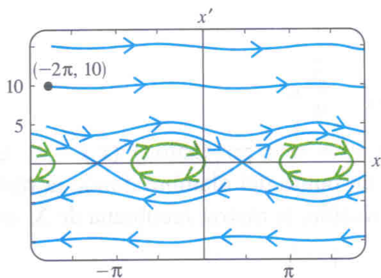


FIGURA 10.4.6 $\beta = 0$.

MODELO DEPREDADOR-PRESA DE LOTKA-VOLTERRA Una interacción depredador-presa entre dos especies ocurre cuando una de ellas (el depredador) se alimenta de la segunda (la presa). Por ejemplo, el búho de las nieves que se alimenta casi exclusivamente de un roedor común en el Ártico, llamado lemming, mientras que el lemming usa las plantas de la tundra del Ártico como su alimento. El interés en utilizar las matemáticas para ayudar a explicar la interacción depredador-presa es motivado por la observación de ciclos de población en muchos mamíferos del Ártico. Por ejemplo, en el distrito del Río MacKenzie, en Canadá, la presa principal del lince es la liebre de las nieves y ambas poblaciones tienen ciclos con un periodo aproximado de 10 años.

Hay muchos modelos depredador-presa que conducen a sistemas autónomos planos, con al menos una solución periódica. El primero de ellos fue elaborado en forma independiente por los biomatemáticos precursores A. Lotka (1925) y V. Volterra (1926). Si x denota la cantidad de depredadores y y la cantidad de presas, el modelo de Lotka-Volterra toma la forma

$$x' = -ax + bxy = x(-a + by)$$
$$y' = -cxy + dy = y(-cx + d),$$

donde a, b, c y d son constantes positivas.

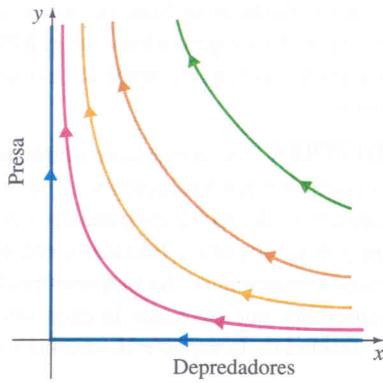


FIGURA 10.4.7 Soluciones cerca de (0, 0).

Observe que en ausencia de depredadores ($x = 0$), $y' = dy$, por lo que la cantidad de presas crece en forma exponencial. En ausencia de presas, $x' = -ax$ y por tanto la población de depredadores se extingue. El término $-cxy$ representa la razón de mortandad debida a la depredación. Entonces el modelo supone que esta razón de mortandad es directamente proporcional a la cantidad posible de encuentros xy entre depredador y presa a un tiempo t dado y el término bxy representa la contribución positiva resultante de la población de depredadores.

Los puntos críticos de este sistema autónomo plano son (0, 0) y $(d/c, a/b)$ y las matrices Jacobianas correspondientes son

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{g}'((0,0)) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{g}'((d/c, a/b)) = \begin{pmatrix} 0 & bd/c \\ -ac/b & 0 \end{pmatrix}.$$

El punto crítico (0, 0) es un punto silla y la figura 10.4.7 muestra un perfil típico de soluciones que están en el primer cuadrante y cerca de (0, 0).

Debido a que la matriz $\mathbf{A}_2$ tiene eigenvalores imaginarios puros $\lambda = \pm\sqrt{ad}\,i$, el punto crítico $(d/c, a/b)$ *podría* ser un centro. Esta posibilidad se puede investigar con el método del plano fase. Puesto que

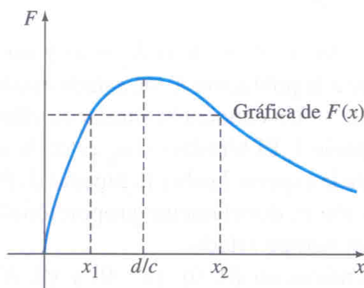
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-cx + d)}{x(-a + by)},$$

separando las variables obtenemos

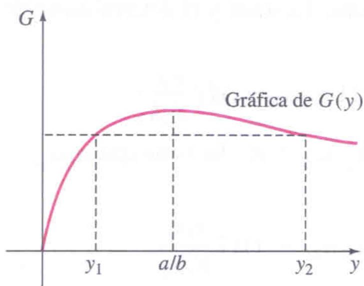
$$\int \frac{-a + by}{y}\,dy = \int \frac{-cx + d}{x}\,dx$$

$$-a\ln y + by = -cx + d\ln x + c_1 \qquad \text{o} \qquad (x^d e^{-cx})(y^a e^{-by}) = c_0.$$

El siguiente argumento establece que todas las curvas solución que se originan en el primer cuadrante son periódicas.



a) Máximo de F en $x = d/c$



b) Máximo de G en $y = a/b$

FIGURA 10.4.8 Las gráficas de F y G ayudan a establecer las propiedades (1)-(3).

En la figura 10.4.8 se presentan las gráficas características de las funciones no negativas $F(x) = x^d e^{-cx}$ y $G(y) = y^a e^{-by}$. No es difícil demostrar que $F(x)$ tiene un máximo absoluto en $x = d/c$, mientras que $G(y)$ tiene un máximo absoluto en $y = a/b$. Observe que, a excepción de 0 y del máximo absoluto, F y G toman todos los valores de su imagen exactamente dos veces.

Con estas gráficas se pueden establecer las siguientes propiedades de una curva solución que se origine en un punto no crítico (x_0, y_0) en el primer cuadrante.

i) Si $y = a/b$, la ecuación $F(x)G(y) = c_0$ tiene exactamente dos soluciones, x_m y x_M, que satisfacen que $x_m < d/c < x_M$.

ii) Si $x_m < x_1 < x_M$ y $x = x_1$, entonces $F(x)G(y) = c_0$ tiene exactamente dos soluciones, y_1 y y_2, que satisfacen que $y_1 < a/b < y_2$.

iii) Si x está fuera del intervalo $[x_m, x_M]$, entonces $F(x)G(y) = c_0$ no tiene soluciones.

Ahora presentaremos la demostración de *i*) y en los ejercicios esbozaremos los incisos *ii*) y *iii*). Puesto que $(x_0, y_0) \neq (d/c, a/b)$, $F(x_0)G(y_0) < F(d/c)G(a/b)$. Si $y = a/b$, entonces

$$0 < \frac{c_0}{G(a/b)} = \frac{F(x_0)G(y_0)}{G(a/b)} < \frac{F(d/c)G(a/b)}{G(a/b)} = F(d/c).$$

Por tanto, $F(x) = c_0/G(a/b)$ tiene exactamente dos soluciones, x_m y x_M que satisfacen que $x_m < d/c < x_M$. En la figura 10.4.9 se muestra la gráfica de una solución periódica típica.

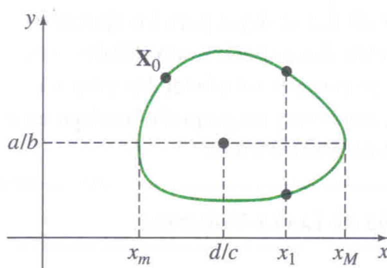


FIGURA 10.4.9 Solución periódica del modelo de Lotka-Volterra.

EJEMPLO 3 Ciclos de población depredador-presa

Si hacemos $a = 0.1$, $b = 0.002$, $c = 0.0025$ y $d = 0.2$ en el modelo depredador-presa de Lotka-Volterra, el punto crítico en el primer cuadrante es $(d/c, a/b) = (80, 50)$ y sabemos que este punto crítico es un centro. Véase la figura 10.4.10, en la que hemos usado un programa de solución numérica para generar estos ciclos. Mientras más cerca

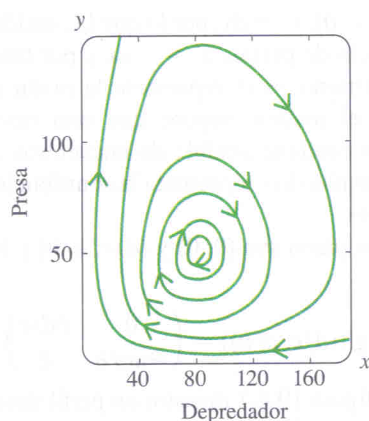


FIGURA 10.4.10 Plano fase del modelo de Lotka-Volterra cerca del punto crítico (80, 50).

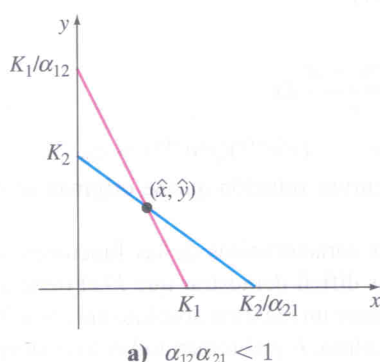
está la condición inicial $\mathbf{X}_0$ a (80, 50), las soluciones periódicas se parecen más a las soluciones elípticas del sistema lineal correspondiente. Los eigenvalores de $\mathbf{g}'((80, 50))$ son $\lambda = \pm\sqrt{ad}\, i = \pm\sqrt{2}/10\, i$, así las soluciones cerca del punto crítico tienen periodo $p \approx 10\sqrt{2}\pi$, o aproximadamente 44.4. ■

MODELO DE COMPETENCIA DE LOTKA-VOLTERRA

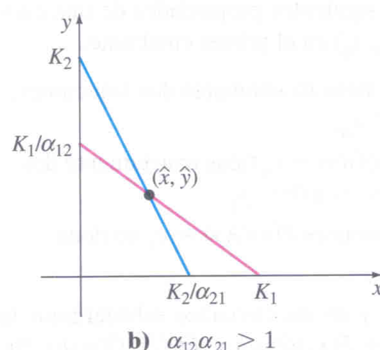
Se presenta una **interacción de competencia** cuando dos o más especies compiten por los recursos alimenticios, agua, luz y espacio de un ecosistema. Por tanto el uso de uno de esos recursos por parte de una población inhibe la capacidad de otra población para sobrevivir y crecer. ¿Bajo qué condiciones pueden existir dos especies en competencia? Se han construido varios modelos matemáticos que evalúan las condiciones que permiten la coexistencia. Si x denota la cantidad de la especie I y y la cantidad de la especie II, entonces el modelo de Lotka-Volterra toma la forma

$$\begin{aligned} x' &= \frac{r_1}{K_1}x(K_1 - x - \alpha_{12}y) \\ y' &= \frac{r_2}{K_2}y(K_2 - y - \alpha_{21}x). \end{aligned} \tag{1}$$

Observe que en ausencia de la especie II ($y = 0$), $x' = (r_1/K_1)x(K_1 - x)$ y así la primera población crece en forma logística y tiende a la población K_1 de estado estable (véase la sección 3.3 y el ejemplo 4 de la sección 10.3). Un enunciado similar es válido para la especie II creciendo en ausencia de la especie I. El término $-\alpha_{21}xy$ en la segunda ecuación se debe al efecto de competencia de la especie I sobre la especie II. Por lo que el modelo supone que esta razón de inhibición es directamente proporcional a la cantidad de pares competitivos posibles xy en un tiempo t dado.



a) $\alpha_{12}\alpha_{21} < 1$



b) $\alpha_{12}\alpha_{21} > 1$

FIGURA 10.4.11 Dos condiciones cuando el punto crítico $(\hat{x}, \hat{y})$ está en el primer cuadrante.

Este sistema autónomo plano tiene puntos críticos en (0, 0), $(K_1, 0)$ y $(0, K_2)$. Cuando $\alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0$, las rectas $K_1 - x - \alpha_{12}y = 0$ y $K_2 - y - \alpha_{21}x = 0$ se intersecan para producir un cuarto punto crítico $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}, \hat{y})$. La figura 10.4.11 muestra las dos condiciones bajo las que $(\hat{x}, \hat{y})$ está en el primer cuadrante. La traza y el determinante de la matriz Jacobiana en $(\hat{x}, \hat{y})$ son, respectivamente,

$$\tau = -\hat{x}\frac{r_1}{K_1} - \hat{y}\frac{r_2}{K_2} \quad \text{y} \quad \Delta = (1 - \alpha_{12}\alpha_{21})\hat{x}\hat{y}\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2}.$$

En el caso a) de la figura 10.4.11, $K_1/\alpha_{12} > K_2$ y $K_2/\alpha_{21} > K_1$. Se tiene que $\alpha_{12}\alpha_{21} < 1$, $\tau < 0$ y $\Delta > 0$. Ya que

$$\begin{aligned} \tau^2 - 4\Delta &= \left(\hat{x}\frac{r_1}{K_1} + \hat{y}\frac{r_2}{K_2}\right)^2 + 4(\alpha_{12}\alpha_{21} - 1)\hat{x}\hat{y}\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} \\ &= \left(\hat{x}\frac{r_1}{K_1} - \hat{y}\frac{r_2}{K_2}\right)^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21}\hat{x}\hat{y}\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2}, \end{aligned}$$

$\tau^2 - 4\Delta > 0$, por lo que $(\hat{x}, \hat{y})$ es un nodo estable. Entonces, si $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ está suficientemente cerca de $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}, \hat{y})$, $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \hat{\mathbf{X}}$, se puede concluir que es posible la coexistencia. La demostración del inciso b) conduce a un punto silla y la investigación de la naturaleza de los puntos críticos en (0, 0), $(K_1, 0)$ y $(0, K_2)$ se dejan para los ejercicios.

Cuando las interacciones de competencia entre dos especies son débiles, ambos coeficientes α_{12} y α_{21} son pequeños y entonces se pueden satisfacer las condiciones $K_1/\alpha_{12} > K_2$ y $K_2/\alpha_{21} > K_1$. Esto puede suceder cuando hay un pequeño traslape en los rangos de dos especies depredadoras que cazan una presa común.

EJEMPLO 4 Un modelo de competencia de Lotka-Volterra

Una interacción de competencia se describe con el modelo de competencia de Lotka–Volterra

$$\begin{aligned} x' &= 0.004x(50 - x - 0.75y) \\ y' &= 0.001y(100 - y - 3.0x) \end{aligned}$$

Clasifique todos los puntos críticos del sistema.

SOLUCIÓN Debe comprobar que los puntos críticos están en (0, 0), (50, 0), (0, 100) y en (20, 40). Puesto que $\alpha_{12}\alpha_{21} = 2.25 > 1$, se tiene el inciso b) de la figura 10.4.11, por lo que el punto crítico en (20, 40) es un punto silla. La matriz Jacobiana es

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 0.2 - 0.008x - 0.003y & -0.003x \\ -0.003y & 0.1 - 0.002y - 0.003x \end{pmatrix},$$

y obtenemos

$$\mathbf{g}'((0,0)) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}'((50,0)) = \begin{pmatrix} -0.2 & -0.15 \\ 0 & -0.05 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}'((0,100)) = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.3 & -0.1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto (0, 0) es un nodo inestable, mientras que tanto (50, 0) como (0, 100) son nodos estables. (¡Compruébelo!) ■

En el modelo de competencia de Lotka-Volterra también puede haber coexistencia si hay cuando menos una solución periódica que esté enteramente en el primer cuadrante. Sin embargo, se puede demostrar que este modelo no tiene soluciones periódicas.

EJERCICIOS 10.4

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-17.

Péndulo no lineal

1. Un péndulo se suelta en $\theta = \pi/3$ y se le da una velocidad angular inicial de ω_0 rad/s. Determine bajo qué condiciones el movimiento resultante es periódico.

2. **a)** Si se suelta un péndulo desde el reposo en $\theta = \theta_0$, demuestre que la velocidad angular es nuevamente 0 cuando $\theta = -\theta_0$.

b) El periodo T del péndulo es el tiempo necesario para que θ cambie de θ_0 a $-\theta_0$ y regrese a θ_0. Demuestre que

$$T = \sqrt{\frac{2L}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\, d\theta.$$

Cuenta deslizante

3. Una cuenta de masa m se desliza a lo largo de un alambre delgado, cuya forma está descrita por la función $z = f(x)$. Si $\mathbf{X}_1 = (x_1, y_1)$ es un punto crítico del sistema autónomo plano asociado con la cuenta deslizante, compruebe que la matriz Jacobiana en $\mathbf{X}_1$ es

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -gf''(x_1) & -\beta/m \end{pmatrix}.$$

4. Una cuenta de masa m se desliza a lo largo de un alambre delgado, cuya forma se describe con la función $z = f(x)$. Cuando $f'(x_1) = 0, f''(x_1) > 0$ y el sistema es no amortiguado, el punto crítico $\mathbf{X}_1 = (x_1, 0)$ es un centro. Estime el periodo de la cuenta cuando $x(0)$ está cerca de x_1 y $x'(0) = 0$.

5. Se suelta una cuenta en la posición $x(0) = x_0$, sobre la curva $z = x^2/2$, con velocidad inicial $x'(0) = v_0$ cm/s.

a) Utilice el método del plano fase para demostrar que la solución resultante es periódica cuando el sistema es no amortiguado.

b) Demuestre que la altura máxima $z_{\text{máx}}$ a la que sube la cuenta está dada por $z_{\text{máx}} = \frac{1}{2}[e^{v_0^2/g}(1 + x_0^2) - 1]$.

6. Repita el problema 5 con $z = \cosh x$.

Modelos depredador-presa

7. (Consulte la figura 10.4.9.) Si $x_m < x_1 < x_M$ y $x = x_1$, demuestre que $F(x)G(y) = c_0$ tiene exactamente dos soluciones, y_1 y y_2, que satisfacen que $y_1 < a/b < y_2$. [*Sugerencia*: Demuestre primero que $G(y) = c_0/F(x_1) < G(a/b)$.]

8. De las propiedades *i)* y *ii)* de la página 391, concluya que la cantidad máxima de depredadores se presenta cuando $y = a/b$.

9. En muchos modelos de la ciencia pesquera se supone que la rapidez con la que se pesca una especie es directamente proporcional a su abundancia. Si depredadores y presas se pescan de esta forma, las ecuaciones diferenciales de Lotka-Volterra toman la forma

$$x' = -ax + bxy - \epsilon_1 x$$
$$y' = -cxy + dy - \epsilon_2 y,$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 son constantes positivas.

a) Cuando $\epsilon_2 < d$, demuestre que hay un nuevo punto crítico en el primer cuadrante que es un centro.

b) El **principio de Volterra** establece que con una cantidad moderada de pesca aumenta la cantidad promedio de presas y disminuye la cantidad promedio de depredadores. ¿Está de acuerdo este modelo de pesca con el principio de Volterra?

10. Una interacción depredador-presa se describe con el modelo de Lotka-Volterra

$$x' = -0.1x + 0.02xy$$
$$y' = 0.2y - 0.025xy.$$

a) Determine el punto crítico en el primer cuadrante y utilice un programa de solución numérica para bosquejar algunos ciclos de población.

b) Estime el ciclo de las soluciones periódicas que se acercan al punto crítico del inciso a).

Modelos de competencia

11. Una interacción de competencia se describe con el siguiente modelo de Lotka-Volterra

$$x' = 0.08x(20 - 0.4x - 0.3y)$$
$$y' = 0.06y(10 - 0.1y - 0.3x).$$

Encuentre y clasifique todos los puntos críticos del sistema.

12. En las ecuaciones (1), demuestre que (0, 0) siempre es un nodo inestable.

13. En las ecuaciones (1) demuestre que $(K_1, 0)$ es un nodo estable cuando $K_1 > K_2/\alpha_{21}$ y un punto silla cuando $K_1 < K_2/\alpha_{21}$.

14. Use los problemas 12 y 13 para establecer que (0, 0), $(K_1, 0)$ y $(0, K_2)$ son inestables cuando $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}, \hat{y})$ es un nodo estable.

15. En las ecuaciones (1) demuestre que $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}, \hat{y})$ es un punto silla cuando $K_1/\alpha_{12} < K_2$ y $K_2/\alpha_{21} < K_1$.

Modelos matemáticos diversos

16. Péndulo amortiguado Si suponemos que actúa una fuerza de amortiguamiento en dirección opuesta a la del movimiento de un péndulo, con una magnitud directamente proporcional a la velocidad angular $d\theta/dt$, el ángulo de desplazamiento θ del péndulo satisface la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\text{sen}\,\theta - \beta\frac{d\theta}{dt}.$$

a) Escriba la ecuación diferencial de segundo orden en forma de un sistema autónomo plano y determine todos los puntos críticos.

b) Determine una condición sobre m, l y β que haga que (0, 0) sea un punto espiral estable.

17. Amortiguamiento no lineal En el análisis del movimiento libre amortiguado de la sección 5.1 supusimos que la fuerza de amortiguamiento era proporcional a la velocidad x'. Con frecuencia, la magnitud de esta fuerza de amortiguamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad y la nueva ecuación diferencial se convierte en

$$x'' = -\frac{\beta}{m}x'|x'| - \frac{k}{m}x.$$

a) Escriba esta ecuación diferencial de segundo orden como un sistema autónomo y encuentre todos los puntos críticos.

b) El sistema se llama *sobreamortiguado* cuando (0, 0) es un nodo estable y *subamortiguado* cuando (0, 0) es un punto espiral estable. Por consideraciones físicas se supone que (0, 0) debe ser un punto crítico asintóticamente estable. Demuestre que el sistema es necesariamente subamortiguado. $\left[\textit{Sugerencia}: \frac{d}{dy}(y|y|) = 2|y|.\right]$

Problemas para analizar

18. Una cuenta con masa m se desliza por un alambre delgado cuya forma se puede describir con la función $z = f(x)$. Tramos pequeños de alambre se pueden considerar como planos inclinados y en mecánica se supone que la magnitud de la fuerza de fricción entre la cuenta y el alambre es directamente proporcional a $mg \cos \theta$ (véase la figura 10.4.3).

a) Explique por qué la nueva ecuación diferencial para la coordenada x de la cuenta es

$$x'' = g\frac{\mu - f'(x)}{1 + [f'(x)]^2} - \frac{\beta}{m}x'$$

para una constante positiva μ.

b) Investigue los puntos críticos del sistema autónomo plano correspondiente. ¿Bajo qué condiciones un punto crítico es un punto silla? ¿Un punto espiral estable?

19. Una oscilación no amortiguada satisface una ecuación diferencial no lineal de segundo orden de la forma $x'' + f(x) = 0$, donde $f(0) = 0$ y $xf(x) > 0$ para $x \neq 0$ y $-d < x < d$. Utilice el método del plano fase para investigar si es posible que el punto crítico (0, 0) sea un punto espiral estable. [*Sugerencia*: sea $F(x) = \int_0^x f(u)\,du$ y demuestre que $y^2 + 2F(x) = c$.]

20. El modelo de depredador-presa de Lotka-Volterra supone que en ausencia de depredadores, la cantidad de presas crece exponencialmente. Si se plantea la hipótesis alternativa de que la población de presas crece en forma logística, el nuevo sistema es

$$x' = -ax + bxy$$
$$y' = -cxy + \frac{r}{K}y(K - y),$$

donde a, b, c, r y K son positivas y $K > a/b$.

a) Demuestre que el sistema tiene puntos críticos en (0, 0), (0, K) y $(\hat{x}, \hat{y})$, donde $\hat{y} = a/b$ y $c\hat{x} = \frac{r}{K}(K - \hat{y})$.

b) Demuestre que los puntos críticos en (0, 0) y (0, K) son puntos silla, mientras que el punto crítico en $(\hat{x}, \hat{y})$ puede ser un nodo estable o un punto espiral estable.

c) Demuestre que $(\hat{x}, \hat{y})$ es un punto espiral si $\hat{y} < \frac{4bK^2}{r + 4bK}$. Explique por qué se da este caso cuando la capacidad de mantenimiento K de la presa es grande.

21. El sistema dinámico

$$x' = \alpha\frac{y}{1+y}x - x$$

$$y' = -\frac{y}{1+y}x - y + \beta$$

surge en un modelo de crecimiento de microorganismos en un quimostato, un simple aparato de laboratorio en el que fluye un nutriente desde un abastecimiento a una cámara de crecimiento. En el sistema, x denota la concentración de los microorganismos en la cámara de crecimiento y denota la concentración de nutrientes y $\alpha > 1$ y $\beta > 0$ son constantes que puede ajustar el investigador. Determine las condiciones de α y β que aseguren que el sistema tenga un solo punto crítico $(\hat{x}, \hat{y})$ en el primer cuadrante e investigue la estabilidad de este punto crítico.

22. Utilice los métodos de este capítulo, junto con un programa de solución numérica, para investigar la estabilidad del sistema no lineal resorte/masa modelado por

$$x'' + 8x - 6x^3 + x^5 = 0.$$

Véase el problema 8 en los ejercicios 5.3.

REPASO DEL CAPÍTULO 10

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-18.

Responda los problemas 1 a 10 sin consultar el texto. Complete los espacios en blanco o conteste cierto o falso.

1. La ecuación diferencial de segundo orden $x'' + f(x') + g(x) = 0$ se puede escribir como un sistema autónomo plano. ________

2. Si $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ es una solución de un sistema autónomo plano y $\mathbf{X}(t_1) = \mathbf{X}(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$, entonces $\mathbf{X}(t)$ es una solución periódica. ________

3. Si la traza de la matriz $\mathbf{A}$ es 0 y det $\mathbf{A} \neq 0$, entonces el punto crítico (0, 0) del sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ se puede clasificar como ________.

4. Si el punto crítico (0, 0) del sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ es un punto espiral estable, entonces los eigenvalores de $\mathbf{A}$ son ________.

5. Si el punto crítico (0, 0) del sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ es un punto silla y $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ es una solución, entonces $\lim_{t\to\infty}\mathbf{X}(t)$ no existe. ________

6. Si la matriz Jacobiana $\mathbf{A} = \mathbf{g}'(\mathbf{X}_1)$ en un punto crítico de un sistema autónomo plano tiene traza y determinante positivos, entonces el punto crítico $\mathbf{X}_1$ es inestable. ________

7. Es posible demostrar, utilizando la linealización, que un sistema autónomo plano no lineal tiene soluciones periódicas. ________

8. Todas las soluciones de la ecuación del péndulo $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0$ son periódicas. ________

9. ¿Para qué valor(es) de α el sistema autónomo plano

$$x' = \alpha x - 2y$$
$$y' = -\alpha x + y$$

tiene soluciones periódicas? ________

10. ¿Para qué valores de n es $x = n\pi$ un punto crítico asintóticamente estable de la ecuación diferencial autónoma de primer orden $x' = \text{sen}\,x$? ________

11. Resuelva el siguiente sistema autónomo plano no lineal

$$x' = -y - x\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3$$
$$y' = x - y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3.$$

al cambiarlo a coordenadas polares. Describa el comportamiento geométrico de la solución que satisface la condición inicial $\mathbf{X}(0) = (1, 0)$.

12. Analice la naturaleza geométrica de las soluciones del sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ dado que la solución general es

a) $\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-2t}$

b) $\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{2t}$

13. Clasifique el punto crítico (0, 0) del sistema lineal dado calculando la traza τ y el determinante Δ.

a) $x' = -3x + 4y$, $y' = -5x + 3y$ **b)** $x' = -3x + 2y$, $y' = -2x + y$

14. Encuentre y clasifique (si es posible) los puntos críticos del sistema autónomo plano

$$x' = x + xy - 3x^2$$
$$y' = 4y - 2xy - y^2.$$

15. Determine el(los) valor(es) de α para los que (0, 0) es un punto crítico estable para el sistema autónomo plano (en coordenadas polares)

$$r' = \alpha r$$
$$\theta' = 1.$$

16. Clasifique el punto crítico (0, 0) del sistema autónomo plano que corresponde a la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$x'' + \mu(x^2 - 1)\,x' + x = 0,$$

donde μ es una constante real.

17. Sin resolverla en forma explícita, clasifique (si es posible) los puntos críticos de la ecuación diferencial autónoma de primer orden $x' = (x^2 - 1)e^{-x/2}$, como asintóticamente estable o inestable.

18. Use el método del plano fase para mostrar que las soluciones de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $x'' = -2x\sqrt{(x')^2 + 1}$ que satisfacen que $x(0) = x_0$ y $x'(0) = 0$ son periódicas.

19. En la sección 5.1, supusimos que la fuerza F de restitución del resorte satisface la ley de Hooke $F = ks$, donde s es el estiramiento del resorte y k es una constante de proporcionalidad positiva. Si se reemplaza esta hipótesis con la ley no lineal $F = ks^3$, la nueva ecuación diferencial del movimiento amortiguado de un resorte duro se convierte en

$$mx'' = -\beta x' - k(s + x)^3 + mg,$$

donde $ks^3 = mg$. El sistema se considera sobreamortiguado cuando (0, 0) es un nodo estable y subamortiguado cuando (0, 0) es un punto espiral estable. Encuentre nuevas condiciones sobre m, k y β que conduzcan al subamortiguamiento y sobreamortiguamiento.

20. La varilla de un péndulo está fijada a una unión móvil en el punto P, que gira con una rapidez angular de ω rad/s en el plano perpendicular a la varilla. Véase la figura 10.R.1. Como resultado, el contrapeso del péndulo giratorio experimenta una fuerza centrípeta adicional y la nueva ecuación diferencial para θ es

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega^2 ml \operatorname{sen}\theta \cos\theta - mg \operatorname{sen}\theta - \beta\frac{d\theta}{dt}.$$

a) Si $\omega^2 < g/l$, demuestre que (0, 0) es un punto crítico estable y que es el único punto crítico en el dominio $-\pi < \theta < \pi$. Describa lo que sucede físicamente cuando $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = 0$ y θ_0 es pequeño.

b) Si $\omega^2 > g/l$, muestre que (0, 0) es inestable y que hay dos puntos críticos estables más $(\pm\hat{\theta}, 0)$ en el dominio $-\pi < \theta < \pi$. Describa qué sucede físicamente cuando $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = 0$ y θ_0 es pequeño.

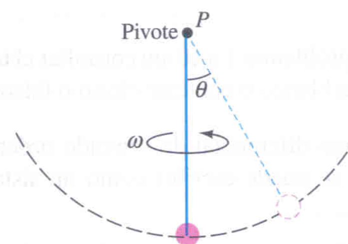
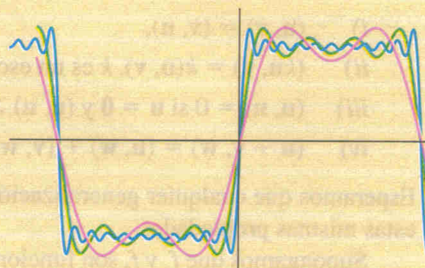


FIGURA 10.R.1 Péndulo girando en el problema 20.

11 FUNCIONES ORTOGONALES Y SERIES DE FOURIER



En cálculo ha visto que los vectores distintos de cero son ortogonales cuando su producto interno (punto) es cero. Más allá del cálculo, los conceptos de vectores, ortogonalidad y producto interno con frecuencia pierden su interpretación geométrica. Estos conceptos se han generalizado y es muy común considerar una función como un vector. Entonces podemos decir que dos funciones distintas son ortogonales cuando su producto interno es cero. En este capítulo veremos que el producto interno de estos vectores (funciones) es en realidad una integral definida.

El concepto de funciones ortogonales y el desarrollo de una función *f* dada en términos de un conjunto de funciones ortogonales es fundamental en el estudio de los temas de los capítulos 12 y 13.

11.1 FUNCIONES ORTOGONALES

REPASO DE MATERIAL

- Los conceptos de vectores generalizados y espacios vectoriales se pueden encontrar en cualquier libro de álgebra lineal.

INTRODUCCIÓN Los conceptos de vectores geométricos en dos y tres dimensiones, vectores ortogonales o perpendiculares y el producto interno de dos vectores se ha generalizado. Es muy común en matemáticas considerar una función como un vector. En esta sección analizaremos un producto interno que es diferente del estudiado en cálculo. Utilizando este nuevo producto interno, definiremos las funciones ortogonales y los conjuntos de funciones ortogonales. Otro tema común en un curso de cálculo es el desarrollo de una función *f* en series de potencias. En esta sección también veremos cómo desarrollar una adecuada función *f* en términos de un conjunto infinito de funciones ortogonales.

PRODUCTO INTERNO Recuerde que si **u** y **v** son dos vectores en el espacio tridimensional, entonces el producto interno (**u**, **v**) de los vectores (en cálculo éste se escribe como **u** · **v**) tiene las propiedades siguientes:

i) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$,

ii) $(k\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, k es un escalar,

iii) $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$,

iv) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Esperamos que cualquier generalización del concepto de producto interno debe tener estas mismas propiedades.

Supongamos que f_1 y f_2 son funciones definidas en un intervalo $[a, b]$.* Puesto que una *integral definida* sobre $[a, b]$ del producto $f_1(x) f_2(x)$ también tiene las propiedades anteriores *i*) a *iv*) siempre y cuando exista la integral, podemos enunciar la siguiente definición:

DEFINICIÓN 11.1.1 Producto interno de funciones

El **producto interno** de dos funciones f_1 y f_2 en un intervalo $[a, b]$ es el número

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx.$$

FUNCIONES ORTOGONALES Motivados por el hecho de que dos vectores geométricos **u** y **v** son ortogonales siempre que su producto interno sea cero, definimos las **funciones ortogonales** en una forma similar.

DEFINICIÓN 11.1.2 Funciones ortogonales

Dos funciones f_1 y f_2 son **ortogonales** en un intervalo $[a, b]$ si

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx = 0. \tag{1}$$

*Los intervalos también podrían ser $(-\infty, \infty)$, $(0, \infty)$, etcétera.

Por ejemplo, las funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x^3$ son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$, ya que

$$(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^3 \, dx = \frac{1}{6} x^6 \Big|_{-1}^{1} = 0.$$

A diferencia del análisis vectorial, donde la palabra *ortogonal* es sinónimo de *perpendicular*, en este contexto el término *ortogonal* y la condición (1) no tienen significado geométrico.

CONJUNTOS ORTOGONALES Nos interesan principalmente los conjuntos infinitos de funciones ortogonales.

DEFINICIÓN 11.1.3 Conjunto ortogonal

Un conjunto de funciones de valor real $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\}$ se dice que es **ortogonal** en un intervalo $[a, b]$ si

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x) \, dx = 0, \quad m \neq n. \tag{2}$$

CONJUNTOS ORTONORMALES La norma o longitud $\|\mathbf{u}\|$ de un vector $\mathbf{u}$, se puede expresar en términos del producto interno. La expresión $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2$ se llama norma cuadrada, por lo que la norma es $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$. De igual modo, la **norma cuadrada** de una función ϕ_n es $\|\phi_n(x)\|^2 = (\phi_n, \phi_n)$ y así la **norma** o su longitud generalizada es $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{(\phi_n, \phi_n)}$. En otras palabras, la norma cuadrada y la norma de una función ϕ_n en un conjunto ortogonal $\{\phi_n(x)\}$ son, respectivamente,

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b \phi_n^2(x) \, dx \qquad \text{y} \qquad \|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x) \, dx}. \tag{3}$$

Si $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[a, b]$ con la propiedad de que $\|\phi_n(x)\| = 1$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces se dice que $\{\phi_n(x)\}$ es un **conjunto ortonormal** en el intervalo.

EJEMPLO 1 Conjunto ortogonal de funciones

Demuestre que el conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots\}$ es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

SOLUCIÓN Si identificamos $\phi_0(x) = 1$ y $\phi_n(x) = \cos nx$, debemos entonces demostrar que $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\,\phi_n(x)\,dx = 0$, $n \neq 0$, y $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = 0$, $m \neq n$. Tenemos, en el primer caso,

$$(\phi_0, \phi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\,\phi_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}[\operatorname{sen} n\pi - \operatorname{sen}(-n\pi)] = 0, \qquad n \neq 0,$$

y, en el segundo,

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\,dx \quad \leftarrow \text{identidad trigonométrica,}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \qquad m \neq n.$$

■

EJEMPLO 2 Normas

Encuentre las normas de cada función en el conjunto ortogonal del ejemplo 1.

SOLUCIÓN Para $\phi_0(x) = 1$, tenemos de la ecuación (3),

$$\|\phi_0(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$

por lo que $\|\phi_0(x)\| = \sqrt{2\pi}$. Para $\phi_n(x) = \cos nx$, $n > 0$, se tiene que

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos\ 2nx]\,dx = \pi.$$

Así para $n > 0$, $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\pi}$. ■

Cualquier conjunto ortogonal de funciones diferentes de cero $\{\phi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, se puede *normalizar*, es decir, transformarlo en un conjunto ortonormal dividiendo cada función entre su norma. Se tiene de los ejemplos 1 y 2 que el conjunto

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\}$$

es ortonormal en $[-\pi, \pi]$.

Vamos a establecer una analogía más entre vectores y funciones. Suponga que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son tres vectores distintos de cero, ortogonales entre sí en el espacio tridimensional. Ese conjunto ortogonal se puede usar como base para el espacio en tres dimensiones; es decir, cualquier vector tridimensional se puede escribir como una combinación lineal.

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3, \tag{4}$$

en donde las c_i, $i = 1, 2, 3$, son escalares y se llaman componentes del vector. Cada componente c_i se puede expresar en términos de $\mathbf{u}$ y del vector $\mathbf{v}_i$ correspondiente. Para ver esto tomamos el producto interno de (4) con $\mathbf{v}_1$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) = c_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + c_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) + c_3(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1) = c_1\|\mathbf{v}_1\|^2 + c_2\cdot 0 + c_3\cdot 0.$$

Por tanto,

$$c_1 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}.$$

De igual manera podemos encontrar que las componentes c_2 y c_3 están dadas por

$$c_2 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \qquad \text{y} \qquad c_3 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_3\|^2}.$$

Por tanto, la ecuación (4) se puede expresar como:

$$\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3 = \sum_{n=1}^{3}\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_n)}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n. \tag{5}$$

DESARROLLO EN SERIES ORTOGONALES Suponga que $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto infinito de funciones ortogonales en un intervalo $[a, b]$. Nos preguntamos: si $y = f(x)$ es una función definida en el intervalo $[a, b]$, es posible determinar un conjunto de coeficientes c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, para el que

$$f(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) + \cdots ? \tag{6}$$

Como en el análisis anterior acerca de encontrar las componentes de un vector podemos determinar los coeficientes c_n utilizando el producto interno. Multiplicando la ecuación (6) por $\phi_m(x)$ e integrando en el intervalo $[a, b]$, se obtiene

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)\,dx = c_0\int_a^b \phi_0(x)\phi_m(x)\,dx + c_1\int_a^b \phi_1(x)\phi_m(x)\,dx + \cdots + c_n\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\,dx + \cdots$$

$$= c_0(\phi_0, \phi_m) + c_1(\phi_1, \phi_m) + \cdots + c_n(\phi_n, \phi_m) + \cdots.$$

Por la ortogonalidad cada término del miembro derecho de la última ecuación es cero *excepto* cuando $m = n$. En este caso tenemos

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx = c_n\int_a^b \phi_n^2(x)\,dx.$$

Se tiene que los coeficientes que buscamos son

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx}{\int_a^b \phi_n^2(x)\,dx}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Es decir,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x), \tag{7}$$

donde

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx}{\|\phi_n(x)\|^2}. \tag{8}$$

Con la notación de producto interno, la ecuación (7) se convierte en

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n(x)\|^2}\phi_n(x). \tag{9}$$

Por lo que vemos que la ecuación (9) es la función análoga del resultado vectorial dado en la ecuación (5).

DEFINICIÓN 11.1.4 Conjunto ortogonal/función de peso

Se dice que un conjunto de funciones de valor real $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\}$ es **ortogonal respecto a una función de peso** $w(x)$ en un intervalo $[a, b]$ si

$$\int_a^b w(x)\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$

La suposición usual es que $w(x) > 0$ en el intervalo de ortogonalidad $[a, b]$. El conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots\}$ del ejemplo 1 es ortogonal respecto a la función de peso $w(x) = 1$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Si $\{\phi_n(x)\}$ es ortogonal respecto a una función de peso $w(x)$ en $[a, b]$, entonces multiplicando la ecuación (6) por $w(x)\phi_n(x)$ e integrando se obtiene que

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\,w(x)\,\phi_n(x)\,dx}{\|\phi_n(x)\|^2}, \tag{10}$$

donde
$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b w(x)\,\phi_n^2(x)\,dx. \tag{11}$$

La serie (7) en que los coeficientes dados ya sea por la ecuación (8) o por la ecuación (10) es un **desarrollo en series ortogonales** de f o una **serie de Fourier generalizada**.

CONJUNTOS COMPLETOS El procedimiento delineado para determinar los coeficientes c_n fue *formal*; es decir, no se consideran las cuestiones básicas acerca de si en realidad es posible un desarrollo en serie f de funciones ortogonales como el de la ecuación (7). También, para desarrollar f en una serie de funciones ortogonales, es realmente necesario que no sea ortogonal a cada ϕ_n del conjunto ortogonal $\{\phi_n(x)\}$. (Si f fuera ortogonal a toda ϕ_n, entonces $c_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$) Para evitar el problema anterior, supondremos, en lo que resta del análisis, que un conjunto ortogonal es **completo**. Esto quiere decir que la única función ortogonal a cada miembro del conjunto es la función cero.

EJERCICIOS 11.1

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-18.

En los problemas 1 a 6, demuestre que las funciones respectivas son ortogonales en el intervalo indicado.

1. $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2;\quad [-2, 2]$
2. $f_1(x) = x^3, f_2(x) = x^2 + 1;\quad [-1, 1]$
3. $f_1(x) = e^x, f_2(x) = xe^{-x} - e^{-x};\quad [0, 2]$
4. $f_1(x) = \cos x, f_2(x) = \operatorname{sen}^2 x;\quad [0, \pi]$
5. $f_1(x) = x, f_2(x) = \cos 2x;\quad [-\pi/2, \pi/2]$
6. $f_1(x) = e^x, f_2(x) = \operatorname{sen} x;\quad [\pi/4, 5\pi/4]$

En los problemas 7 a 12, demuestre que el conjunto dado de funciones es ortogonal en el intervalo indicado. Encuentre la norma de cada función en el conjunto.

7. $\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 3x, \operatorname{sen} 5x, \ldots\};\quad [0, \pi/2]$
8. $\{\cos x, \cos 3x, \cos 5x, \ldots\};\quad [0, \pi/2]$
9. $\{\operatorname{sen} nx\}, n = 1, 2, 3, \ldots;\quad [0, \pi]$
10. $\left\{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{p}x\right\}, n = 1, 2, 3, \ldots;\quad [0, p]$
11. $\left\{1, \cos \frac{n\pi}{p}x\right\}, n = 1, 2, 3, \ldots;\quad [0, p]$
12. $\left\{1, \cos\frac{n\pi}{p}x, \operatorname{sen}\frac{m\pi}{p}x\right\}, n = 1, 2, 3, \ldots,$ $m = 1, 2, 3, \ldots;\quad [-p, p]$

Compruebe por integración directa que las funciones de los problemas 13 y 14 son ortogonales respecto a la función de peso indicada en el intervalo dado.

13. $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2;$ $w(x) = e^{-x^2}, (-\infty, \infty)$
14. $L_0(x) = 1, L_1(x) = -x + 1, L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1;$ $w(x) = e^{-x}, [0, \infty)$
15. Sea $\{\phi_n(x)\}$ un conjunto ortogonal de funciones en $[a, b]$ tal que $\phi_0(x) = 1$. Demuestre que $\int_a^b \phi_n(x)\,dx = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$
16. Sea $\{\phi_n(x)\}$ un conjunto ortogonal de funciones en $[a, b]$ tal que $\phi_0(x) = 1$ y $\phi_1(x) = x$. Demuestre que $\int_a^b (\alpha x + \beta)\phi_n(x)\,dx = 0$ para $n = 2, 3, \ldots$ y para cualesquier constantes α y β.
17. Sea $\{\phi_n(x)\}$ un conjunto ortogonal de funciones en $[a, b]$. Demuestre que $\|\phi_m(x) + \phi_n(x)\|^2 = \|\phi_m(x)\|^2 + \|\phi_n(x)\|^2$, para $m \neq n$.
18. Del problema 1 sabemos que $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = x^2$ son ortogonales en el intervalo $[-2, 2]$. Encuentre las constantes c_1 y c_2 tales que $f_3(x) = x + c_1x^2 + c_2x^3$ sea ortogonal tanto a f_1 como a f_2 en el mismo intervalo.
19. El conjunto de funciones $\{\operatorname{sen} nx\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Demuestre que el conjunto no es completo.
20. Suponga que f_1, f_2 y f_3 son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Demuestre que $(f_1 + f_2, f_3) = (f_1, f_3) + (f_2, f_3)$.

Problemas para analizar

21. Se dice que una función f de valor real es **periódica**, con periodo T si $f(x + T) = f(x)$. Por ejemplo, 4π es un periodo de sen x, ya que $\operatorname{sen}(x + 4\pi) = \operatorname{sen} x$. El valor mínimo de T para el que es válida $f(x + T) = f(x)$ se llama **periodo fundamental** de f. Por ejemplo, el periodo fundamental de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $T = 2\pi$. ¿Cuál es el periodo fundamental de cada una de las siguientes funciones?

    a) $f(x) = \cos 2\pi x$
    b) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{4}{L}x$
    c) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$
    d) $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 4x$
    e) $f(x) = \operatorname{sen} 3x + \cos 2x$
    f) $f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi}{p}x + B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right),$ A_n y B_n dependen sólo de n.

11.2 SERIES DE FOURIER

REPASO DE MATERIAL

- Lea nuevamente, o mejor repita, el problema 12 de los ejercicios 11.1.

INTRODUCCIÓN Acabamos de ver que si $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\}$ es un conjunto ortogonal en un intervalo $[a, b]$ y f es una función definida en el mismo intervalo, entonces se puede desarrollar formalmente f en una serie ortogonal

$$c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots,$$

donde los coeficientes c_n se determinan utilizando el concepto de producto interno. El conjunto ortogonal de funciones trigonométricas

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{p}x, \cos\frac{2\pi}{p}x, \cos\frac{3\pi}{p}x, \ldots, \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}x, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{p}x, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{p}x, \ldots\right\} \tag{1}$$

tendrá después especial importancia en la solución de ciertas clases de problemas con valores a la frontera donde intervienen ecuaciones diferenciales parciales lineales. El conjunto (1) es ortogonal en el intervalo $[-p, p]$.

UNA SERIE TRIGONOMÉTRICA Suponga que f es una función definida en el intervalo $[-p, p]$ y que se puede desarrollar en una serie ortogonal formada por las funciones trigonométricas del conjunto ortogonal (1); es decir,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right). \tag{2}$$

Los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ se pueden determinar exactamente de la misma manera que en el análisis general de los desarrollos en series ortogonales de la página 401. Antes de proseguir, observe que hemos elegido escribir el coeficiente de 1 en el conjunto (1) como $\frac{1}{2}a_0$ en lugar de a_0. Esto es sólo por conveniencia; la fórmula de a_n se reducirá después a a_0 para $n = 0$.

Ahora, integrando ambos miembros de la ecuación (2), desde $-p$ hasta p, se obtiene

$$\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx + b_n\int_{-p}^{p}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx\right). \tag{3}$$

Puesto que $\cos(n\pi x/p)$ y $\operatorname{sen}(n\pi x/p)$, $n \geq 1$ son ortogonales a 1 en el intervalo, el miembro derecho de (3) se reduce a un solo término:

$$\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} dx = \frac{a_0}{2}x\Big|_{-p}^{p} = pa_0.$$

Resolviendo para a_0 se obtiene

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Ahora multiplicando la ecuación (2) por $\cos(m\pi x/p)$ e integrando:

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{m\pi}{p}x\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\,dx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx + b_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx\right). \tag{5}$$

Por ortogonalidad, tenemos que

$$\int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi}{p}x\,dx = 0, \quad m > 0, \qquad \int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi}{p}x\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}x\,dx = 0,$$

y
$$\int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi}{p}x\,\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m = n. \end{cases}$$

Por lo que la ecuación (5) se reduce a $\displaystyle\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx = a_n p,$

y así
$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{6}$$

Por último, si multiplicamos (2) por $\text{sen}(m\pi x/p)$, integramos y utilizamos los resultados

$$\int_{-p}^{p} \text{sen}\,\frac{m\pi}{p}x\,dx = 0, \quad m > 0, \qquad \int_{-p}^{p} \text{sen}\,\frac{m\pi}{p}x\,\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx = 0,$$

y
$$\int_{-p}^{p} \text{sen}\,\frac{m\pi}{p}x\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}x\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m = n, \end{cases}$$

encontramos que
$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{7}$$

La serie trigonométrica (2) con coeficientes a_0, a_n y b_n definidos por las ecuaciones (4), (6) y (7), respectivamente, se dice que es una **serie de Fourier** de la función f. Los coeficientes obtenidos de las ecuaciones (4), (6) y (7) se llaman **coeficientes de Fourier** de f.

Al encontrar los coeficientes a_0, a_n y b_n supusimos que f es integrable en el intervalo y que la ecuación (2), así como la serie obtenida al multiplicar (2) por $\cos(m\pi x/p)$, converge en tal forma que permite la integración término a término. Hasta no demostrar que la ecuación (2) es convergente para una función dada f, no se debe tomar el signo igual en sentido estricto o literal. Algunos libros utilizan el símbolo $\sim$ en lugar del $=$. En vista de que en las aplicaciones la mayor parte de las funciones son de un tipo que garantiza la convergencia de la serie, usaremos el signo igual. Resumiendo los resultados:

DEFINICIÓN 11.2.1 Series de Fourier

La **serie de Fourier** de una función f definida en el intervalo $(-p, p)$ está dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x + b_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}x\right), \tag{8}$$

donde
$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx \tag{9}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx \tag{10}$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{11}$$

EJEMPLO 1 Desarrollo en una serie de Fourier

Desarrolle
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \le x < \pi \end{cases} \tag{12}$$
en una serie de Fourier.

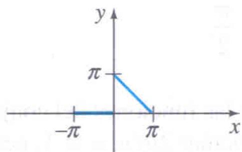


FIGURA 11.2.1 Función definida por tramos del ejemplo 1.

SOLUCIÓN En la figura 11.2.1 se presenta la gráfica de f. Con $p = \pi$ tenemos de las ecuaciones (9) y (10) que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi},$$

donde hemos usado $\cos n\pi = (-1)^n$. En forma similar encontramos de (11) que

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{n}.$$

Por tanto
$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}\cos nx + \frac{1}{n}\operatorname{sen} nx\right\}. \tag{13}$$ ■

Observe que a_n definida por la ecuación (10) se reduce a a_0 dada por la ecuación (9) cuando se hace $n = 0$. Pero como en el ejemplo 1, este quizá no sea el caso *después* de evaluar la integral para a_n.

CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE FOURIER El siguiente teorema especifica las condiciones de suficiencia de la convergencia de una serie de Fourier en un punto.

TEOREMA 11.2.1 Condiciones para la convergencia

Sean f y f' continuas por tramos en el intervalo $(-p, p)$; es decir, sean f y f' continuas excepto en un número finito de puntos en el intervalo y con discontinuidades finitas sólo en esos puntos. Entonces, la serie de Fourier de f en el intervalo converge a $f(x)$ en un punto de continuidad. En un punto de discontinuidad, la serie de Fourier converge hacia el promedio

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

en donde $f(x+)$ y $f(x-)$ denotan el límite de f en x, por la derecha y por la izquierda, respectivamente.*

Para una demostración de este teorema consulte el texto clásico de Churchill y Brown.†

*Es decir, para un punto x en el intervalo y $h > 0$,
$$f(x+) = \lim_{h\to 0} f(x + h),\quad f(x-) = \lim_{h\to 0} f(x - h).$$

†Ruel V. Churchill y James Ward Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems* (New York: McGraw-Hill).

EJEMPLO 2 Convergencia de un punto de discontinuidad

La función (12) del ejemplo 1 satisface las condiciones del teorema 11.2.1. Así, para todo x del intervalo $(-\pi, \pi)$ excepto en $x = 0$, la serie (13) convergerá a $f(x)$. En $x = 0$ la función es discontinua, por lo que la serie convergerá a

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

■

EXTENSIÓN PERIÓDICA Observe que cada una de las funciones del conjunto básico (1) tiene un periodo fundamental distinto*, en particular $2p/n$, $n \geq 1$, pero como un múltiplo entero positivo de un periodo también es un periodo, se ve que todas las funciones tienen en común el periodo $2p$. (Compruebe.) Por tanto, el miembro derecho de la ecuación (2) tiene periodo $2p$; en realidad, $2p$ es el **periodo fundamental** de la suma. Concluimos que una serie de Fourier no sólo representa la función en el intervalo $(-p, p)$, sino que también da la **extensión periódica** de f fuera de este intervalo. Ahora podemos aplicar el teorema 11.2.1 a la extensión periódica de f o podemos suponer, desde el principio, que la función dada es periódica, con periodo $2p$; esto es, $f(x + 2p) = f(x)$. Cuando f es continua por tramos y existen las derivadas derecha e izquierda en $x = -p$ y en $x = p$, respectivamente, la serie (8) converge al promedio

$$\frac{f(p-) + f(-p+)}{2}$$

en esos extremos y extendiendo este valor periódicamente a $\pm 3p$, $\pm 5p$, $\pm 7p$, etcétera.

La serie de Fourier (13) converge hacia la extensión periódica de (12) en todo el eje x. En 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, . . . y en $\pm \pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, . . . la serie converge a los valores

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{f(\pi-) + f(-\pi+)}{2} = 0,$$

respectivamente. Los puntos sólidos de la figura 11.2.2 representan el valor $\pi/2$.

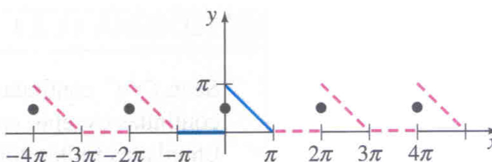


FIGURA 11.2.2 Extensión periódica de la función que se muestra en la figura 11.2.1.

SUCESIÓN DE SUMAS PARCIALES Es interesante ver cómo se aproxima la sucesión de sumas parciales $\{S_N(x)\}$ de una serie de Fourier a una función. Por ejemplo, las tres primeras sumas parciales de la ecuación (13) son

$$S_1(x) = \frac{\pi}{4}, \qquad S_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos x + \operatorname{sen} x, \qquad \text{y} \qquad S_3(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos x + \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.$$

En la figura 11.2.3 hemos usado un SAC para trazar la gráfica de las sumas parciales $S_3(x)$, $S_8(x)$ y $S_{15}(x)$ de la ecuación (13) en el intervalo $(-\pi, \pi)$. La figura 11.2.3d muestra la extensión periódica usando $S_{15}(x)$ en $(-4\pi, 4\pi)$.

*Vea el problema 21 de los ejercicios 11.1.

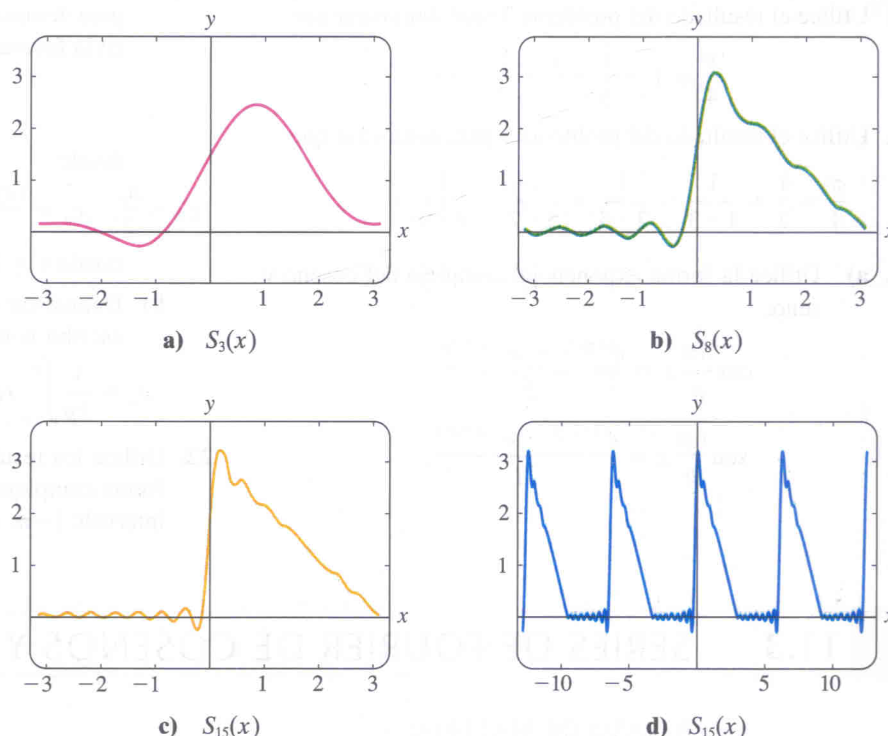


FIGURA 11.2.3 Sumas parciales de una serie de Fourier.

EJERCICIOS 11.2

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-18.

En los problemas 1 a 16 encuentre la serie de Fourier de f en el intervalo dado.

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \pi^2, & -\pi < x < 0 \\ \pi^2 - x^2, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

7. $f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi$

8. $f(x) = 3 - 2x, \quad -\pi < x < \pi$

9. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \operatorname{sen} x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi/2 < x < 0 \\ \cos x, & 0 \le x < \pi/2 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < -1 \\ -2, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} 1, & -5 < x < 0 \\ 1 + x, & 0 \le x < 5 \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} 2 + x, & -2 < x < 0 \\ 2, & 0 \le x < 2 \end{cases}$

15. $f(x) = e^x, \quad -\pi < x < \pi$

16. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ e^x - 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

17. Utilice el resultado del problema 5 para demostrar que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

y

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots.$$

18. Utilice el resultado del problema 17 para encontrar una serie cuya suma sea $\pi^2/8$.

19. Utilice el resultado del problema 7 para demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

20. Utilice el resultado del problema 9 para demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \frac{1}{7\cdot 9} + \cdots.$$

21. a) Utilice la forma exponencial compleja del coseno y seno,

$$\cos\frac{n\pi}{p}x = \frac{e^{in\pi x/p} + e^{-in\pi x/p}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x = \frac{e^{in\pi x/p} - e^{-in\pi x/p}}{2i},$$

para demostrar que la ecuación (8) se puede expresar en la **forma compleja**

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p},$$

donde

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{(a_n - ib_n)}{2}, \quad \text{y} \quad c_{-n} = \frac{(a_n + ib_n)}{2},$$

donde $n = 1, 2, 3, \ldots$.

b) Demuestre que c_0, c_n y c_{-n} del inciso a) se pueden escribir como una integral

$$c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-in\pi x/p}\,dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

22. Utilice los resultados del problema 21 para encontrar la forma compleja de la serie de Fourier de $f(x) = e^{-x}$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

11.3 SERIES DE FOURIER DE COSENOS Y DE SENOS

REPASO DE MATERIAL

- Secciones 11.1 y 11.2.

INTRODUCCIÓN El esfuerzo que se invierte en la evaluación de las integrales definidas que calculan los coeficientes a_0, a_n y b_n al desarrollar una función f en una serie de Fourier se reduce significativamente cuando f es una función par o impar. Recuerde que se dice que una función f es

$$\textbf{par} \text{ si } f(-x) = f(x) \quad \text{e} \quad \textbf{impar} \text{ si } f(-x) = -f(x).$$

En un intervalo simétrico tal como $(-p, p)$, la gráfica de una función par tiene simetría respecto al eje y, mientras que la de una función impar tiene simetría respecto al origen.

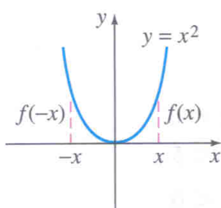


FIGURA 11.3.1 Función par; gráfica simétrica respecto al eje y.

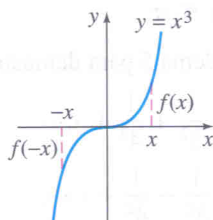


FIGURA 11.3.2 Función impar; gráfica simétrica respecto al origen.

FUNCIONES PAR E IMPAR Es muy probable que el origen de los términos *par* e *impar* sea consecuencia del hecho de que las gráficas de funciones polinomiales de potencias pares de x son simétricas respecto al eje y, mientras que las gráficas de polinomios de potencias impares de x son simétricas respecto al origen. Por ejemplo,

$$f(x) = x^2 \text{ es par, ya que } f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \quad (\text{entero par})$$

$$f(x) = x^3 \text{ es impar, ya que } f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x). \quad (\text{entero impar})$$

Véanse las figuras 11.3.1 y 11.3.2. Las funciones trigonométricas coseno y seno son, respectivamente, funciones pares e impares, ya que $\cos(-x) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$. Las funciones exponenciales $f(x) = e^x$ y $f(x) = e^{-x}$ no son ni pares ni impares.

PROPIEDADES El teorema siguiente lista algunas propiedades de las funciones pares e impares.

TEOREMA 11.3.1 Propiedades de funciones pares/impares

a) El producto de dos funciones pares es par.
b) El producto de dos funciones impares es par.
c) El producto de una función impar y una función par es impar.
d) La suma (diferencia) de dos funciones pares es par.
e) La suma (diferencia) de dos funciones impares es impar.
f) Si f es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.
g) Si f es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

DEMOSTRACIÓN DE b) Supongamos que f y g son funciones impares. En ese caso tendremos que $f(-x) = -f(x)$ y $g(-x) = -g(x)$. Si definimos el producto de f y g como $F(x) = f(x)g(x)$, entonces

$$F(-x) = f(-x)\,g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)\,g(x) = F(x).$$

Esto demuestra que el producto F de dos funciones impares es una función par. Las demostraciones de las demás propiedades se dejan como ejercicios. Véase el problema 48 de los ejercicios 11.3. ■

SERIES DE COSENOS Y DE SENOS Si f es una función par en $(-p, p)$, entonces, en vista de las propiedades anteriores, los coeficientes (9), (10) y (11) de la sección 11.2 se convierten en

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \underbrace{f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x}_{\text{par}}\,dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \underbrace{f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x}_{\text{impar}}\,dx = 0$$

De la misma manera, cuando f es impar en el intervalo $(-p, p)$,

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad b_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx.$$

Resumiremos los resultados en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 11.3.1 Series de Fourier de cosenos y de senos

i) La serie de Fourier de una función par en el intervalo $(-p, p)$ es la **serie de cosenos**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{p}x, \tag{1}$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\,dx \tag{2}$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{3}$$

ii) La serie de Fourier de una función impar en el intervalo $(-p, p)$ es la **serie de senos**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p}x, \tag{4}$$

donde
$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{5}$$

EJEMPLO 1 Desarrollo en una serie de senos

Desarrolle $f(x) = x$, $-2 < x < 2$ en una serie de Fourier.

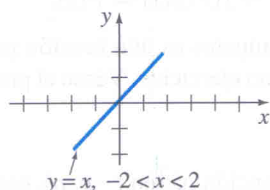


FIGURA 11.3.3 Función impar en el ejemplo 1.

SOLUCIÓN El examen de la figura 11.3.3. muestra que la función es impar en el intervalo $(-2, 2)$ así que desarrollamos f en una serie de senos. Identificando $2p = 4$ tenemos $p = 2$. Por lo que la ecuación (5), después de integrar por partes, es

$$b_n = \int_0^2 x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}x\,dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Por tanto
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}x. \tag{6}$$ ■

La función del ejemplo 1 satisface las condiciones del teorema 11.2.1. Por tanto la serie (6) converge a la función en el intervalo $(-2, 2)$ y la extensión periódica (de periodo 4), se muestra en la figura 11.3.4.

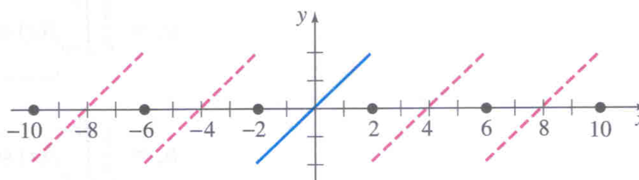


FIGURA 11.3.4 Extensión periódica de la función que se muestra en la figura 11.3.3.

EJEMPLO 2 Desarrollo en una serie de senos

En la figura 11.3.5 se muestra la función $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi, \end{cases}$ que es impar en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Con $p = \pi$ tenemos, de la expresión (5) que,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (1) \operatorname{sen} nx\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{1 - (-1)^n}{n},$$

y por tanto
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} nx. \tag{7}$$ ■

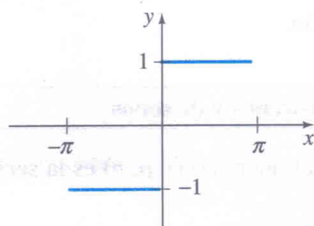


FIGURA 11.3.5 Función impar en el ejemplo 2.

FENÓMENO DE GIBBS En la figura 11.3.6, con un SAC hemos trazado las gráficas de $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ y $S_{15}(x)$ de las sumas parciales de los términos distintos de cero de la expresión (7). Como se muestra en la figura 11.3.6d la gráfica de la suma parcial de $S_{15}(x)$ tiene picos notables cerca de las discontinuidades en $x = 0$, $x = \pi$, $x = -\pi$, etcétera. Este "exceso" de las sumas parciales S_N, respecto a los valores de la función cerca de un punto de discontinuidad no se empareja, sino que permanece bastante constante, aunque el valor de N sea muy grande. A este comportamiento de una serie de Fourier cerca de un punto en el que f es discontinua se le llama **fenómeno de Gibbs**.

La extensión periódica de f en el ejemplo 2, sobre todo el eje x, es una función serpenteante (véase la página 290).

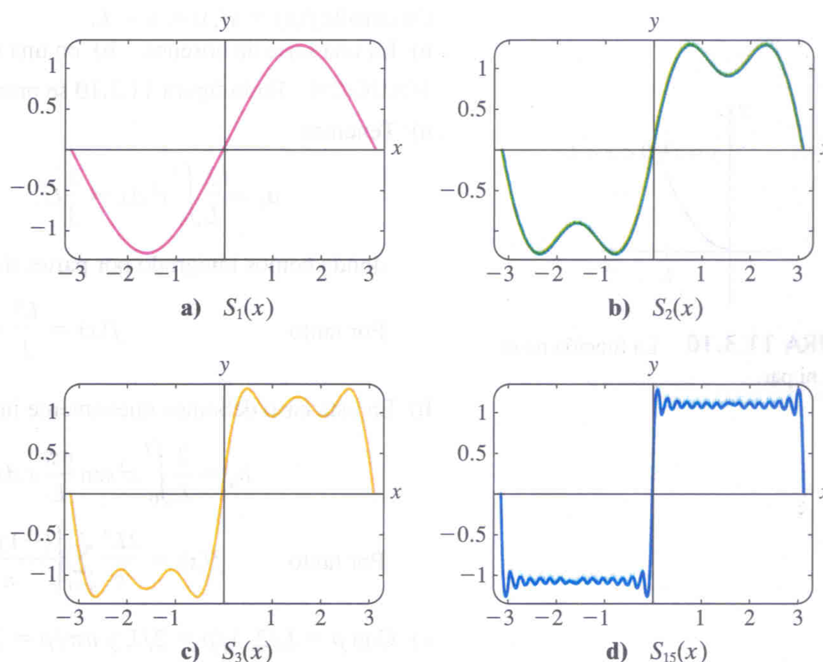


FIGURA 11.3.6 Sumas parciales de la serie seno (ecuación 7).

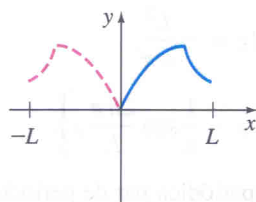


FIGURA 11.3.7 Reflexión par.

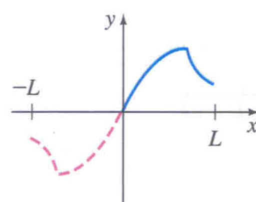


FIGURA 11.3.8 Reflexión impar.

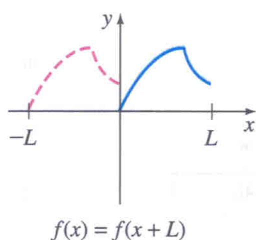


FIGURA 11.3.9 Reflexión identidad.

DESARROLLOS EN SEMIINTERVALOS En el análisis anterior hemos sobreentendido que una función f está definida en un intervalo con el origen en su punto medio, es decir, $(-p, p)$. Sin embargo, en muchos casos nos interesa representar una función f que está definida sólo para $0 < x < L$ con una serie trigonométrica. Esto se puede hacer de muchas formas distintas dando una *definición* arbitraria de $f(x)$ para $-L < x < 0$. Por brevedad consideraremos los tres casos más importantes. Si $y = f(x)$ está definida en el intervalo $(0, L)$, entonces

i) reflejar la gráfica de f respecto al eje y en $(-L, 0)$; la función ahora es par en $(-L, L)$ (véase la figura 11.3.7); o

ii) reflejar la gráfica de f respecto al origen $(-L, 0)$; la función ahora es impar en $(-L, L)$ (véase la figura 11.3.8); o

iii) Definir f en $(-L, 0)$ con $y = f(x + L)$ (véase la figura 11.3.9).

Observe que en los coeficientes de las series (1) y (4) sólo se utiliza la definición de la función en $(0, p)$ (esto es, la mitad del intervalo $(-p, p)$). Por esta razón, en la práctica no hay necesidad de reflejar cómo se describió en *i)* y en *ii)*. Si se define f en $0 < x < L$, simplemente identificamos la mitad del periodo o semiperiodo, como la longitud del intervalo $p = L$. Tanto las fórmulas (2), (3) y (5) de los coeficientes como las series correspondientes dan una extensión periódica par o impar de periodo $2L$ de la función original. Las series de cosenos y senos que se obtienen de esta manera se llaman **desarrollos en semiintervalos**. Por último, en el caso *iii)*, igualamos los valores de la función en el intervalo $(-L, 0)$ con los del intervalo $(0, L)$. Como en los dos casos anteriores no hay necesidad de hacerlo. Se puede demostrar que el conjunto de funciones en la ecuación (1) de la sección 11.2 es ortogonal en el intervalo $[a, a + 2p]$ para todo número real a. Eligiendo $a = -p$, obtenemos los límites de integración en las ecuaciones (9), (10) y (11) de esa sección. Pero para $a = 0$, los límites de integración son de $x = 0$ a $x = 2p$. Por lo que si f está definida en el intervalo $(0, L)$, identificamos $2p = L$ o $p = L/2$. La serie de Fourier resultante dará la extensión periódica de f con periodo L. De esta forma los valores para los que converge la serie serán los mismos en $(-L, 0)$ que en $(0, L)$.

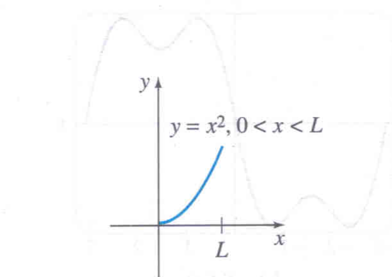


FIGURA 11.3.10 La función no es impar ni par.

EJEMPLO 3 Desarrollo en tres series

Desarrolle $f(x) = x^2$, $0 < x < L$,

a) En una serie de cosenos **b)** en una serie de senos **c)** en una serie de Fourier.

SOLUCIÓN En la figura 11.3.10 se presenta la gráfica de esta función.

a) Tenemos

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\,dx = \frac{2}{3}L^2, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{4L^2(-1)^n}{n^2\pi^2},$$

donde hemos integrado por partes dos veces en la evaluación de a_n.

Por tanto
$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{L}x. \tag{8}$$

b) En este caso debemos nuevamente integrar por partes dos veces:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2L^2(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{4L^2}{n^3\pi^3}[(-1)^n - 1].$$

Por tanto
$$f(x) = \frac{2L^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n - 1]\right\}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x. \tag{9}$$

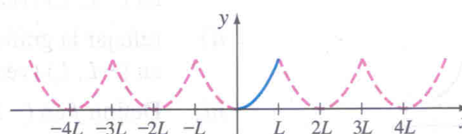
c) Con $p = L/2$, $1/p = 2/L$ y $n\pi/p = 2n\pi/L$, tenemos

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\,dx = \frac{2}{3}L^2, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx = \frac{L^2}{n^2\pi^2},$$

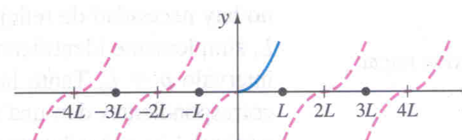
y
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{L}x\,dx = -\frac{L^2}{n\pi}.$$

Por tanto
$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{L^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2\pi}\cos\frac{2n\pi}{L}x - \frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{L}x\right\}. \tag{10}$$

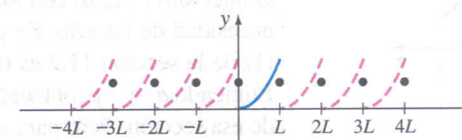
Las series (8), (9) y (10) convergen hacia la extensión periódica par de periodo $2L$ de f, la extensión periódica impar de periodo $2L$ de f y la extensión periódica de periodo L de f, respectivamente. En la figura 11.3.11 se presentan las gráficas de esas extensiones periódicas.



a) Serie del coseno



b) Serie del seno



c) Serie de Fourier

FIGURA 11.3.11 La misma función sobre $(0, L)$ pero con diferentes extensiones periódicas. ■

FUERZA IMPULSORA PERIÓDICA Algunas veces las series de Fourier son útiles para determinar una solución particular de la ecuación diferencial que describe un sistema físico en el que la entrada o fuerza impulsora $f(t)$ es periódica. En el siguiente ejemplo encontraremos una solución particular de la ecuación diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = f(t) \tag{11}$$

representando primero f por el desarrollo en serie de senos en un semiintervalo y después suponiendo una solución particular de la forma

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} t. \tag{12}$$

EJEMPLO 4 Solución particular de una ED

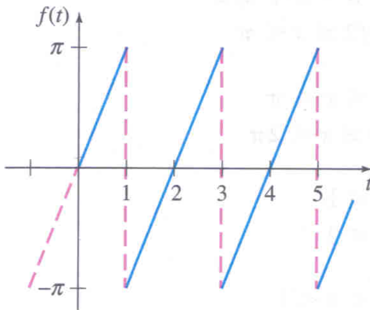


FIGURA 11.3.12 Función periódica forzada para el sistema resorte-masa.

Un sistema resorte-masa no amortiguado en el que la masa es $m = \frac{1}{16}$ slug y la constante del resorte es $k = 4$ lb/pie, es impulsado por una fuerza externa $f(t)$ de periodo 2 como se muestra en la figura 11.3.12. Aunque la fuerza $f(t)$ actúa sobre el sistema cuando $t > 0$, observe que si se extiende la gráfica de la función hacia la parte negativa del eje t para que su periodo sea 2, obtenemos una función impar. En términos prácticos esto significa que sólo necesitamos encontrar el desarrollo en una serie de senos en un semiintervalo de $f(t) = \pi t$, $0 < t < 1$. Con $p = 1$ utilizando la ecuación (5) e integrando por partes se tiene que

$$b_n = 2\int_0^1 \pi t \operatorname{sen} n\pi t \, dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

De la ecuación (11) la ecuación diferencial de movimiento es

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} n\pi t. \tag{13}$$

Para encontrar una solución particular $x_p(t)$ de la ecuación (13), sustituimos en la ecuación (12) e igualamos los coeficientes de sen $n\pi t$. Así obtenemos

$$\left(-\frac{1}{16}n^2\pi^2 + 4\right)B_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \qquad \text{o} \qquad B_n = \frac{32(-1)^{n+1}}{n(64 - n^2\pi^2)}.$$

Por tanto

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32(-1)^{n+1}}{n(64 - n^2\pi^2)} \operatorname{sen} n\pi t. \tag{14}$$

■

Observe que en la solución (14) no hay entero $n \geq 1$ para el cual el denominador de B_n, que es $64 - n^2\pi^2$, sea cero. En general, si *existe* un valor de n, digamos N, para el cual $N\pi/p = \omega$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$, entonces el estado del sistema que describe la ecuación (11) es un estado de resonancia pura. Es decir, tenemos resonancia pura si el desarrollo de la función $f(t)$ de la fuerza impulsora en serie de Fourier contiene un término sen$(N\pi/L)t$ (o cos$(N\pi/L)t$) que tenga la misma frecuencia que la de las vibraciones libres.

Por supuesto, si la extensión de la fuerza impulsora f con periodo $2p$ sobre el eje negativo de t da como resultado una función par, entonces desarrollamos f en una serie de cosenos.

EJERCICIOS 11.3 *Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-18.*

En los problemas 1 a 10 determine si la función es par, impar o ni una ni otra.

1. $f(x) = \operatorname{sen} 3x$

2. $f(x) = x \cos x$

3. $f(x) = x^2 + x$

4. $f(x) = x^3 - 4x$

5. $f(x) = e^{|x|}$

6. $f(x) = e^x - e^{-x}$

7. $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0 \\ -x^2, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} x + 5, & -2 < x < 0 \\ -x + 5, & 0 \le x < 2 \end{cases}$

9. $f(x) = x^3, \quad 0 \le x \le 2$

10. $f(x) = |x^5|$

En los problemas 11 a 24 desarrolle cada función dada en una serie adecuada de cosenos o senos.

11. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$

13. $f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$

14. $f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$

15. $f(x) = x^2, \quad -1 < x < 1$

16. $f(x) = x|x|, \quad -1 < x < 1$

17. $f(x) = \pi^2 - x^2, \quad -\pi < x < \pi$

18. $f(x) = x^3, \quad -\pi < x < \pi$

19. $f(x) = \begin{cases} x - 1, & -\pi < x < 0 \\ x + 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 < x < 0 \\ x - 1, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < -1 \\ -x, & -1 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} -\pi, & -2\pi < x < -\pi \\ x, & -\pi \le x < \pi \\ \pi, & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$

23. $f(x) = |\operatorname{sen} x|, \quad -\pi < x < \pi$

24. $f(x) = \cos x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

En los problemas 25 a 34, encuentre los desarrollos en series de cosenos o senos en un semiintervalo de la función dada.

25. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$

27. $f(x) = \cos x, \quad 0 < x < \pi/2$

28. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < \pi$

29. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi \\ x - \pi, & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$

31. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

33. $f(x) = x^2 + x, \quad 0 < x < 1$

34. $f(x) = x(2 - x), \quad 0 < x < 2$

En los problemas 35 a 38 desarrolle la función dada en una serie de Fourier.

35. $f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2\pi$

36. $f(x) = x, \quad 0 < x < \pi$

37. $f(x) = x + 1, \quad 0 < x < 1$

38. $f(x) = 2 - x, \quad 0 < x < 2$

En los problemas 39 y 40, proceda como en el ejemplo 4 y encuentre una solución particular $x_p(t)$ de la ecuación (11) cuando $m = 1$, $k = 10$ y la fuerza impulsora $f(t)$ es la que se indica. Suponga que cuando $f(t)$ se extiende hacia el eje negativo de t en forma periódica, la función resultante es impar.

39. $f(t) = \begin{cases} 5, & 0 < t < \pi \\ -5, & \pi < t < 2\pi \end{cases}; \quad f(t + 2\pi) = f(t)$

40. $f(t) = 1 - t, \quad 0 < t < 2; \quad f(t + 2) = f(t)$

En los problemas 41 y 42 proceda como en el ejemplo 4 para encontrar una solución particular $x_p(t)$ de la ecuación (11) cuando $m = \frac{1}{4}$, $k = 12$, y la fuerza impulsora $f(t)$ dada. Suponga que cuando $f(t)$ se extiende a valores negativos de t en forma periódica, la función resultante es par.

41. $f(t) = 2\pi t - t^2, \quad 0 < t < 2\pi; \quad f(t + 2\pi) = f(t)$

42. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 1 - t, & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}; \quad f(t + 1) = f(t)$

43. **a)** Resuelva la ecuación diferencial del problema 39, $x'' + 10x = f(t)$, sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 0, x'(0) = 0$.

b) Use un SAC para trazar la gráfica de la solución $x(t)$ del inciso a).

44. **a)** Resuelva la ecuación diferencial del problema 41, $\frac{1}{4}x'' + 12x = f(t)$, sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 1, x'(0) = 0$.

b) Use un SAC para trazar la gráfica de la solución $x(t)$ del inciso a).

45. Suponga que una viga uniforme de longitud L está simplemente apoyada en $x = 0$ y $x = L$. Cuando la carga por unidad de longitud es $w(x) = w_0x/L$, $0 < x < L$, entonces la ecuación diferencial de la flexión $y(x)$ es

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{w_0x}{L},$$

donde E, I y w_0 son constantes. (Véase la ecuación (4) de la sección 5.2).

a) Desarrolle $w(x)$ en una serie de senos en un semiintervalo.

b) Utilice el método del ejemplo 4 para encontrar una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación diferencial.

46. Proceda como en el problema 45 para encontrar la flexión, $y_p(x)$, cuando la carga por unidad de longitud está dada en la figura 11.3.13.

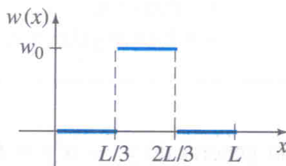


FIGURA 11.3.13 Gráfica del problema 46.

47. Cuando una viga uniforme está soportada por un cimiento elástico y sujeta a una carga $w(x)$ por unidad de longitud, la ecuación diferencial de su flexión $y(x)$ es

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + ky = w(x),$$

donde k es el módulo del cimiento. Suponga que la viga y el cimiento elástico tienen longitud infinita (esto es que $-\infty < x < \infty$) y que la carga por unidad de longitud es la función periódica

$$w(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\pi/2 \\ w_0, & -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ 0 & \pi/2 < x < \pi \end{cases} \quad w(x + 2\pi) = w(x).$$

Utilice el método del ejemplo 4 para determinar una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación diferencial.

Problemas para analizar

48. Demuestre las propiedades a), c), d), f) y g) del teorema 11.3.1.

49. Sólo existe una función que es al mismo tiempo par e impar. ¿Cuál es?

50. Como sabemos del capítulo 4, la solución general de la ecuación diferencial del problema 47 es $y = y_c + y_p$. Analice cómo se puede fundamentar en física que la solución del problema 47 es solamente y_p. [*Sugerencia*: Considere $y = y_c + y_p$ conforme $x \to \pm\infty$].

Tarea para el laboratorio de computación

En los problemas 51 y 52 use un SAC para trazar las gráficas de las sumas parciales $\{S_N(x)\}$ de la serie trigonométrica respectiva. Experimente con distintos valores de N y con gráficas en diferentes intervalos del eje x. Utilice sus gráficas para proponer una expresión de forma cerrada para una función f definida en $0 < x < L$ que esté representada por la serie.

51. $$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{1 - 2(-1)^n}{n}\operatorname{sen} nx\right]$$

52. $$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi}{2}x$$

53. ¿Es única su respuesta del problema 51 o del 52? Dada una función f definida en un intervalo simétrico respecto al origen $(-a, a)$ que tiene la misma serie trigonométrica

a) como en el problema 51,

b) como en el problema 52.

11.4 PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

REPASO DE MATERIAL

- En la sección 5.2 se presentaron los conceptos de eigenvalores y eigenvectores. Se le recomienda mucho que repase esta sección (especialmente el ejemplo 2).

INTRODUCCIÓN En esta sección estudiaremos algunos tipos especiales de problemas con valores en la frontera en los que la ecuación diferencial ordinaria en el problema contiene un parámetro λ. Los valores de λ para los que el PVF tiene soluciones no triviales llamados **eigenvalores** y las soluciones correspondientes se llaman **eigenfunciones**. Los problemas con valores en la frontera de esta clase son especialmente importantes en los capítulos 12 y 13. En esta sección también vemos que existe una conexión entre los conjuntos ortogonales y las eigenfunciones de un problema con valores en la frontera.

REPASO DE LAS ED Por conveniencia, repasaremos aquí algunas EDO y sus soluciones generales que se presentarán con frecuencia en las secciones y capítulos siguientes. El símbolo α representa una constante.

Ecuaciones con coeficientes constantes	**Soluciones generales**
$y' + \alpha y = 0$	$y = c_1e^{-\alpha x}$
$y'' + \alpha^2 y = 0, \quad \alpha > 0$	$y = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x$
$y'' - \alpha^2 y = 0, \quad \alpha > 0$	$\begin{cases} y = c_1e^{-\alpha x} + c_2e^{\alpha x}, \text{ o} \\ y = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x \end{cases}$
Ecuación de Cauchy-Euler	**Soluciones generales, $x > 0$**
$x^2y'' + xy' - \alpha^2 y = 0, \quad \alpha \geq 0$	$\begin{cases} y = c_1x^{-\alpha} + c_2x^{\alpha}, & \alpha > 0 \\ y = c_1 + c_2 \ln x, & \alpha = 0 \end{cases}$
Ecuación paramétrica de Bessel ($\nu = 0$)	**Solución general, $x > 0$**
$xy'' + y' + \alpha^2 xy = 0,$	$y = c_1J_0(\alpha x) + c_2Y_0(\alpha x)$
Ecuación de Legendre ($n = 0, 1, 2, \ldots$)	**Las soluciones particulares son polinomios**
$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0,$	$y = P_0(x) = 1,$ $y = P_1(x) = x,$ $y = P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \ldots$

Considerando las dos formas de la solución general de $y'' - \alpha^2 y = 0$, en el ejemplo 1 haremos uso inmediatamente de la siguiente regla informal así como en análisis futuros:

Utilice la forma exponencial $y = c_1e^{-\alpha x} + c_2e^{\alpha x}$ cuando el dominio de x es un intervalo infinito o semiinfinito; utilice la forma hiperbólica $y = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x$ cuando el dominio de x es un intervalo finito.

■ Esta regla será útil en los capítulos 12 a 14.

EIGENVALORES Y EIGENFUNCIONES Las funciones ortogonales surgen al resolver ecuaciones diferenciales. Además, se puede generar un conjunto ortogonal de funciones al resolver un problema con valores en la frontera con dos puntos que impli-

que una ecuación diferencial de segundo orden lineal que tenga un parámetro λ. En el ejemplo 2 de la sección 5.2, vimos que el problema con valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0, \tag{1}$$

tiene soluciones no triviales sólo cuando el parámetro λ toma los valores $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, llamados **eigenvalores**. Las correspondientes soluciones no triviales $y_n = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ o simplemente $y = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ se llaman **eigenfunciones** del problema. Por ejemplo, para el problema con valores en la frontera (1),

↓ no es un eigenvalor

PVF: $y'' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$

Solución trivial: $y = 0$ ← nunca es una eigenfunción

↓ es un eigenvalor ($n = 3$)

PVF: $y'' + \dfrac{9\pi^2}{L^2}\, y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$

Solución no trivial: $y_3 = \operatorname{sen}(3\pi x/L)$ ← eigenfunción

Para nuestros fines en este capítulo es importante reconocer que el conjunto $\{\operatorname{sen}(n\pi x/L)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ es el conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[0, L]$ que se usa como base para la serie de Fourier de senos. Véase el problema 10 de los ejercicios 11.1.

EJEMPLO 1 Eigenvalores y eigenfunciones

Considere el problema con valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0. \tag{2}$$

Como en el ejemplo 2 de la sección 5.2 hay tres posibles casos para el parámetro λ: cero, negativo o positivo; esto es, $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$, donde $\alpha > 0$. La solución de las ED

$$y'' = 0, \quad \lambda = 0, \tag{3}$$
$$y'' - \alpha^2 y = 0, \quad \lambda = -\alpha^2, \tag{4}$$
$$y'' + \alpha^2 y = 0, \quad \lambda = \alpha^2, \tag{5}$$

son, respectivamente,

$$y = c_1 + c_2 x, \tag{6}$$
$$y = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x, \tag{7}$$
$$y = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x. \tag{8}$$

Cuando las condiciones en la frontera, $y'(0) = 0$, $y'(L) = 0$ se aplican a cada una de estas soluciones, de la ecuación (6) se obtiene $y = c_1$, de la ecuación (7) sólo se obtiene $y = 0$ y de la ecuación (8) se obtiene $y = c_1 \cos \alpha x$ *suponiendo* que $\alpha = n\pi/L$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Puesto que $y = c_1$ satisface que la ED en (3) y las condiciones de frontera para cualquier elección de c_1 *distinta de cero*, concluimos que $\lambda = 0$ es un eigenvalor. Por lo que los eigenvalores y las correspondientes eigenfunciones del problema son $\lambda_0 = 0$, $y_0 = c_1$, $c_1 \neq 0$ y $\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2/L^2$, $n = 1, 2, \ldots$, $y_n = c_1 \cos(n\pi x/L)$, $c_1 \neq 0$. Se puede, si se desea, tomar $c_1 = 1$ en cada caso. Observe también que la eigenfunción $y_0 = 1$ correspondiente al eigenvalor $\lambda_0 = 0$ se puede incorporar a la familia $y_n = \cos(n\pi x/L)$ si hacemos que $n = 0$. El conjunto $\{\cos(n\pi x/L)\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, es ortogonal en el intervalo $[0, L]$. En el problema 3 de los ejercicios 11.4 se le pedirá completar los detalles. ■

PROBLEMA REGULAR DE STURM-LIOUVILLE Los problemas (1) y (2) son casos especiales de un problema importante con valores en la frontera de dos puntos. Sean p, q, r y r' funciones de valor real continuas en un intervalo $[a, b]$ y sean $r(x) > 0$ y $p(x) > 0$ para todo x en el intervalo. Entonces

Resuelva:
$$\frac{d}{dx}[r(x)y'] + (q(x) + \lambda p(x))y = 0 \tag{9}$$

Sujeto a:
$$A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \tag{10}$$
$$A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \tag{11}$$

se dice que es un **problema regular de Sturm-Liouville**. Los coeficientes en las condiciones de frontera (10) y (11) se suponen reales e independientes de λ. Además, A_1 y B_1 no son iguales a cero y A_2 y B_2 no son iguales a cero. Los problemas con valores en la frontera en (1) y (2) son problemas regulares de Sturm-Liouville. De (1) podemos identificar $r(x) = 1$, $q(x) = 0$ y $p(x) = 1$ en la ecuación diferencial (9); en la condición frontera (10) identificamos $a = 0, A_1 = 1, B_1 = 0$, y en (11), $b = L, A_2 = 1, B_2 = 0$. De (2) las identificaciones serán $a = 0, A_1 = 0, B_1 = 1$ en (10), $b = L, A_2 = 0, B_2 = 1$ en (11).

La ecuación diferencial (9) es lineal y homogénea. Las condiciones de frontera en (10) y (11), ambas una combinación lineal de y y y' son *iguales a cero en un punto* y son también **homogéneas.** Una condición de frontera tal como $A_2 y(b) + B_2 y'(b) = C_2$, donde C_2 es una constante diferente de cero, es **no homogénea.** Un problema con valores en la frontera que consiste en una ecuación diferencial lineal homogénea y de condiciones en la frontera homogéneas es, por supuesto, llamado un PVF homogéneo; de otra manera, es no homogéneo. Las condiciones en la frontera (10) y (11) se llaman **separadas** porque cada condición implica sólo un punto en la frontera.

Puesto que un problema regular de Sturm-Liouville es un PVF homogéneo, tiene siempre la solución trivial $y = 0$. Sin embargo, esta solución no es de interés para nosotros. Como en el ejemplo 1, al resolver uno de estos problemas tratamos de buscar números λ (eigenvalores) y soluciones no triviales y que dependan de λ (eigenfunciones).

PROPIEDADES El teorema 11.4.1 es una lista de las propiedades más importantes del problema regular de Sturm-Liouville. Sólo demostraremos la última propiedad.

TEOREMA 11.4.1 Propiedades del problema regular de Sturm-Liouville

a) Existe un número infinito de eigenvalores reales que se pueden ordenar en forma creciente, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ tal que $\lambda_n \to \infty$ conforme $n \to \infty$.

b) Para cada eigenvalor existe sólo una eigenfunción (excepto los múltiplos diferentes de cero).

c) Las eigenfunciones que corresponden a diferentes eigenvalores son linealmente independientes.

d) El conjunto de eigenfunciones que corresponde al conjunto de los eigenvalores es ortogonal respecto a la función de peso $p(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN DE d) Sean y_m y y_n eigenfunciones correspondientes a los eigenvalores λ_m y λ_n, respectivamente. Entonces

$$\frac{d}{dx}[r(x)y'_m] + (q(x) + \lambda_m p(x))y_m = 0 \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}[r(x)y'_n] + (q(x) + \lambda_n p(x))y_n = 0. \tag{13}$$

Multiplicando la ecuación (12) por y_n y la ecuación (13) por y_m y restando las dos ecuaciones se obtiene

$$(\lambda_m - \lambda_n)p(x)y_m y_n = y_m \frac{d}{dx}[r(x)y_n'] - y_n \frac{d}{dx}[r(x)y_m'].$$

Integrando por partes este último resultado desde $x = a$ hasta $x = b$ obtenemos

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b p(x)y_m y_n\,dx = r(b)[y_m(b)y_n'(b) - y_n(b)y_m'(b)] - r(a)[y_m(a)y_n'(a) - y_n(a)y_m'(a)]. \tag{14}$$

Ahora las eigenfunciones y_m y y_n deben satisfacer ambas condiciones a la frontera (10) y (11). En particular, de (10) se tiene que

$$A_1 y_m(a) + B_1 y_m'(a) = 0$$
$$A_1 y_n(a) + B_1 y_n'(a) = 0.$$

Para que A_1 y B_1 satisfagan este sistema, ambas distintas de cero, el determinante de los coeficientes debe ser igual a cero:

$$y_m(a)y_n'(a) - y_n(a)y_m'(a) = 0.$$

Con un argumento similar aplicado a (11) también se obtiene

$$y_m(b)y_n'(b) - y_n(b)y_m'(b) = 0.$$

Puesto que los dos miembros del lado derecho de (8) son iguales a cero, hemos establecido la relación de ortogonalidad

$$\int_a^b p(x)y_m(x)y_n(x)\,dx = 0, \qquad \lambda_m \neq \lambda_n. \tag{15}$$ ■

EJEMPLO 2 Un problema regular de Sturm-Liouville

Resuelva el problema con valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0. \tag{16}$$

SOLUCIÓN Procedemos exactamente como en el ejemplo 1 considerando tres casos en los que el parámetro λ podría ser cero, negativo o positivo: $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$, y $\lambda = -\alpha^2 > 0$ donde $\alpha > 0$. Las soluciones de la ED para estos valores se muestran en (3)−(5). Para los casos $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$ encontramos que los PVF en (16) sólo tienen la solución trivial $y = 0$. Para $\lambda = \alpha^2 > 0$ la solución general de la ecuación diferencial es $y = c_1 \cos \alpha x + c_2$ sen αx. Ahora la condición $y(0) = 0$ implica que en esta solución $c_1 = 0$, así nos quedamos con $y = c_2$ sen αx. La segunda condición $y(1) + y'(1) = 0$ se satisface si

$$c_2 \operatorname{sen}\alpha + c_2\alpha\cos\alpha = 0.$$

En vista del requisito que $c_2 \neq 0$, la última ecuación se puede escribir como

$$\tan\alpha = -\alpha. \tag{17}$$

Si por un momento consideramos en (17) que $\tan x = -x$, entonces en la figura 11.4.1 se muestra la factibilidad de que exista un número infinito de raíces, en particular, las coordenadas x de los puntos donde la gráfica de $y = -x$ interseca el número infinito de ramas de la gráfica de $y = \tan x$. Los eigenvalores del PVF (16) son entonces $\lambda_n = \alpha_n^2$, donde α_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ son las raíces *positivas* consecutivas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ de (17). Con ayuda de un SAC se muestra con facilidad que redondeando a cuatro decimales, $\alpha_1 = 2.0288$, $\alpha_2 = 4.9132$, $\alpha_3 = 7.9787$ y $\alpha_4 = 11.0855$ y que las soluciones correspondientes son $y_1 =$ sen $2.0288x$, $y_2 =$ sen $4.9132x$, $y_3 =$ sen $7.9787x$ y $y_4 =$ sen $11.0855x$. En general, las eigenfunciones del problema son $\{\operatorname{sen}\alpha_n x\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

FIGURA 11.4.1 Raíces positivas $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de $\tan x = -x$.

Identificando $r(x) = 1$, $q(x) = 0$, $p(x) = 1$, $A_1 = 1$, $B_1 = 0$, $A_2 = 1$, $B_2 = 1$, vemos que la ecuación (16) es un problema regular de Sturm-Liouville. Concluimos que {sen $\alpha_n x$}, $n = 1, 2, 3, \ldots$ es un conjunto ortogonal respecto a la función de peso $p(x) = 1$ en el intervalo [0, 1]. ■

En algunos casos se puede demostrar la ortogonalidad de las soluciones de (9) sin necesidad de especificar una condición en la frontera en $x = a$ y en $x = b$.

PROBLEMA SINGULAR DE STURM-LIOUVILLE Existen otras condiciones importantes bajo las que buscamos las soluciones no triviales de la ecuación diferencial (9):

- $r(a) = 0$, y una condición de frontera del tipo dado en (11) está dada como $x = b$; (18)
- $r(b) = 0$, y una condición de frontera del tipo dado en (11) está dada como $x = a$; (19)
- $r(a) = r(b) = 0$, y no hay condición de frontera dada en $x = a$ o en $x = b$; (20)
- $r(a) = r(b)$, y las condiciones de frontera $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$. (21)

La ecuación diferencial (9) junto con una de las condiciones (18)−(20), se dice que es un problema **singular** con valores en la frontera. La ecuación (9) con las condiciones dadas en (21) se dice que es un problema con valores en la frontera **periódico** (las condiciones de frontera también se llaman periódicas). Observe que si decimos que $r(a) = 0$, entonces $x = a$ *puede* ser un punto singular de la ecuación diferencial y por tanto, una solución de (9) puede crecer sin límite conforme $x \to a$. Sin embargo, vemos de (14) que si $r(a) = 0$, no se necesita condición de frontera en $x = a$ para demostrar la ortogonalidad de las eigenfunciones suponiendo que estas soluciones estén limitadas en ese punto. Este último requisito asegura la existencia de las integrales que intervienen. Suponiendo que las soluciones de (9) estén acotadas en un intervalo cerrado $[a, b]$, podemos ver del examen de la ecuación (14) que

- si $r(a) = 0$, entonces la relación de ortogonalidad (15) es válida, sin ninguna condición dada en la frontera en $x = a$; (22)
- si $r(b) = 0$, entonces la relación de ortogonalidad (15) es válida sin ninguna condición dada en la frontera en $x = b$;* (23)
- si $r(a) = r(b) = 0$, entonces la relación de ortogonalidad (15) es válida sin ninguna condición dada en la frontera en $x = a$ o en $x = b$; (24)
- si $r(a) = r(b)$, entonces la relación de ortogonalidad (15) es válida con las condiciones en la frontera $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$. (25)

Observe que un problema de Sturm-Liouville es singular cuando el intervalo que se considera es infinito. Véanse los problemas 9 y 10 de los ejercicios 11.4.

FORMA AUTOADJUNTA Realizando la derivación que se indica en (9), vemos que la ecuación diferencial es igual a

$$r(x)y'' + r'(x)y' + (q(x) + \lambda p(x))y = 0. \tag{26}$$

El examen de la ecuación (26) podría conducir a creer que el coeficiente dado de y' es la derivada del coeficiente de y'', y que existen pocas ecuaciones diferenciales que tengan la forma de la ecuación (9). Por lo contrario, si los coeficientes son continuos y $a(x) \neq 0$ para toda x en algún intervalo, entonces *cualquier* ecuación diferencial de segundo orden

$$a(x)y'' + b(x)y' + (c(x) + \lambda d(x))y = 0 \tag{27}$$

se puede escribir en la así llamada **forma autoadjunta** (9). Para esto básicamente procedemos como en la sección 2.3, donde reescribimos una ecuación homogénea lineal de primer orden $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ en la forma $\frac{d}{dx}[\mu y] = 0$ dividiendo la ecuación

*Las condiciones (22) y (23) son equivalentes a elegir $A_1 = 0$, $B_1 = 0$ y $A_2 = 0$, $B_2 = 0$, respectivamente.

entre $a_1(x)$ y después multiplicando por el factor integrante $\mu = e^{\int P(x)dx}$, donde, se supone que no hay factores comunes, $P(x) = a_0(x)/a_1(x)$. Así que primero, dividimos la ecuación (27) por $a(x)$. Los primeros dos términos son $Y' + \dfrac{b(x)}{a(x)}Y + \cdots$, donde enfatizamos que hemos escrito $Y = y'$. Segundo, multiplicamos esta ecuación por el factor integrante $e^{\int(b(x)/a(x))dx}$, donde $a(x)$ y $b(x)$ se supone que no tienen factores en común:

$$\underbrace{e^{\int(b(x)/a(x))dx}Y' + \frac{b(x)}{a(x)}e^{\int(b(x)/a(x))dx}Y}_{\text{derivada de un producto}} + \cdots = \frac{d}{dx}\left[e^{\int(b(x)/a(x))dx}Y\right] + \cdots = \frac{d}{dx}\left[e^{\int(b(x)/a(x))dx}y'\right] + \cdots.$$

En resumen, dividiendo la ecuación (27) entre $a(x)$ y después multiplicando por $e^{\int(b(x)/a(x))dx}$, obtenemos

$$e^{\int(b/a)dx}y'' + \frac{b(x)}{a(x)}e^{\int(b/a)dx}y' + \left(\frac{c(x)}{a(x)}e^{\int(b/a)dx} + \lambda\frac{d(x)}{a(x)}e^{\int(b/a)dx}\right)y = 0. \qquad (28)$$

La ecuación (28) está en la forma deseada dada en la ecuación (26) y tiene la misma forma de la ecuación (9):

$$\frac{d}{dx}\underbrace{\left[e^{\int(b/a)dx}y'\right]}_{r(x)} + \left(\underbrace{\frac{c(x)}{a(x)}e^{\int(b/a)dx}}_{q(x)} + \lambda\underbrace{\frac{d(x)}{a(x)}e^{\int(b/a)dx}}_{p(x)}\right)y = 0$$

Por ejemplo, para expresar $2y'' + 6y' + \lambda y = 0$ en la forma autoadjunta, escribimos $y'' + 3y' + \lambda\frac{1}{2}y = 0$ y después multiplicando por $e^{\int 3dx} = e^{3x}$. La ecuación resultante es

$$\overset{r(x)}{\overset{\downarrow}{e^{3x}}}y'' + \overset{r'(x)}{\overset{\downarrow}{3e^{3x}}}y' + \lambda\overset{p(x)}{\overset{\downarrow}{\tfrac{1}{2}e^{3x}}}y = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d}{dx}\left[e^{3x}y'\right] + \lambda\,\frac{1}{2}e^{3x}y = 0$$

Ciertamente no es necesario escribir una ecuación diferencial de segundo orden (27) en la forma autoadjunta (9) para *resolver* la ED. Para nuestros fines usaremos la forma dada en la ecuación (9) para determinar la función de peso $p(x)$ que se necesita en la relación de ortogonalidad (15). Los dos ejemplos siguientes ilustran relaciones de ortogonalidad para funciones de Bessel y para polinomios de Legendre.

EJEMPLO 3 **Ecuación paramétrica de Bessel**

En la sección 6.3 vimos que la solución general de la ecuación paramétrica de Bessel de orden n es $x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - n^2)y = 0$, donde n es un entero fijo no negativo y α es un parámetro positivo. La solución general de esta ecuación es $y = c_1J_n(\alpha x) + c_2Y_n(\alpha x)$. Después de dividir la ecuación paramétrica de Bessel entre el primer coeficiente x^2 y multiplicando la ecuación resultante por el factor integrante $e^{\int(1/x)dx} = e^{\ln x} = x$, $x > 0$, obtenemos

$$xy'' + y' + \left(\alpha^2x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d}{dx}[xy'] + \left(\alpha^2x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0.$$

Comparando este último resultado con la forma autoadjunta (9), hacemos las identificaciones $r(x) = x$, $q(x) = -\frac{n^2}{x}$, $\lambda = \alpha^2$ y $p(x) = x$. Ahora $r(0) = 0$ y de las dos soluciones $J_n(\alpha x)$ y $Y_n(\alpha x)$, sólo $J_n(\alpha x)$ está acotada en $x = 0$. Por lo que de la ecuación (22), el

conjunto $\{J_n(\alpha_i x)\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, es ortogonal respecto a la función de peso $p(x) = x$ en un intervalo $[0, b]$. La relación de ortogonalidad es

$$\int_0^b xJ_n(\alpha_i x)J_n(\alpha_j x)\,dx = 0, \qquad \lambda_i \neq \lambda_j, \tag{29}$$

suponiendo que los α_i y por tanto los eigenvalores $\lambda_i = \alpha_i^2$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, se definen por medio de una condición en la frontera en $x = b$ del tipo dado en la ecuación (11):

$$A_2 J_n(\alpha b) + B_2 \alpha J_n'(\alpha b) = 0.^* \tag{30}$$ ■

Para cualquier elección de A_2 y B_2, ninguna igual a cero, se sabe que la ecuación (30) tiene un número infinito de raíces $x_i = \alpha_i b$. Entonces los eigenvalores son $\lambda_i = \alpha_i^2 = (x_i/b)^2$. En el siguiente capítulo se tratará más acerca de los eigenvalores.

EJEMPLO 4 Ecuación de Legendre

La ecuación diferencial de Legendre $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ es exactamente de la forma dada en la ecuación (26) con $r(x) = 1 - x^2$ y $r'(x) = -2x$. Por lo que la forma autoadjunta (9) es inmediata,

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)y'\right] + n(n + 1)y = 0. \tag{31}$$

De la ecuación (31) podemos además identificar $q(x) = 0$, $\lambda = n(n + 1)$ y $p(x) = 0$. Recuerde de la sección 6.3 que cuando $n = 0, 1, 2, \ldots$ la ED de Legendre tiene soluciones polinomiales $P_n(x)$. Ahora se puede expresar la observación de que $r(-1) = r(1) = 0$ junto con el hecho de que los polinomios de Legendre $Pn(x)$ que son las únicas soluciones de (31) que tienen límite en el intervalo cerrado $[-1, 1]$ por lo que se concluye de la ecuación (24) que el conjunto $\{P_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ es ortogonal respecto a la función de peso $p(x) = 1$ en $[-1, 1]$. La relación de ortogonalidad es

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$ ■

*El factor extra de α proviene de la regla de la cadena: $\frac{d}{dx}J_n(\alpha x) = J_n'(\alpha x)\frac{d}{dx}\alpha x = \alpha J_n'(\alpha x)$.

EJERCICIOS 11.4

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-19.

En los problemas 1 y 2, encuentre las eigenfunciones y la ecuación que define los eigenvalores de cada problema con valores en la frontera. Use un SAC para calcular el valor aproximado de los cuatro primeros eigenvalores, λ_1, λ_2, λ_3 y λ_4. De las eigenfunciones que corresponden a esas aproximaciones.

1. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0$

2. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) + y'(0) = 0, y(1) = 0$

3. Considere $y'' + \lambda y = 0$ sujeta a $y'(0) = 0$, $y'(L) = 0$. Demuestre que las eigenfunciones son

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{L}x, \cos\frac{2\pi}{L}x, \ldots\right\}.$$

Este conjunto, que es ortogonal en $[0, L]$, es la base de la serie de Fourier de cosenos.

4. Considere la ecuación $y'' + \lambda y = 0$, sujeta a las condiciones periódicas en la frontera $y(-L) = y(L)$, $y'(-L) = y'(L)$. Demuestre que las eigenfunciones son

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{L}x, \cos\frac{2\pi}{L}x, \ldots, \operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{L}x, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{L}x, \ldots\right\}.$$

Este conjunto, que es ortogonal en $[-L, L]$, es la base de las series de Fourier.

5. Encuentre la norma cuadrada de cada eigenfunción del problema 1.

6. Demuestre que para las eigenfunciones del ejemplo 2,

$$\|\operatorname{sen}\alpha_n x\|^2 = \tfrac{1}{2}[1 + \cos^2\alpha_n].$$

7. a) Encuentre los eigenvalores y las eigenfunciones del problema con valores en la frontera

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(5) = 0.$$

b) Escriba la ecuación diferencial en la forma autoadjunta.

c) Dé una relación de ortogonalidad.

8. a) Encuentre los eigenvalores y las eigenfunciones del problema con valores en la frontera

$$y'' + y' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 0.$$

b) Escriba la ecuación diferencial en la forma autoadjunta.

c) Dé una relación de ortogonalidad.

9. Ecuación diferencial de Laguerre

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

tiene soluciones polinomiales $L(x)$. Escriba la ecuación en su forma autoadjunta y dé una relación de ortogonalidad.

10. Ecuación diferencial de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

tiene soluciones polinomiales $H_n(x)$. Escriba la ecuación en su forma autoadjunta y dé una relación de ortogonalidad.

11. Considere el problema regular de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left[(1 + x^2)y'\right] + \frac{\lambda}{1 + x^2}y = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

a) Encuentre los eigenvalores y las eigenfunciones del problema con valores en la frontera. [*Sugerencia*: Sea $x = \tan\theta$ y después utilice la regla de la cadena.]

b) Dé una relación de ortogonalidad.

12. a) Encuentre las eigenfunciones y la ecuación que define los eigenvalores del problema con valores en la frontera

$$x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - 1)y = 0, \qquad x > 0,$$

y está acotada en $x = 0$, $y(3) = 0$.

Sea $\lambda = \alpha^2$, $\alpha > 0$.

b) Utilice la tabla 6.1 de la sección 6.3, encuentre los valores aproximados de los cuatro primeros eigenvalores, λ_1, λ_2, λ_3 y λ_4.

Problemas para analizar

13. Considere el caso especial del problema regular de Sturm-Liouville en el intervalo $[a, b]$:

$$\frac{d}{dx}[r(x)y'] + \lambda p(x)y = 0,$$

$$y'(a) = 0, \quad y'(b) = 0.$$

¿Es $\lambda = 0$ un eigenvalor del problema? Defienda su respuesta.

Tarea para el laboratorio de computación

14. a) Dé una relación de ortogonalidad para el problema de Sturm-Liouville del problema 1.

b) Utilice un SAC como ayuda para comprobar la relación de ortogonalidad para las eigenfunciones y_1 y y_2 que corresponden a los dos primeros eigenvalores λ_1 y λ_2, respectivamente.

15. a) Dé una relación de ortogonalidad para el problema 2 de Sturm-Liouville.

b) Utilice un SAC como ayuda para comprobar la relación de ortogonalidad para las eigenfunciones y_1 y y_2 que correspondan a los dos primeros eigenvalores λ_1 y λ_2, respectivamente.

11.5 SERIES DE BESSEL Y LEGENDRE

REPASO DE MATERIAL

- Debido a que los resultados de los ejemplos 3 y 4 de la sección 11.4 juegan un importante papel en el análisis que sigue, se le recomienda que lea nuevamente estos ejemplos en conjunción con las ecuaciones de la (6) a la (11) de la sección 11.1.

INTRODUCCIÓN La serie de Fourier, la serie de Fourier de cosenos y la serie de Fourier de senos son tres formas de desarrollar una función en términos de un conjunto ortogonal de funciones. Pero esos desarrollos de ninguna manera se limitan a conjuntos ortogonales de funciones *trigonométricas*. En la sección 11.1 vimos que una función f definida en un intervalo (a, b) se puede desarrollar, al menos formalmente, en términos de cualquier conjunto de funciones $\{\phi_n(x)\}$ que sea ortogonal respecto a una función de peso en $[a, b]$. Muchos de estos desarrollos en series ortogonales o series de Fourier generalizadas surgen de problemas de Sturm-Liouville que, a su vez, se originan de intentos para resolver ecuaciones diferenciales parciales lineales que sirven como modelos de sistemas físicos. Las series de Fourier y los desarrollos en series ortogonales, así como las dos series que describiremos en esta sección, reaparecen en consideraciones subsecuentes de estas aplicaciones en los capítulos 12 y 13.

11.5.1 SERIE DE FOURIER-BESSEL

En el ejemplo 3 de la sección 11.4 vimos que para un valor fijo de n funciones de Bessel $\{J_n(\alpha_i x)\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, es ortogonal respecto a la función de peso $p(x) = x$ en un intervalo $[0, b]$ siempre que los α_i están definidos por medio de una condición de frontera de la forma

$$A_2 J_n(\alpha b) + B_2 \alpha J_n'(\alpha b) = 0. \tag{1}$$

Los eigenvalores del correspondiente problema de Sturm-Liouville son $\lambda_i = \alpha_i^2$. De (7) y (8) de la sección 11.1, la serie ortogonal o serie generalizada de Fourier del desarrollo de una función f definida en $(0, b)$, en términos de este conjunto ortogonal es

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\alpha_i x), \tag{2}$$

donde

$$c_i = \frac{\int_0^b x J_n(\alpha_i x) f(x)\, dx}{\|J_n(\alpha_i x)\|^2}. \tag{3}$$

La norma cuadrada de la función $J_n(\alpha_i x)$ está definida por (11) de la sección 11.1.

$$\|J_n(\alpha_i x)\|^2 = \int_0^b x J_n^2(\alpha_i x)\, dx. \tag{4}$$

La serie (2) con coeficientes definidos por la ecuación (3) se llama **serie de Fourier-Bessel** o simplemente, **serie de Bessel**.

RELACIONES DE RECURRENCIA DIFERENCIALES Estas relaciones de recurrencia diferenciales que se dieron en las ecuaciones (21) y (20) de la sección 6.3, son frecuentemente útiles en la evaluación de los coeficientes (3). Por conveniencia reproducimos estas relaciones aquí:

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \tag{6}$$

NORMA CUADRADA El valor de la norma cuadrada (4) depende de cómo los eigenvalores $\lambda_i = \alpha_i^2$ están definidos. Si $y = J_n(\alpha x)$, entonces del ejemplo 3 de la sección 11.4 sabemos que

$$\frac{d}{dx}[xy'] + \left(\alpha^2 x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0.$$

Despues de multiplicar por $2xy'$, esta ecuación se puede escribir como sigue:

$$\frac{d}{dx}[xy']^2 + (\alpha^2 x^2 - n^2)\frac{d}{dx}[y]^2 = 0.$$

Integrando por partes este último resultado en $[0, b]$ entonces obtenemos

$$2\alpha^2 \int_0^b xy^2\, dx = \left([xy']^2 + (\alpha^2 x^2 - n^2)y^2\right)\Big|_0^b.$$

Puesto que $y = J_n(\alpha x)$, el límite inferior es cero ya que $J_n(0) = 0$ para $n > 0$. Además para $n = 0$ la cantidad $[xy']^2 + \alpha^2 x^2 y^2$ es cero en $x = 0$. Por lo que

$$2\alpha^2 \int_0^b x J_n^2(\alpha x)\, dx = \alpha^2 b^2 [J_n'(\alpha b)]^2 + (\alpha^2 b^2 - n^2)[J_n(\alpha b)]^2, \tag{7}$$

donde hemos utilizado la regla de la cadena para escribir $y' = \alpha J_n'(\alpha x)$.

Ahora consideremos tres casos de (1).

CASO I: Si elegimos $A_2 = 1$ y $B_2 = 0$, entonces (1) es

$$J_n(\alpha b) = 0. \tag{8}$$

Hay un número infinito de raíces positivas, $x_i = \alpha_i b$ de (8) (véase la figura 6.3.1), que define los α_i como $\alpha_i = x_i/b$. Los eigenvalores son positivos y están dados por $\lambda_i = \alpha_i^2 = x_i^2/b^2$. No se obtienen eigenvalores nuevos a partir de las raíces negativas de la ecuación (8) porque $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$. (Véase la página 245.) El número 0 no es un eigenvalor para cualquier n porque $J_n(0) = 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $J_0(0) = 1$. En otras palabras, si $\lambda = 0$, llegamos a la función trivial (que nunca es una eigenfunción) para $n = 1,2, 3, \ldots$ y para $n = 0$, $\lambda = 0$ (o de forma equivalente, $\alpha = 0$) no satisface a la ecuación en (8). Cuando la ecuación (6) se escribe en la forma $xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$, de (7) y (8) se tiene que la norma cuadrada de $J_n(\alpha_i x)$ es

$$\|J_n(\alpha_i x)\|^2 = \frac{b^2}{2} J_{n+1}^2(\alpha_i b). \tag{9}$$

CASO II: Si elegimos $A_2 = h \geq 0$, y $B_2 = b$, entonces (1) es

$$hJ_n(\alpha b) + \alpha b J'_n(\alpha b) = 0. \tag{10}$$

La ecuación (10) tiene un número infinito de raíces positivas $x_i = \alpha_i b$ para cada entero positivo $n = 1, 2, 3, \ldots$ Como antes, los eigenvalores se obtienen de $\lambda_i = \alpha_i^2 = x_i^2/b^2$. $\lambda = 0$ no es eigenvalor para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Al sustituir $\alpha_i b J'_n(\alpha_i b) = -h J_n(\alpha_i b)$ en la ecuación (7), encontramos que la norma cuadrada de $J_n(\alpha_i x)$ es ahora

$$\|J_n(\alpha_i x)\|^2 = \frac{\alpha_i^2 b^2 - n^2 + h^2}{2\alpha_i^2} J_n^2(\alpha_i b). \tag{11}$$

CASO III: Si $h = 0$ y $n = 0$ en (10), los α_i se definen a partir de las raíces de

$$J'_0(\alpha b) = 0. \tag{12}$$

Aun cuando esta ecuación es sólo un caso especial de (10), es el único caso para el cual $\lambda = 0$ es un eigenvalor. Para ver esto, observemos que para $n = 0$ el resultado en (6) implica que $J'_0(\alpha b) = 0$ es equivalente a $J_1(\alpha b) = 0$. Puesto que $x_1 = 0$ es una raíz de esta última ecuación, $\alpha_1 = 0$ y como $J_0(0) = 1$ es no trivial, concluimos de $\lambda_1 = \alpha_1^2 = x_1^2/b^2$ que $\lambda_1 = 0$ es un eigenvalor. Pero obviamente, no podemos utilizar (11) cuando $\alpha_1 = 0$, $h = 0$ y $n = 0$. Sin embargo, de la norma cuadrada (4)

$$\|1\|^2 = \int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}. \tag{13}$$

Para $\alpha_i > 0$ podemos utilizar (11) con $h = 0$ y $n = 0$:

$$\|J_0(\alpha_i x)\|^2 = \frac{b^2}{2} J_0^2(\alpha_i b). \tag{14}$$

La siguiente definición resume las tres formas de la serie (2) correspondientes a la norma cuadrada.

DEFINICIÓN 11.5.1 Serie de Fourier-Bessel

La **serie de Fourier-Bessel** de una función f definida en el intervalo $(0, b)$ está dada por:

i)
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\alpha_i x) \tag{15}$$

$$c_i = \frac{2}{b^2 J_{n+1}^2(\alpha_i b)} \int_0^b x J_n(\alpha_i x) f(x)\,dx, \tag{16}$$

donde los α_i están definidos por $J_n(\alpha b) = 0$.

ii)
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\alpha_i x) \tag{17}$$

$$c_i = \frac{2\alpha_i^2}{(\alpha_i^2 b^2 - n^2 + h^2)J_n^2(\alpha_i b)} \int_0^b x J_n(\alpha_i x) f(x)\, dx, \tag{18}$$

donde los α_i están definidos por $hJ_n(\alpha b) + \alpha b J_n'(\alpha b) = 0$.

iii)
$$f(x) = c_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i J_0(\alpha_i x) \tag{19}$$

$$c_1 = \frac{2}{b^2}\int_0^b x f(x)\, dx, \quad c_i = \frac{2}{b^2 J_0^2(\alpha_i b)} \int_0^b x J_0(\alpha_i x) f(x)\, dx, \tag{20}$$

donde los α_i están definidos por $J_0'(\alpha b) = 0$.

CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE FOURIER-BESSEL Las condiciones de suficiencia para la convergencia de una serie de Fourier-Bessel no presentan restricciones particulares.

TEOREMA 11.5.1 Condiciones para la convergencia

Si f y f' son continuas por partes en el intervalo abierto $(0, b)$, entonces el desarrollo de f en serie de Fourier-Bessel converge a $f(x)$ en cualquier punto donde f sea continua y el promedio

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

en un punto donde f sea discontinua.

EJEMPLO 1 Desarrollo en serie de Fourier-Bessel

Desarrolle $f(x) = x$, $0 < x < 3$, en una serie de Fourier-Bessel utilizando funciones de Bessel de primer orden que satisfagan la condición de frontera $J_1(3\alpha) = 0$.

SOLUCIÓN Usamos la ecuación (15) donde los coeficientes c_i están dados por la ecuación (16) con $b = 3$.

$$c_i = \frac{2}{3^2 J_2^2(3\alpha_i)} \int_0^3 x^2 J_1(\alpha_i x)\, dx.$$

Para evaluar esta integral hacemos $t = \alpha_i x$, $dx = dt/\alpha_i$, $x^2 = t^2/\alpha_i^2$, y usando la ecuación (5) en la forma $\frac{d}{dt}[t^2 J_2(t)] = t^2 J_1(t)$:

$$c_i = \frac{2}{9\alpha_i^3 J_2^2(3\alpha_i)} \int_0^{3\alpha_i} \frac{d}{dt}[t^2 J_2(t)]\, dt = \frac{2}{\alpha_i J_2(3\alpha_i)}.$$

Por tanto, el desarrollo deseado es

$$f(x) = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i J_2(3\alpha_i)} J_1(\alpha_i x).$$ ■

Se le pedirá en el problema 1 de los ejercicios 11.5 que encuentre los primeros cuatro valores de los α_i para la serie de Fourier-Bessel.

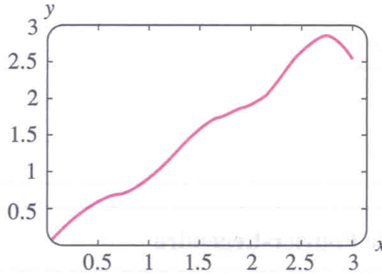
EJEMPLO 2 Desarrollo en serie de Fourier-Bessel

Si se definen los α_i del ejemplo 1 con $J_1(3\alpha) + \alpha J_1'(3\alpha) = 0$, entonces lo único que cambia en el desarrollo es el valor de la norma cuadrada. Multiplicando por 3 la condición en la frontera se obtiene $3J_1(3\alpha) + 3\alpha J_1'(3\alpha) = 0$, que ahora coincide con la ecuación (10) cuando $h = 3$, $b = 3$ y $n = 1$. Por lo que, de las ecuaciones (18) y (17) se obtiene respectivamente,

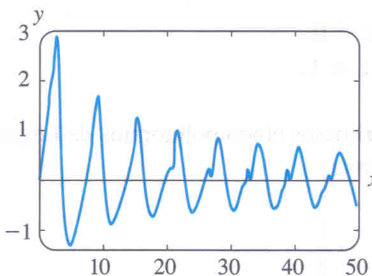
$$c_i = \frac{18\alpha_i J_2(3\alpha_i)}{(9\alpha_i^2 + 8)J_1^2(3\alpha_i)}$$

y

$$f(x) = 18\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i J_2(3\alpha_i)}{(9\alpha_i^2 + 8)J_1^2(3\alpha_i)} J_1(\alpha_i x). \quad ■$$



a) $S_5(x)$, $0 < x < 3$



b) $S_{10}(x)$, $0 < x < 50$

FIGURA 11.5.1 Gráficas de dos sumas parciales de una serie de Fourier-Bessel.

USO DE COMPUTADORAS Como las funciones de Bessel son "funciones incorporadas" en los SAC, es una tarea directa encontrar los valores aproximados de los eigenvalores α_i y de los coeficientes c_i en una serie de Fourier-Bessel. Por ejemplo, en la ecuación (10) podemos considerar que $x_i = \alpha_i b$ es una raíz positiva de la ecuación $hJ_n(x) + xJ_n'(x) = 0$. Así en el ejemplo 2 hemos usado un SAC para determinar las cinco primeras raíces positivas, x_i de $3J_1(x) + xJ_1'(x) = 0$ y a partir de esas raíces obtenemos los cinco primeros eigenvalores de α_i: $\alpha_1 = x_1/3 = 0.98320$, $\alpha_2 = x_2/3 = 1.94704$, $\alpha_3 = x_3/3 = 2.95758$, $\alpha_4 = x_4/3 = 3.98538$ y $\alpha_5 = x_5/3 = 5.02078$. Conociendo las raíces $x_i = 3\alpha_i$ y los α_i, utilizamos nuevamente un SAC para calcular los valores numéricos de $J_2(3\alpha_i)$, $J_1^2(3\alpha_i)$, y por último, los coeficientes c_i. De esta manera encontramos que la quinta suma parcial $S_5(x)$ de la representación en serie de Fourier-Bessel de $f(x) = x$, $0 < x < 3$ en el ejemplo 2, es

$$S_5(x) = 4.01844J_1(0.98320x) - 1.86937J_1(1.94704x)$$
$$+ 1.07106J_1(2.95758x) - 0.70306J_1(3.98538x) + 0.50343J_1(5.02078x).$$

En la figura 11.5.1a se presenta la gráfica de $S_5(x)$ en el intervalo (0, 3). En la figura 11.5.1b hemos trazado la gráfica de $S_{10}(x)$ en el intervalo (0, 50). Observe que fuera del intervalo de definición (0, 3) la serie no converge a una extensión periódica de f porque las funciones de Bessel no son funciones periódicas. Véanse los problemas 11 y 12 de los ejercicios 11.5.

11.5.2 SERIE DE FOURIER-LEGENDRE

Del ejemplo 4 de la sección 11.4, sabemos que el conjunto de polinomios de Legendre $\{P_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, es ortogonal respecto a la función de peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[-1, 1]$. Además, se puede demostrar que la norma cuadrada de un polinomio $P_n(x)$ depende de n en la siguiente forma:

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

El desarrollo de una función en serie ortogonal en términos de polinomios de Legendre se resume en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 11.5.2 Serie de Fourier-Legendre

La **serie de Fourier-Legendre** de una función f en el intervalo $(-1, 1)$ está dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \quad (21)$$

donde

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx. \quad (22)$$

CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE FOURIER-LEGENDRE En el siguiente teorema se presentan las condiciones de suficiencia para la convergencia de una serie de Fourier-Legendre.

TEOREMA 11.5.2 Condiciones de convergencia

Si f y f' son continuas por tramos en el intervalo abierto $(-1, 1)$, entonces una serie de Fourier-Legendre de f converge a $f(x)$ en cualquier punto donde f es continua y al promedio

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

en un punto donde f es discontinua.

EJEMPLO 3 Desarrollo en una serie de Fourier-Legendre

Escriba los cuatro primeros términos distintos de cero de la serie de Fourier-Legendre de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < 1. \end{cases}$$

SOLUCIÓN En la página 249 se presentan los primeros cinco polinomios de Legendre. A partir de éstos y la ecuación (22) encontramos

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_0(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 1 \cdot 1\,dx = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_1(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_0^1 1 \cdot x\,dx = \frac{3}{4}$$

$$c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_2(x)\,dx = \frac{5}{2}\int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,dx = 0$$

$$c_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_3(x)\,dx = \frac{7}{2}\int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\,dx = -\frac{7}{16}$$

$$c_4 = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_4(x)\,dx = \frac{9}{2}\int_0^1 1 \cdot \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\,dx = 0$$

$$c_5 = \frac{11}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_5(x)\,dx = \frac{11}{2}\int_0^1 1 \cdot \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)\,dx = \frac{11}{32}.$$

Por tanto $$f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \frac{11}{32}P_5(x) + \cdots.$$ ■

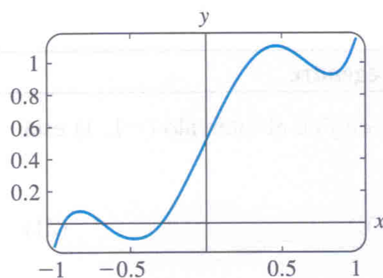


FIGURA 11.5.2 Suma parcial de $S_5(x)$ de la serie de Fourier-Legendre.

Al igual que las funciones de Bessel, los polinomios de Legendre son funciones incorporadas en programas de cómputo algebraicos como *Maple* y *Mathematica*, por lo que cada uno de los coeficientes que acabamos de enlistar se puede encontrar utilizando la aplicación de integración de esos programas. En realidad, usando un SAC encontramos además que $c_6 = 0$ y $c_7 = -\frac{65}{256}$. La quinta suma parcial de la representación en forma de serie de Fourier-Legendre de la función f definida en el ejemplo 3 es entonces

$$S_5(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \frac{11}{32}P_5(x) - \frac{65}{256}P_7(x).$$

En la figura 11.5.2 se presenta la gráfica de $S_5(x)$ en el intervalo $(-1, 1)$.

FORMA ALTERNATIVA DE LA SERIE En sus aplicaciones, la serie de Fourier-Legendre se presenta en una forma alternativa. Si se hace que $x = \cos\theta$, entonces $x = 1$ implica que $\theta = 0$, mientras que $x = -1$ implica que $\theta = \pi$. Puesto que $dx = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$ y las ecuaciones (21) y (22) se convierten respectivamente en

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\theta) \tag{23}$$

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} F(\theta) P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta, \tag{24}$$

donde $f(\cos\theta)$ se ha reemplazado con $F(\theta)$.

EJERCICIOS 11.5

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-19.

11.5.1 SERIE DE FOURIER-BESSEL

En los problemas 1 y 2 utilice la tabla 6.1 de la sección 6.3.

1. Encuentre los primeros cuatro términos $\alpha_i > 0$ definida por $J_1(3\alpha) = 0$.

2. Encuentre los primeros cuatro términos $\alpha_i \geq 0$ definida por $J_0'(2\alpha) = 0$.

En los problemas 3 a 6, desarrolle $f(x) = 1, 0 < x < 2$ en una serie de Fourier-Bessel con funciones de Bessel de orden cero que satisfagan la respectiva condición en la frontera.

3. $J_0(2\alpha) = 0$

4. $J_0'(2\alpha) = 0$

5. $J_0(2\alpha) + 2\alpha J_0'(2\alpha) = 0$

6. $J_0(2\alpha) + \alpha J_0'(2\alpha) = 0$

En los problemas 7 a 10, desarrolle la función respectiva en una serie de Fourier-Bessel, usando funciones de Bessel del mismo orden que el indicado en la condición en la frontera.

7. $f(x) = 5x, 0 < x < 4,$
$3J_1(4\alpha) + 4\alpha J_1'(4\alpha) = 0$

8. $f(x) = x^2, 0 < x < 1, \quad J_2(\alpha) = 0$

9. $f(x) = x^2, \quad 0 < x < 3, \quad J_0'(3\alpha) = 0$ [*Sugerencia:* $t^3 = t^2 \cdot t$.]

10. $f(x) = 1 - x^2, 0 < x < 1, \quad J_0(\alpha) = 0$

Tarea para el laboratorio de computación

11. **a)** Use un SAC para trazar la gráfica de $y = 3J_1(x) + xJ_1'(x)$ en un intervalo tal, que se muestren las primeras cinco intersecciones positivas con el eje x de la gráfica.

b) Use la aplicación para determinar raíces de su SAC para aproximar las cinco primeras raíces x_i de la ecuación $3J_1(x) + xJ_1'(x) = 0$.

c) Utilice los datos obtenidos en el inciso b) para encontrar los cinco primeros valores positivos de α_i que satisfagan a $3J_1(4\alpha) + 4\alpha J_1'(4\alpha) = 0$. (Véase el problema 7.)

d) Si se le indica, encuentre los diez primeros valores positivos de α_i.

12. **a)** Utilice los valores de α_i del inciso c) del problema 11 y un SAC para aproximar los valores de los primeros cinco coeficientes c_i de la serie de Fourier-Bessel que obtuvo en el problema 7.

b) Utilice un SAC para trazar las gráficas de las sumas parciales $S_N(x)$, $N = 1, 2, 3, 4, 5$ de la serie de Fourier en el problema 7.

c) Si se le indica, trace la gráfica de la suma parcial $S_{10}(x)$ en el intervalo $(0, 4)$ y en $(0, 50)$.

Problemas para analizar

13. Si las sumas parciales del problema 12 se grafican en un intervalo simétrico tal como $(-30, 30)$ ¿las gráficas tendrían alguna simetría? Explique.

14. **a)** Dibuje, a mano, una gráfica de a dónde supone que convergería la serie del problema 3 en el intervalo $(-2, 2)$.

b) Dibuje, a mano, una gráfica de a dónde supone que convergería la serie en el intervalo $(-4, 4)$ si los valores α_i en el problema 7 fueron definidos por $3J_2(4\alpha) + 4\alpha J_2'(4\alpha) = 0$.

11.5.2 SERIE DE FOURIER-LEGENDRE

En los problemas 15 y 16, escriba los primeros cinco términos distintos de cero en el desarrollo de la función dada como serie de Fourier-Legendre. Si se le indica, utilice un SAC como una ayuda para evaluar los coeficientes. Use un SAC para trazar la gráfica de la suma parcial $S_5(x)$.

15. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$

16. $f(x) = e^x, \quad -1 < x < 1$

17. Los tres primeros polinomios de Legendre son $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ y $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Si $x = \cos\theta$, entonces $P_0(\cos\theta) = 1$ y $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$. Demuestre que $P_2(\cos\theta) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)$.

18. Utilice los resultados del problema 17 para encontrar un desarrollo en serie de Fourier-Legendre ecuación (23) de $F(\theta) = 1 - \cos 2\theta$.

19. Un polinomio de Legendre $P_n(x)$ es una función par o impar, dependiendo de si n es un par o impar. Demuestre que si f es una función par en el intervalo $(-1, 1)$, entonces las ecuaciones (21) y (22) se convierten, respectivamente en

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} P_{2n}(x) \qquad (25)$$

$$c_{2n} = (4n + 1) \int_0^1 f(x) P_{2n}(x)\, dx. \qquad (26)$$

La serie (25) se pueden también usar cuando f sólo está definida en el intervalo $(0, 1)$. Entonces la serie representa a f en $(0, 1)$ y en una extensión par de f en el intervalo $(-1, 0)$.

20. Demuestre que si f es una función impar en el intervalo $(-1, 1)$, las ecuaciones (21) y (22) se convierten respectivamente en

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} P_{2n+1}(x) \qquad (27)$$

$$c_{2n+1} = (4n + 3) \int_0^1 f(x) P_{2n+1}(x)\, dx. \qquad (28)$$

La serie (27) también se pueden utilizar cuando f sólo está definida en $(0, 1)$. Entonces la serie representa a f en $(0, 1)$ y a un desarrollo impar de f en el intervalo $(-1, 0)$.

En los problemas 21 y 22 escriba los primeros cuatro términos distintos de cero en el desarrollo indicado de la función dada. ¿Qué función representa la serie en el intervalo $(-1, 1)$? Use un SAC para trazar la gráfica de la suma parcial $S_4(x)$.

21. $f(x) = x, \quad 0 < x < 1$; use (25)

22. $f(x) = 1, \quad 0 < x < 1$; use (27)

Problemas para analizar

23. Analice: ¿por qué un desarrollo de Fourier-Legendre de una función polinomial que está definida en el intervalo $(-1, 1)$ es necesariamente una serie finita?

24. Utilizando sólo sus conclusiones del problema 23, es decir, sin utilizar la ecuación (22), encuentre la serie de Fourier-Legendre de $f(x) = x^2$. Y de la serie $f(x) = x^3$.

REPASO DEL CAPÍTULO 11

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-19.

En los problemas 1 a 6 complete el espacio en blanco o conteste cierto o falso sin consultar el libro.

1. Las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x^5$ son ortogonales en el intervalo $[-\pi, \pi]$. ________

2. El producto de una función impar f por otra función impar g es ________.

3. Para desarrollar $f(x) = |x| + 1, -\pi < x < \pi$ en una serie trigonométrica adecuada, se usaría una serie ______.

4. $y = 0$ nunca es una eigenfunción de un problema de Sturm-Liouville. ________

5. $\lambda = 0$ nunca es un eigenvalor de un problema de Sturm-Liouville. ________

6. Si la función $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 < x < 0 \\ -x, & 0 < x < 1 \end{cases}$ se desarrolla en una serie de Fourier, la serie converge a ________ en $x = -1$, a ________ en $x = 0$ y a ________ en $x = 1$.

7. Suponga que la función $f(x) = x^2 + 1, 0 < x < 3$ se desarrolla en una serie de Fourier, una serie de cosenos y una serie de senos. Dé el valor al cual cada serie converge en $x = 0$.

8. ¿Cuál es la eigenfunción correspondiente para el problema con valores en la frontera $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$ para $\lambda = 25$?

9. Ecuación diferencial de Chebyshev

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

tiene una solución polinomial $y = T_n(x)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Especifique la función de peso $w(x)$ y el intervalo en el que el conjunto de polinomios de Chebyshev $\{T_n(x)\}$ es ortogonal. Dé una relación de ortogonalidad.

10. El conjunto de polinomios de Legendre $\{P_n(x)\}$, donde $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x, \ldots$ es ortogonal respecto a la función de peso $w(x) = 1$ en el intervalo $[-1, 1]$. Explique por qué $\int_{-1}^{1} P_n(x)\, dx = 0$ para $n > 0$.

11. Sin hacer operaciones, explique por qué la serie de cosenos de $f(x) = \cos^2 x$, $0 < x < \pi$ es la serie finita $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$.

12. **a)** Demuestre que el conjunto

$$\left\{ \operatorname{sen} \frac{\pi}{2L}x, \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2L}x, \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2L}x, \ldots \right\}$$

es ortogonal en el intervalo $[0, L]$.

b) Encuentre la norma de cada una de las funciones del inciso a). Construya un conjunto ortonormal.

13. Desarrolle $f(x) = |x| - x, -1 < x < 1$ en una serie de Fourier.

14. Desarrolle $f(x) = 2x^2 - 1, -1 < x < 1$ en una serie de Fourier.

15. Desarrolle $f(x) = e^x$, $0 < x < 1$.

a) en una serie de cosenos **b)** en una serie de senos.

16. En los problemas 13, 14 y 15, dibuje la extensión periódica de f a la que converge cada serie.

17. Analice: ¿cuál de las dos series de Fourier de f en el problema 15 converge a

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < 1 \\ f(-x), & -1 < x < 0 \end{cases}$$

en el intervalo $(-1, 1)$?

18. Considere la parte de la función periódica f que se muestra en la figura 11.R.1. Desarrolle f en una serie de Fourier adecuada.

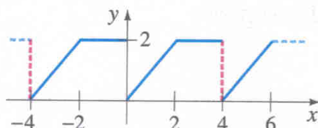


FIGURA 11.R.1 Gráfica del problema 18.

19. Encuentre los eigenvalores y las eigenfunciones del problema con valores en la frontera

$$x^2y'' + xy' + 9\lambda y = 0, \quad y'(1) = 0, \quad y(e) = 0.$$

20. Dé una relación de ortogonalidad para las eigenfunciones del problema 19.

21. Desarrolle $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 4 \end{cases}$, en una serie de Fourier-Bessel y utilice funciones de Bessel de orden cero que satisfagan la condición a la frontera $J_0(4\alpha) = 0$.

22. Desarrolle la función $y = x^4 - 1$, $-1 < x < 1$, en una serie de Fourier-Legendre.

23. Suponga que la función $y = f(x)$ está definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

a) Compruebe la identidad $f_e(x) + f_o(x)$, donde

$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{y} \quad f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

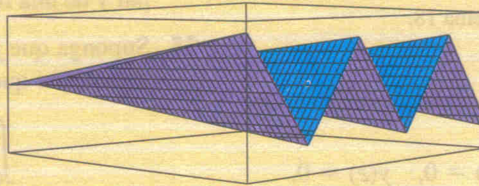
b) Demuestre que f_e es una función par y f_o es una función impar.

24. La función $f(x) = e^x$ no es función par ni impar. Utilice el problema 23 para escribir f como la suma de una función par y de una función impar. Identifique f_e y f_o.

25. Suponga que f es una función de periodo $2p$ integrable. Demuestre que para cualquier número a,

$$\int_0^{2p} f(x)\,dx = \int_a^{a+2p} f(x)\,dx.$$

12 PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA EN COORDENADAS RECTANGULARES



En éste y en los dos capítulos siguientes trataremos un par de procedimientos que se utilizan para resolver ecuaciones en derivadas parciales que se presentan con frecuencia en problemas donde aparecen distribuciones de temperatura, vibraciones y potenciales. Estos problemas, llamados problemas con valores en la frontera, se describen con ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden relativamente simples. El objetivo de estos procedimientos es encontrar soluciones de una EDP reduciéndola a dos o más EDO.

Comenzaremos con un método llamado *separación de variables*. La aplicación de este método nos regresa a los importantes conceptos del capítulo 11, en particular, eigenvalores, eigenfunciones y el desarrollo de una función en una serie infinita de funciones ortogonales.

12.1 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES SEPARABLES

REPASO DE MATERIAL

- Secciones 2.3, 4.3 y 4.4.
- Lea nuevamente "Dos ecuaciones que merecen conocerse" en las páginas 135-136.

INTRODUCCIÓN Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP), al igual que las diferenciales ordinarias, se pueden clasificar en lineales o no lineales. De manera similar que en una EDO, la variable dependiente y sus derivadas parciales sólo se presentan elevadas a la primera potencia en una EDP lineal. En lo que resta de este libro la mayoría de las veces sólo trataremos con EDP *lineales de segundo orden*.

ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL LINEAL Si hacemos que u denote la variable dependiente y que x y y denoten las variables independientes, entonces la forma general de una **ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden** está dada por

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \tag{1}$$

donde los coeficientes $A, B, C, \ldots, G$ son funciones de x y y. Cuando $G(x, y) = 0$, la ecuación (1) se llama **homogénea**; en cualquier otro caso se dice que es **no homogénea**. Por ejemplo, las ecuaciones lineales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

son homogéneas y no homogéneas, respectivamente.

SOLUCIÓN DE UNA EDP Una **solución** de una ecuación diferencial parcial (1) es una función $u(x, y)$ de dos variables independientes que tiene todas las derivadas parciales que se presentan en la ecuación y que satisface la ecuación en alguna región del plano xy.

No es nuestra intención examinar procedimientos para encontrar *soluciones generales* de ecuaciones diferenciales parciales lineales. Con frecuencia no sólo es difícil obtener una solución general de la EDP lineal de segundo orden, sino que usualmente una solución general tampoco es útil en las aplicaciones, por lo que nos concentraremos en encontrar *soluciones particulares* de algunas de las EDP lineales más importantes, esto es, ecuaciones que se presentan en varias aplicaciones.

SEPARACIÓN DE VARIABLES Aunque hay varios métodos que pueden ensayarse para encontrar soluciones particulares de una EDP lineal, el que nos interesa por el momento se llama **método de separación de variables**. Con este método se busca una solución particular en la forma de *producto* de una función de x por una función de y:

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Con esta hipótesis *algunas veces* es posible reducir una EDP lineal con dos variables en dos EDO. Así, observamos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = XY', \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY'',$$

donde las primas denotan derivación ordinaria.

EJEMPLO 1 Separación de variables

Encuentre las soluciones producto de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

SOLUCIÓN Sustituyendo $u(x, y) = X(x)Y(y)$ en la ecuación diferencial parcial se obtiene

$$X''Y = 4XY'.$$

Después, al dividir ambos lados entre $4XY$, hemos separado las variables:

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y}.$$

Puesto que el miembro izquierdo de esta última ecuación es independiente de y e igual al miembro derecho, que es independiente de x, concluimos que ambos lados son independientes tanto de x como de y. En otras palabras, cada lado de la ecuación debe ser una constante. En la práctica es *conveniente* escribir esta **constante de separación real** como $-\lambda$ (usando λ se obtienen las mismas soluciones).

De las dos igualdades

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = -\lambda$$

obtenemos las dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

$$X'' + 4\lambda X = 0 \qquad \text{y} \qquad Y' + \lambda Y = 0. \tag{2}$$

Ahora, como en el ejemplo 1 de la sección 11.4, consideraremos tres casos para λ: cero, negativo o positivo, es decir $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$, $\lambda = \alpha^2 > 0$, donde $\alpha > 0$.

CASO I Si $\lambda = 0$, entonces las dos EDO en (2) son

$$X'' = 0 \qquad \text{y} \qquad Y' = 0.$$

Resolviendo cada ecuación (digamos, por integración), encontramos que $X = c_1 + c_2x$ y $Y = c_3$. Por lo que una solución producto particular de la EDP es

$$u = XY = (c_1 + c_2x)c_3 = A_1 + B_1x, \tag{3}$$

donde hemos sustituido c_1c_3 y c_2c_3 por A_1 y B_1, respectivamente.

CASO II Si $\lambda = -\alpha^2$, entonces las ED en (2) son

$$X'' - 4\alpha^2 X = 0 \qquad \text{y} \qquad Y' - \alpha^2 Y = 0.$$

A partir de sus soluciones generales

$$X = c_4 \cosh 2\alpha x + c_5 \operatorname{senh} 2\alpha x \qquad \text{y} \qquad Y = c_6 e^{\alpha^2 y}$$

obtenemos otra solución producto particular de la EDP,

$$u = XY = (c_4 \cosh 2\alpha x + c_5 \operatorname{senh} 2\alpha x)c_6 e^{\alpha^2 y}$$

o

$$u = A_2 e^{\alpha^2 y} \cosh 2\alpha x + B_2 e^{\alpha^2 y} \operatorname{senh} 2\alpha x, \tag{4}$$

donde $A_2 = c_4c_6$ y $B_2 = c_5c_6$.

CASO III Si $\lambda = \alpha^2$, entonces las ED

$$X'' + 4\alpha^2 X = 0 \qquad \text{y} \qquad Y' + \alpha^2 Y = 0$$

y sus soluciones generales

$$X = c_7 \cos 2\alpha x + c_8 \operatorname{sen} 2\alpha x \qquad \text{y} \qquad Y = c_9 e^{-\alpha^2 y}$$

dan aún otra solución particular

$$u = A_3 e^{-\alpha^2 y} \cos 2\alpha x + B_3 e^{-\alpha^2 y} \operatorname{sen} 2\alpha x, \tag{5}$$

donde $A_3 = c_7 c_9$ y $B_2 = c_8 c_9$. ■

Se deja como ejercicio comprobar que las soluciones (3), (4) y (5) satisfacen la EDP dada. Véase el problema 29 en los ejercicios 12.1.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN El siguiente teorema es similar al teorema 4.1.2 y se conoce como **principio de superposición**.

TEOREMA 12.1.1 Principio de superposición

Si $u_1, u_2, \ldots, u_k$ son soluciones de una ecuación diferencial parcial lineal homogénea, entonces la combinación lineal

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_k u_k,$$

donde los c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, son constantes, es también una solución.

En lo que resta del capítulo supondremos que siempre que haya un conjunto infinito $u_1, u_2, u_3, \ldots,$ de soluciones de una ecuación lineal homogénea, se puede construir otra solución, u, formando la serie infinita

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k,$$

donde los c_i, $i = 1, 2, \ldots$ son constantes.

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES Una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden con dos variables independientes y con coeficientes constantes se puede clasificar en uno de los tres tipos. Esta clasificación sólo depende de los coeficientes de las derivadas de segundo orden. Por supuesto, suponemos que al menos uno de los coeficientes A, B y C es distinto de cero.

DEFINICIÓN 12.1.1 Clasificación de ecuaciones

La ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes reales, se dice que es

hiperbólica si $B^2 - 4AC > 0$,
parabólica si $B^2 - 4AC = 0$,
elíptica si $B^2 - 4AC < 0$.

EJEMPLO 2 Clasificación de EDP lineales de segundo orden

Clasifique las ecuaciones siguientes:

a) $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ **b)** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ **c)** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

SOLUCIÓN **a)** Escribimos la ecuación dada como

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

podemos hacer las identificaciones $A = 3$, $B = 0$ y $C = 0$. Puesto que $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación es parabólica.

b) Reescribimos la ecuación como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

vemos que $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, y $B^2 - 4AC = -4(1)(-1) > 0$. La ecuación es hiperbólica.

c) Con $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, y $B^2 - 4AC = -4(1)(1) < 0$ la ecuación es elíptica. ■

COMENTARIOS

i) En el caso de que usted se lo pregunte, la separación de variables no es un método general para encontrar soluciones particulares; algunas ecuaciones diferenciales parciales lineales son simplemente *no* separables. Se le propone que compruebe que la suposición $u = XY$ no conduce a una solución para la EDP lineal $\partial^2 u/\partial x^2 - \partial u/\partial y = x$.

ii) Una explicación detallada de por qué querríamos clasificar una EDP lineal de segundo orden como hiperbólica, parabólica o elíptica está fuera del alcance de este libro, pero al menos usted debería estar consciente que esta clasificación tiene importancia práctica. Vamos a resolver algunas EDP sujetas sólo a condiciones de frontera y otras sujetas tanto a condiciones de frontera como a condiciones iniciales; las clases de condiciones que son apropiadas para una ecuación dada dependen de si la ecuación es hiperbólica, parabólica o elíptica. En relación con este tema, veremos en el capítulo 15 que los métodos de solución numérica para las EDP lineales de segundo orden difieren de acuerdo con la clasificación de la ecuación.

EJERCICIOS 12.1 *Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-19.*

En los problemas 1 a 16 utilice separación de variables para encontrar, de ser posible, soluciones producto para la ecuación diferencial parcial dada.

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ **2.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

3. $u_x + u_y = u$ **4.** $u_x = u_y + u$

5. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} = y\dfrac{\partial u}{\partial y}$ **6.** $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ **8.** $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + u = 0$

9. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0$ **10.** $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0$

11. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

12. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2k\dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0$

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ **14.** $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

15. $u_{xx} + u_{yy} = u$ **16.** $a^2 u_{xx} - g = u_{tt}$, g una constante

En los problemas 17 a 26 clasifique la ecuación diferencial parcial dada como hiperbólica, parabólica o elíptica.

17. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

18. $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

19. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

20. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

21. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$

22. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

23. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

24. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$

25. $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

26. $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0$

En los problemas 27 y 28 demuestre que la ecuación diferencial parcial dada tiene la solución de producto indicada.

27. $k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial u}{\partial t};$

$u = e^{-k\alpha^2 t}(c_1 J_0(\alpha r) + c_2 Y_0(\alpha r))$

28. $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0;$

$u = (c_1 \cos\alpha\theta + c_2 \operatorname{sen}\alpha\theta)(c_3 r^{\alpha} + c_4 r^{-\alpha})$

29. Compruebe que cada uno de los productos $u = XY$ en las ecuaciones (3), (4) y (5) satisfacen la EDP lineal de segundo orden del ejemplo 1.

30. La definición 12.1.1 generaliza las EDP lineales con coeficientes que son funciones de x y y. Determine las regiones del plano xy para las cuales la ecuación

$$(xy + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x + 2y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + xy^2 u = 0$$

es hiperbólica, parabólica o elíptica.

12.2 EDP CLÁSICAS Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA

REPASO DE MATERIAL

- Lea nuevamente el tema de problemas con valores en la frontera en las secciones 4.1, 4.3 y 5.2.

INTRODUCCIÓN No vamos a resolver nada en esta sección. Simplemente vamos a analizar los tipos de ecuaciones diferenciales parciales y los problemas con valores en la frontera con los que estaremos trabajando en lo que resta de este capítulo así como en los capítulos 13 a 15. Las palabras *problema con valores en la frontera* tienen una connotación ligeramente diferente de la que tuvieron en las secciones 4.1, 4.3 y 5.2. Si por ejemplo, $u(x, t)$ es una solución de una EDP, donde x representa una dimensión espacial y t representa al tiempo, entonces podemos determinar el valor de u, o de $\partial u/\partial x$ o una combinación lineal de u y $\partial u/\partial x$ en una x dada, así como determinar la u y $\partial u/\partial t$ en un tiempo t dado (en general, $t = 0$). En otras palabras, "un problema con valores en la frontera" puede consistir en una EDP, con condiciones en la frontera y con condiciones iniciales.

ECUACIONES CLÁSICAS Consideraremos principalmente la aplicación del método de separación de variables para encontrar soluciones producto de las siguientes ecuaciones clásicas de la física matemática:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad k > 0 \tag{1}$$

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

o ligeras variaciones de estas ecuaciones. Las EDP (1), (2) y (3) se conocen, respectivamente, como **ecuación de calor unidimensional**, **ecuación de onda unidimensional** y **forma bidimensional de la ecuación de Laplace**. "Unidimensional" en el caso de las ecuaciones (1) y (2) se refiere al hecho de que x denota una variable espacial, mientras que la t representa el tiempo; "bidimensional" en (3) significa que tanto x como y son variables espaciales. Si compara las ecuaciones (1) a (3) con la forma

lineal del teorema 12.1.1 (con t jugando el papel del símbolo y), observe que la ecuación de calor (1) es parabólica, la ecuación de onda (2) es hiperbólica y la ecuación de Laplace es elíptica. Esta observación será importante en el capítulo 15.

ECUACIÓN DE CALOR La ecuación (1) se presenta en la teoría de flujo de calor, es decir, transferencia de calor por conducción en una varilla o en un alambre delgado. La función $u(x, t)$ representa la temperatura en un punto x a lo largo de la varilla en algún tiempo t. Los problemas en vibraciones mecánicas con frecuencia conducen a la ecuación de onda (2). Para fines de análisis, una solución $u(x, t)$ de (2) representará el desplazamiento de una cuerda idealizada. Por último, una solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace (3) se puede interpretar como el estado estable (es decir independiente del tiempo) de la distribución de temperaturas a través de una placa delgada bidimensional.

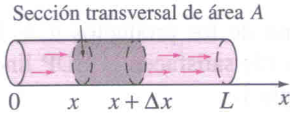


FIGURA 12.2.1 Flujo de calor unidimensional.

Incluso aunque hagamos muchas suposiciones de simplificación, vale la pena ver cómo surgen ecuaciones tales como la (1) y la (2).

Suponga una varilla delgada circular de longitud L que tiene una sección transversal A y que coincide con el eje de las x en el intervalo $[0, L]$. Véase la figura 12.2.1. Supongamos lo siguiente:

- El flujo de calor dentro de la varilla sólo ocurre en la dirección x.
- La superficie curva o lateral de la varilla está aislada; es decir no escapa calor de esta superficie.
- No hay calor generado dentro de la varilla.
- La varilla es homogénea, es decir, su masa por unidad de volumen ρ es constante.
- El calor específico γ y la conductividad térmica K del material de la varilla son constantes.

Para deducir la ecuación diferencial parcial que satisface la temperatura $u(x, t)$, necesitamos dos leyes empíricas de conducción de calor:

i) *La cantidad de calor Q en un elemento de masa m es*

$$Q = \gamma m u, \tag{4}$$

donde u es la temperatura del elemento.

ii) *La razón de calor Q_t que fluye por la sección transversal que se indica en la figura 12.2.1 es proporcional al área A de la sección transversal y a la derivada parcial respecto a x de la temperatura:*

$$Q_t = -KAu_x. \tag{5}$$

Puesto que el calor fluye en la dirección de la disminución de la temperatura, se utiliza el signo menos para asegurar que Q_t es positivo para $u_x < 0$ (flujo de calor a la derecha) y negativo para $u_x > 0$ (flujo de calor a la izquierda). Si la porción circular de la varilla, mostrada en la figura 12.2.1, entre x y $x + \Delta x$ es muy delgada, entonces $u(x, t)$ se puede considerar la temperatura aproximada en cada punto en el intervalo. Ahora la masa de la rebanada es $m = \rho(A\,\Delta x)$, y por tanto se tiene de (4) que la cantidad de calor en ésta es

$$Q = \gamma\rho A\,\Delta x\,u. \tag{6}$$

Además, cuando fluye calor en la dirección x positiva, vemos de (5) que el calor aumenta en la porción a la razón neta

$$-KAu_x(x, t) - [-KAu_x(x + \Delta x, t)] = KA\,[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]. \tag{7}$$

Derivando (6) respecto a t, vemos que la razón neta está también dada por

$$Q_t = \gamma\rho A\,\Delta x\,u_t. \tag{8}$$

Igualando (7) y (8) se obtiene

$$\frac{K}{\gamma\rho}\,\frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} = u_t. \tag{9}$$

Finalmente, tomando el límite de (9) conforme $\Delta x \to 0$, obtenemos (1) en la forma* $(K/\gamma\rho)u_{xx} = u_t$. Se acostumbra hacer $k = K/\gamma\rho$ y llamar **difusividad térmica** a esta constante positiva.

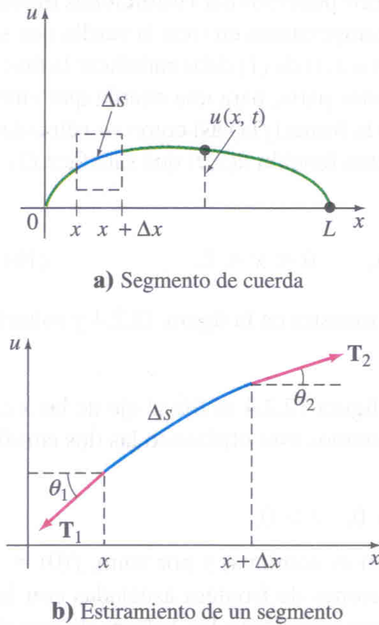


FIGURA 12.2.2 Cuerda flexible anclada en $x = 0$ y en $x = L$.

ECUACIÓN DE ONDA

Considere una cuerda de longitud L, como una cuerda de guitarra, tensada entre dos puntos en el eje x, por ejemplo, en $x = 0$ y en $x = L$. Cuando la cuerda comienza a vibrar, suponemos que el movimiento es en el plano xu de tal manera que cada punto sobre la cuerda se mueve en una dirección perpendicular al eje x (vibraciones transversales). Como se muestra en la figura 12.2.2a, hagamos que $u(x, t)$ denote el desplazamiento vertical de cualquier punto sobre la cuerda medida desde el eje x para $t > 0$. Además suponemos que:

- La cuerda es perfectamente flexible.
- La cuerda es homogénea, es decir, su masa por unidad de longitud ρ es una constante.
- Los desplazamientos u son pequeños en comparación con la longitud de la cuerda.
- La pendiente de la curva es pequeña en todos los puntos.
- La tensión **T** actúa tangente a la cuerda y su magnitud T es igual en todos los puntos.
- La tensión es grande comparada con la fuerza de la gravedad.
- No actúa otra fuerza externa sobre la cuerda.

Ahora en la figura 12.2.2b las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son tangentes a los extremos de la curva en el intervalo $[x, x + \Delta x]$. Para θ_1 y θ_2 pequeñas la fuerza neta vertical que actúa sobre el elemento correspondiente Δs de la cuerda es entonces

$$\begin{aligned} T \operatorname{sen} \theta_2 - T \operatorname{sen} \theta_1 &\approx T \tan \theta_2 - T \tan \theta_1 \\ &= T\,[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)],^{\dagger} \end{aligned}$$

donde $T = |\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_2|$. Ahora $\rho\,\Delta s \approx \rho\,\Delta x$ es la masa de la cuerda en $[x, x + \Delta x]$, por lo que de la segunda ley de Newton se obtiene

$$T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] = \rho\,\Delta x\,u_{tt}$$

o

$$\frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} = \frac{\rho}{T}u_{tt}.$$

Si el límite se toma como $\Delta x \to 0$, la última ecuación se convierte en $u_{xx} = (\rho/T)\,u_{tt}$. Ésta desde luego es (2) con $a^2 = T/\rho$.

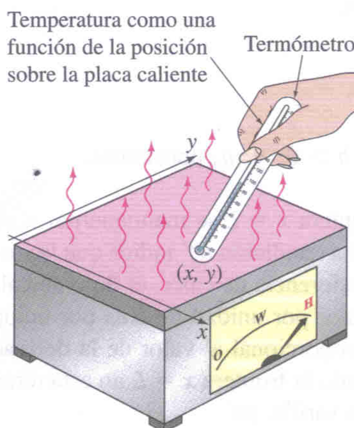


FIGURA 12.2.3 Temperaturas de estado estable en una placa rectangular.

ECUACIÓN DE LAPLACE

Aunque no presentamos su deducción, la ecuación de Laplace en dos y tres dimensiones se presenta en problemas independientes del tiempo que implican potenciales tales como el electrostático, el gravitacional y la velocidad en mecánica de fluidos. Además, una solución de la ecuación de Laplace también se puede interpretar como una distribución de temperaturas de estado estable. Como se muestra en la figura 12.2.3, una solución $u(x, y)$ de la ecuación (3) podría representar la temperatura que varía de punto a punto, pero no con el tiempo, de una placa rectangular. La ecuación de Laplace en dos dimensiones y en tres dimensiones se abrevia como $\nabla^2 u = 0$, donde

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{y} \qquad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

se conocen como el **Laplaciano** en dos y tres dimensiones, respectivamente, de una función u.

---

*La definición de la segunda derivada parcial es $u_{xx} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x}$.

† $\tan \theta_2 = u_x(x + \Delta x, t)$ y $\tan \theta_1 = u_x(x, t)$ son expresiones equivalentes para la pendiente.

Con frecuencia deseamos encontrar soluciones de las ecuaciones (1), (2) y (3) que satisfacen ciertas condiciones adicionales.

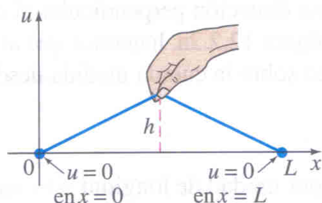


FIGURA 12.2.4 Cuerda pulsada.

CONDICIONES INICIALES Ya que las soluciones de (1) y (2) dependen del tiempo t, podemos indicar qué pasa en $t = 0$; es decir podemos dar **condiciones iniciales (CI)**. Si $f(x)$ denota la distribución inicial de temperaturas en toda la varilla que se muestra en la figura 12.2.1, entonces una solución $u(x, t)$ de (1) debe satisfacer la única condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < L$. Por otra parte, para una cuerda que vibra podemos especificar su desplazamiento inicial (o la forma) $f(x)$ así como su velocidad inicial $g(x)$. En términos matemáticos buscamos una función $u(x, t)$ que satisface (2) y las dos condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \qquad 0 < x < L. \tag{10}$$

Por ejemplo, se podría pulsar la cuerda, como se muestra en la figura 12.2.4 y soltarla a partir del reposo ($g(x) = 0$).

CONDICIONES FRONTERA La cuerda de la figura 12.2.4 se fija al eje de las x en $x = 0$ y en $x = L$ durante todo el tiempo. Interpretamos esto utilizando las dos **condiciones de frontera** (**CF**):

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

Observe que en este contexto la función f en (10) es continua, y por tanto, $f(0) = 0$ y $f(L) = 0$. En general, hay tres tipos de condiciones de frontera asociadas con las ecuaciones (1), (2) y (3). En una frontera podemos especificar los valores de *uno* de los siguientes:

$$i)\ \ u, \qquad ii)\ \ \frac{\partial u}{\partial n}, \qquad \text{o} \qquad iii)\ \ \frac{\partial u}{\partial n} + hu, \qquad h \text{ una constante.}$$

Aquí $\partial u/\partial n$ denota la derivada normal de u (la derivada direccional de u en la dirección perpendicular a la frontera). Una condición de frontera del primer tipo *i*) se llama **condición de Dirichlet**; una condición de frontera del segundo tipo *ii*) se llama **condición de Neumann**; y una condición de frontera del tercer tipo *iii*) se llama **condición de Robin**. Por ejemplo, para $t > 0$ una condición típica del extremo derecho de la varilla en la figura 12.2.1 puede ser

$$i)' \quad u(L, t) = u_0, \qquad u_0 \text{ una constante,}$$

$$ii)' \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \qquad \text{o bien}$$

$$iii)' \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = -h(u(L, t) - u_m), \qquad h > 0 \ \text{ y } \ u_m \text{ constantes.}$$

La condición *i*)′ simplemente establece que la frontera $x = L$ se mantiene por algún medio a una *temperatura* u_0 constante para $t > 0$. La condición *ii*)′ indica que la frontera $x = L$ está *aislada*. De la ley empírica de transferencia de calor, el flujo de calor a través de la frontera (es decir, la cantidad de calor por unidad de área por unidad de tiempo conducida a través de la frontera) es proporcional al valor de la derivada normal $\partial u/\partial n$ de la temperatura u. Por lo que cuando la frontera $x = L$ no está térmicamente aislada, no fluye calor dentro o fuera de la varilla, así

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0.$$

Podemos interpretar *iii*)′ como que el *calor se pierde* en el extremo derecho de la varilla por estar en contacto con un medio, tales como aire o agua, que se mantiene a una temperatura constante. De la ley del enfriamiento de Newton, el flujo de calor hacia fuera de la varilla es proporcional a la diferencia entre la temperatura $u(L, t)$ en la fron-

tera y la temperatura u_m del medio circundante. Observamos que si se pierde calor en el extremo izquierdo de la varilla, la condición de frontera es

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = h(u(0, t) - u_m).$$

El cambio de signo algebraico es consistente con la suposición de que la varilla está a una temperatura más alta que el medio que rodea a los extremos por lo que $u(0, t) > u_m$ y $u(L, t) > u_m$. En $x = 0$ y en $x = L$ las pendientes $u_x(0, t)$ y $u_x(L, t)$ deben ser positiva y negativa, respectivamente.

Por supuesto, en los extremos de la varilla podemos especificar condiciones diferentes al mismo tiempo. Por ejemplo, podríamos tener

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad \text{y} \quad u(L, t) = u_0, \quad t > 0.$$

Observemos que la condición de frontera en *i*)′ es homogénea si $u_0 = 0$; si $u_0 \neq 0$, la condición de frontera es no homogénea. La condición de frontera *ii*)′ es homogénea; *iii*)′ es homogénea si $u_m = 0$ y no homogénea si $u_m \neq 0$.

PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA Problemas tales como

$$\begin{aligned}
&\textit{Resolver:} && a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\
&\textit{Sujeto a:} && \text{(BC)} \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \\
& && \text{(IC)} \quad u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L
\end{aligned} \tag{11}$$

y

$$\begin{aligned}
&\textit{Resolver:} && \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\
&\textit{Sujeto a:} && \text{(BC)} \begin{cases} \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad 0 < x < a \end{cases}
\end{aligned} \tag{12}$$

se llaman **problemas con valores en la frontera**.

MODIFICACIONES Las ecuaciones diferenciales parciales (1), (2) y (3) se deben modificar para considerar las influencias internas o externas que actúan sobre el sistema físico. Más formas generales de las ecuaciones de calor unidimensional y de onda son, respectivamente,

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(x, t, u, u_x) = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{13}$$

y

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t, u, u_t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{14}$$

Por ejemplo, si hay transferencia de calor desde la superficie lateral de una varilla en un medio circundante que se mantiene a una temperatura constante u_m, entonces la ecuación de calor (13) es

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u - u_m) = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

En (14) la función F podría representar varias fuerzas que actúan sobre la cuerda. Por ejemplo, cuando se consideran fuerzas externas de amortiguamiento y fuerzas de

restauración elásticas, (14) toma la forma

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fuerza externa}}}{f(x, t)} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fuerza de amortiguamiento}}}{c \frac{\partial u}{\partial t}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fuerza de restauración}}}{ku} \tag{15}$$

COMENTARIOS

El análisis de una amplia variedad de diversos fenómenos produce los modelos matemáticos (1), (2) o (3) o sus generalizaciones que implican una cantidad mayor de variables espaciales. Por ejemplo, (1) a veces se llama la **ecuación de difusión**, ya que la difusión de sustancias disueltas en la solución es similar al flujo de calor en un sólido. La función $u(x, t)$ satisface la ecuación diferencial parcial que en este caso representa la concentración de la sustancia disuelta. Asimismo la ecuación (2) surge en el estudio del flujo de electricidad en un cable largo o en una línea de transmisión. En este contexto (2) se conoce como la **ecuación del telégrafo**. Se puede mostrar que bajo ciertas suposiciones la corriente y el voltaje en la línea son funciones que satisfacen dos ecuaciones idénticas con (2). La ecuación de onda (2) también se presenta en la teoría de líneas de transmisión de alta frecuencia, en mecánica de fluidos, en acústica y en elasticidad. La ecuación de Laplace (3) se presenta en el desplazamiento estático de membranas.

EJERCICIOS 12.2

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-20.

En los problemas 1 a 4 una varilla de longitud L coincide con el intervalo $[0, L]$ en el eje x. Establezca el problema con valores en la frontera para la temperatura $u(x, t)$.

1. El extremo izquierdo se mantiene a temperatura cero y el extremo derecho está aislado. La temperatura inicial es $f(x)$ en toda la varilla.
2. El extremo izquierdo se mantiene a una temperatura u_0 y el extremo derecho se mantiene a una temperatura u_1. La temperatura inicial es cero en toda la varilla.
3. El extremo izquierdo se mantiene a una temperatura de 100 y hay transferencia de calor del extremo derecho al medio que lo rodea a temperatura cero. La temperatura inicial es $f(x)$ en toda la varilla.
4. Los extremos están aislados y hay transferencia de calor desde la superficie lateral al medio circundante que está a una temperatura de 50. La temperatura inicial es igual a 100 en toda la varilla.

En los problemas 5 a 8 una cuerda de longitud L coincide con el intervalo $[0, L]$ en el eje x. Establezca el problema con valores en la frontera para el desplazamiento $u(x, t)$.

5. Los extremos están anclados al eje x. La cuerda se libera a partir del reposo desde el desplazamiento inicial $x(L - x)$.
6. Los extremos están anclados al eje x. Inicialmente, la cuerda no está desplazada pero tiene una velocidad inicial de $\operatorname{sen}(\pi x/L)$.
7. El extremo izquierdo está anclado al eje de las x, pero el extremo derecho se mueve de una manera transversal de acuerdo con sen πt. La cuerda se libera a partir del reposo del desplazamiento inicial $f(x)$. Para $t > 0$ las vibraciones transversales están amortiguadas con una fuerza proporcional a la velocidad instantánea.
8. Los extremos están anclados al eje de las x y la cuerda está inicialmente en reposo sobre este eje. Una fuerza externa vertical proporcional a la distancia horizontal a partir del extremo izquierdo actúa sobre la cuerda para $t > 0$.

En los problemas 9 y 10 establezca el problema con valores en la frontera para la temperatura de estado estable $u(x, y)$.

9. Una placa delgada rectangular coincide con la región definida por $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 2$. El extremo izquierdo y la parte inferior de la placa están aislados. La parte superior de la placa se mantiene a temperatura cero y el extremo derecho de la placa se mantiene a temperatura $f(y)$.
10. Una placa semiinfinita coincide con la región definida por $0 \leq x \leq \pi$, $y \geq 0$. El extremo izquierdo se mantiene a una temperatura e^{-y} y el extremo derecho se mantiene a una temperatura de 100 para $0 < y \leq 1$ y a temperatura cero para $y > 1$. La parte inferior de la placa se mantiene a una temperatura $f(x)$.

12.3 ECUACIÓN DE CALOR

REPASO DE MATERIAL

- Sección 12.1.
- Se le recomienda leer nuevamente el ejemplo 2 de la sección 5.2 y el ejemplo 1 de la sección 11.4.

INTRODUCCIÓN Considere una varilla delgada de longitud L con una temperatura inicial $f(x)$ en toda la varilla y cuyos extremos se mantienen a temperatura cero durante todo el tiempo $t > 0$. Si la varilla que se muestra en la figura 12.3.1 satisface las hipótesis dadas en la página 438, entonces la temperatura $u(x, t)$ en la varilla se determina del problema con valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{1}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \tag{2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L. \tag{3}$$

En esta sección resolveremos este PVF.

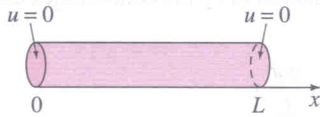


FIGURA 12.3.1 Temperatura en una varilla de longitud L.

SOLUCIÓN DEL PVF Para comenzar, usaremos el producto $u(x, t) = X(x)T(t)$ para separar variables en (1). Entonces, si $-\lambda$ es la constante de separación, las dos igualdades

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda \tag{4}$$

conducen a las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{5}$$

$$T' + k\lambda T = 0. \tag{6}$$

Antes de resolver (5), observamos que las condiciones de frontera (2) aplicadas a $u(x, t) = X(x)T(t)$ son

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad u(L, t) = X(L)T(t) = 0.$$

Puesto que tiene sentido esperar que $T(t) \neq 0$ para toda t, las igualdades anteriores valen sólo si $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$. Estas condiciones frontera homogéneas junto con las ED homogéneas (5) constituyen un problema regular de Sturm-Liouville:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \tag{7}$$

La solución de este PVF ya se analizó en el ejemplo 2 de la sección 5.2. En este ejemplo consideramos tres casos posibles para el parámetro λ: cero, negativo o positivo. Las soluciones correspondientes de las ED están, respectivamente, dadas por

$$X(x) = c_1 + c_2 x, \qquad \lambda = 0 \tag{8}$$

$$X(x) = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x, \qquad \lambda = -\alpha^2 < 0 \tag{9}$$

$$X(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x, \qquad \lambda = \alpha^2 > 0. \tag{10}$$

Cuando las condiciones de frontera $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$ se aplican a (8) y (9), estas soluciones son válidas sólo si $X(x) = 0$ y por tanto concluiríamos que $u = 0$. Pero cuando $X(0) = 0$ se aplica a (10), encontramos que $c_1 = 0$ y $X(x) = c_2 \operatorname{sen} \alpha x$. Entonces la segunda condición de frontera implica que $X(L) = c_2 \operatorname{sen} \alpha L = 0$. Para obtener una solución no trivial, debemos tener $c_2 \neq 0$ y $\operatorname{sen} \alpha L = 0$. Esta última ecuación se satisface cuando $\alpha L = n\pi$ o $\alpha = n\pi/L$. Por tanto (7) tiene soluciones no triviales cuando

$\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Estos valores de λ son los **eigenvalores** del problema; las **eigenfunciones** son

$$X(x) = c_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{11}$$

De (6) tenemos que $T(t) = c_3 e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}$, por tanto

$$u_n = X(x)T(t) = A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \tag{12}$$

donde hemos reemplazado la constante c_2c_3 por A_n. Cada una de las funciones producto $u_n(x, t)$ dadas en (12) es una solución particular de la ecuación diferencial parcial (1) y cada $u_n(x, t)$ también satisface ambas condiciones de frontera (2). Sin embargo, para que (12) satisfaga la condición inicial (3), tendríamos que elegir el coeficiente A_n de manera que

$$u_n(x, 0) = f(x) = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x. \tag{13}$$

En general, no esperaríamos que la condición (13) se satisfaga para una arbitraria pero razonable elección de f. Por lo que nos vemos forzados a admitir que $u_n(x, t)$ *no es una solución del problema dado*. Ahora por el principio de superposición (teorema 12.1.1) la función $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \tag{14}$$

debe también, aunque formalmente, satisfacer la ecuación (1) y las condiciones en (2). Sustituyendo $t = 0$ en (14) se implica que

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x.$$

Esta última expresión se reconoce como el desarrollo en un semiintervalo de f en una serie de senos. Si identificamos $A_n = b_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, se tiene de la ecuación (5) de la sección 11.3 que

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x\, dx. \tag{15}$$

Concluimos que una solución del problema con valores en la frontera descrita en (1), (2) y (3) está dada por la serie infinita

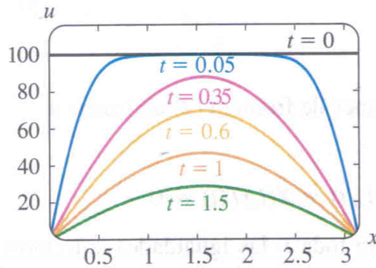
$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x\, dx \right) e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x. \tag{16}$$

En el caso especial en que la temperatura inicial es $u(x, 0) = 100$, $L = \pi$ y $k = 1$, compruebe que los coeficientes (15) están dados por

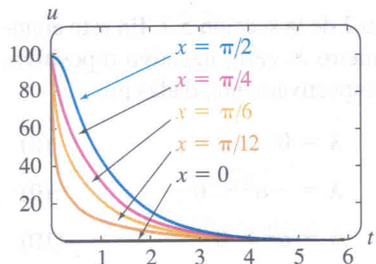
$$A_n = \frac{200}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n} \right]$$

y que (16) es

$$u(x, t) = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n} \right] e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx. \tag{17}$$



a) La gráfica de $u(x, t)$ como una función de x para diferentes tiempos fijos.



b) La gráfica de $u(x, t)$ como una función de t para diferentes posiciones fijas.

FIGURA 12.3.2 Gráficas de (17) cuando una variable se mantiene fija.

USO DE COMPUTADORAS Puesto que u es una función de dos variables, la gráfica de la solución (17) es una superficie tridimensional. Podríamos utilizar la aplicación 3D-plot de un sistema algebraico computarizado para aproximar esta superficie al trazar la gráfica de las sumas parciales $S_n(x, t)$ en una región rectangular definida por $0 \le x \le \pi$, $0 \le t \le T$. Alternativamente, con ayuda de la aplicación 2D-plot de un SAC podemos trazar la gráfica de la solución $u(x, t)$ en el intervalo en el eje x $[0, \pi]$, para valores crecientes del tiempo t. Véase la figura 12.3.2a. En la figura 12.3.2b se ha trazado la gráfica de la solución $u(x, t)$ en el intervalo en el eje t $[0, 6]$, para valores crecientes de x ($x = 0$ es el extremo izquierdo y $x = \pi/2$ es el punto medio de la varilla de longitud $L = \pi$). Ambos conjuntos de gráficas comprueban lo que es obvio en (17), en particular, $u(x, t) \to 0$, cuando $t \to \infty$.

EJERCICIOS 12.3 *Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-20.*

En los problemas 1 y 2 resuelva la ecuación de calor (1) sujeta a las condiciones dadas. Suponga una varilla de longitud L.

1. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 < x < L \end{cases}$$

2. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

$u(x, 0) = x(L - x)$

3. Encuentre la temperatura $u(x, t)$ en una varilla de longitud L si la temperatura inicial es $f(x)$ en toda la varilla y si los extremos $x = 0$ y $x = L$ están aislados.

4. Resuelva el problema 3 si $L = 2$ y

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

5. Suponga que se pierde calor desde la superficie lateral de una varilla delgada de longitud L dentro del medio circundante a temperatura cero. Si se aplica la ley lineal de transferencia de calor, entonces la ecuación de calor toma la forma

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \frac{\partial u}{\partial t},$$

$0 < x < L$, $t > 0$, h una constante. Encuentre la temperatura $u(x, t)$ si la temperatura inicial es $f(x)$ en toda la varilla y los extremos $x = 0$ y $x = L$ están aislados. Véase la figura 12.3.3.

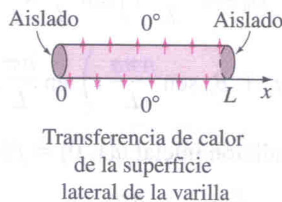


FIGURA 12.3.3 Pérdida de calor de la varilla del problema 5.

6. Resuelva el problema 5 si los extremos $x = 0$ y $x = L$ se mantienen a temperatura cero.

Problemas para analizar

7. La figura 12.3.2b presenta la gráfica de $u(x, t)$ para $0 \le t \le 6$ para $x = 0$, $x = \pi/12$, $x = \pi/6$, $x = \pi/4$ y $x = \pi/2$. Describa o dibuje las gráficas de $u(x, t)$ en el mismo intervalo de tiempo pero para los valores fijos $x = 3\pi/4$, $x = 5\pi/6$, $x = 11\pi/12$ y $x = \pi$.

8. Encuentre la solución del problema con valores en la frontera dado en (1) a (3) cuando $f(x) = 10\,\text{sen}(5\pi x/L)$.

Tarea para el laboratorio de computación

9. a) Resuelva la ecuación de calor (1) sujeta a

$$u(0, t) = 0, \quad u(100, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0.8x, & 0 \le x \le 50 \\ 0.8(100 - x), & 50 < x \le 100. \end{cases}$$

b) Utilice la aplicación 3D-plot de su SAC para trazar la gráfica de la suma parcial $S_5(x, t)$ que consiste en los primeros cinco términos distintos de cero de la solución del inciso a) para $0 \le x \le 100$, $0 \le t \le 200$. Suponga que $k = 1.6352$. Experimente con diferentes perspectivas tridimensionales de la superficie (use la opción **ViewPoint** en *Mathematica*).

12.4 ECUACIÓN DE ONDA

REPASO DE MATERIAL

- Lea nuevamente las páginas 439 a 441 de la sección 12.2.

INTRODUCCIÓN Ahora podemos resolver el problema con valores en la frontera (11) que se analizó en la sección 12.2. El desplazamiento vertical $u(x, t)$ de la cuerda vibratoria de longitud L que se muestra en la figura 12.2.2a se determina a partir de

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{1}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \tag{2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L. \tag{3}$$

SOLUCIÓN DEL PVF Con la suposición usual de que $u(x, t) = X(x)T(t)$, la separación de variables en (1) conduce a:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T} = -\lambda$$

por lo que

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{4}$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{5}$$

Como en la sección anterior, las condiciones de frontera (2) se traducen en $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$. La ecuación (4) junto con estas condiciones de frontera es el problema regular de Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \tag{6}$$

De las tres posibilidades usuales para el parámetro, $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$, sólo la última elección conduce a soluciones no triviales. Correspondiendo a $\lambda = \alpha^2$, $\alpha > 0$, la solución general de (4) es

$$X = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x.$$

$X(0) = 0$ y $X(L) = 0$ indican que $c_1 = 0$ y c_2 sen $\alpha L = 0$. Nuevamente la última ecuación implica que $\alpha L = n\pi$ o $\alpha = n\pi/L$. Los eigenvalores y las correspondientes eigenfunciones de (6) son $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$ y $X(x) = c_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ La solución general de la ecuación de segundo orden (5) es entonces

$$T(t) = c_3 \cos \frac{n\pi a}{L} t + c_4 \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t.$$

Reescribiendo c_2c_3 como A_n y c_2c_4 como B_n, las soluciones que satisfacen tanto la ecuación de onda (1) como las condiciones de frontera (2) son

$$u_n = \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \tag{7}$$

y

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x. \tag{8}$$

Haciendo $t = 0$ en (8) y utilizando la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ se obtiene

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x.$$

Puesto que la última serie es un desarrollo en un semiintervalo de f en una serie de senos, podemos escribir $A_n = b_n$;

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx. \tag{9}$$

Para determinar B_n, derivamos la ecuación (8) respecto a t y después hacemos $t = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t + B_n \frac{n\pi a}{L} \cos \frac{n\pi a}{L} t\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \frac{n\pi a}{L}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x.$$

Para esta última serie que es el desarrollo en un semiintervalo de senos de la velocidad inicial g en el intervalo, el coeficiente total $B_n n\pi a/L$ debe estar dado por la forma b_n en la ecuación (5) de la sección 11.3, es decir,

$$B_n \frac{n\pi a}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

de lo que se obtiene

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{L}x\,dx. \qquad (10)$$

La solución del problema con valores en la frontera (1) a (3) consiste en la serie (8) con coeficientes A_n y B_n definidos por (9) y (10), respectivamente.

Observamos que cuando la cuerda se libera a partir del *reposo*, entonces $g(x) = 0$ para toda x en el intervalo $[0, L]$, y por tanto, $B_n = 0$.

CUERDA PULSADA Un caso especial del problema con valores en la frontera en (1) a (3) es el modelo de la **cuerda pulsada**. Podemos ver el movimiento de la cuerda al trazar la gráfica de la solución o desplazamiento $u(x, t)$ para valores crecientes del tiempo t y utilizar la aplicación de animación de un SAC. En la figura 12.4.1 se presentan algunos marcos de un "video" generado de esta manera; en la figura 12.4.1 a se presenta la forma inicial de la cuerda. Se le pide que intente reproducir los resultados que se presentan en la figura trazando una secuencia de las sumas parciales de (8). Véanse los problemas 7 y 22 en los ejercicios 12.4.

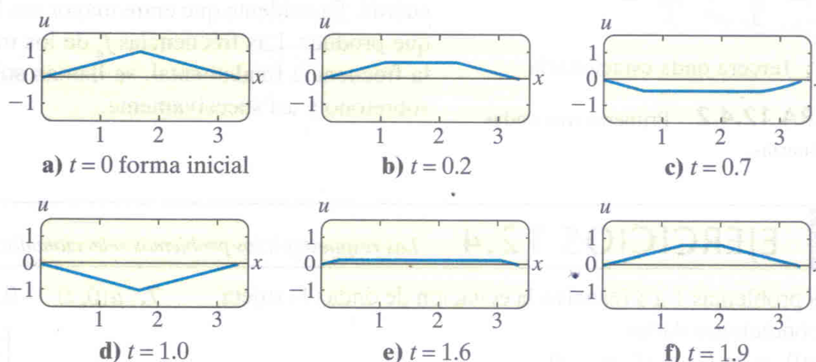


FIGURA 12.4.1 Marcos de un "video" de un SAC.

ONDAS ESTACIONARIAS Recuerde de la deducción de la ecuación de onda unidimensional en la sección 12.2, que la constante a que se encuentra en la solución del problema con valores en la frontera en las ecuaciones (1), (2) y (3) está dada por $\sqrt{T/\rho}$, donde ρ es la masa por unidad de longitud y T es la magnitud de la tensión en la cuerda. Cuando T es suficientemente grande, la cuerda vibrando produce un sonido musical. Este sonido es el resultado de ondas estacionarias. La solución (8) es una superposición de las soluciones producto llamada **ondas estacionarias** o **modos normales**:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \cdots.$$

En vista de las ecuaciones (6) y (7) de la sección 5.1 las soluciones producto (7) se puede escribir como

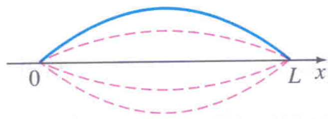
$$u_n(x, t) = C_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}t + \phi_n\right)\text{sen}\,\frac{n\pi}{L}x, \qquad (11)$$

donde $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ y ϕ_n se define por sen $\phi_n = A_n/C_n$ y cos $\phi_n = B_n/C_n$. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$ las ondas estacionarias son esencialmente las gráficas de $\text{sen}(n\pi x/L)$, con una amplitud que varía con el tiempo dada por

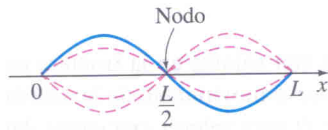
$$C_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}t + \phi_n\right).$$

Alternativamente, vemos de (11) que a un valor fijo de x cada función producto $u_n(x, t)$ representa un movimiento armónico simple con amplitud $C_n|\text{sen}(n\pi x/L)|$ y frecuencia $f_n = na/2L$. En otras palabras, cada punto en una onda estacionaria vibra con una amplitud diferente pero con la misma frecuencia. Cuando $n = 1$,

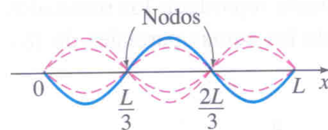
$$u_1(x, t) = C_1\,\text{sen}\left(\frac{\pi a}{L}t + \phi_1\right)\text{sen}\,\frac{\pi}{L}x$$



a) Primera onda estacionaría



b) Segunda onda estacionaría



c) Tercera onda estacionaría

FIGURA 12.4.2 Primeras tres ondas estacionarias.

se llama **primera onda estacionaria**, **primer modo normal** o **modo fundamental de vibración**. En la figura 12.4.2 se muestran las primeras tres ondas estacionarias o modos normales. Las gráficas punteadas representan las ondas estacionarias en diferentes valores del tiempo. Los puntos en el intervalo $(0, L)$, para el cual $\operatorname{sen}(n\pi/L)x = 0$, corresponden a puntos en una onda estacionaria donde no hay movimiento. Estos puntos se llaman **nodos**. Como ejemplo, en las figuras 12.4.2b y 12.4.2c vemos que la segunda onda estacionaria tiene un nodo en $L/2$ y la tercer onda estacionaria tiene dos nodos en $L/3$ y $2L/3$. En general, el n-ésimo modo normal de vibración tiene $n - 1$ nodos.

La frecuencia

$$f_1 = \frac{a}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

del primer modo normal se llama **frecuencia fundamental** o **primer armónico** y está directamente relacionado con la altura del sonido que produce un instrumento de cuerda. Es evidente que entre mayor sea la tensión en la cuerda, más alto será el sonido que produce. Las frecuencias f_n de los modos normales, que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental, se llaman **sobretonos**. El segundo armónico es el primer sobretono y así sucesivamente.

EJERCICIOS 12.4

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-20.

En los problemas 1 a 8 resuelva la ecuación de onda (1) sujeta a las condiciones dadas.

1. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

$u(x, 0) = \frac{1}{4}x(L - x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

2. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x(L - x)$

3. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

$u(x, 0)$, dado en la figura 12.4.3, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

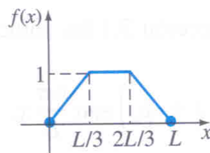


FIGURA 12.4.3 Desplazamiento inicial en el problema 3.

4. $u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0$

$u(x, 0) = \frac{1}{6}x(\pi^2 - x^2), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

5. $u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0$

$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \operatorname{sen} x$

6. $u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$

$u(x, 0) = 0.01 \operatorname{sen} 3\pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

7. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{L}, & 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ 2h\left(1 - \dfrac{x}{L}\right), & \dfrac{L}{2} \le x < L \end{cases}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

8. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$

$u(x, 0) = x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

Este problema podría describir el desplazamiento longitudinal $u(x, t)$ de una varilla elástica vibratoria. Las condiciones de frontera en $x = 0$ y $x = L$ se llaman **condiciones de extremo libre**. Véase la figura 12.4.4.

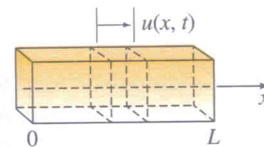


FIGURA 12.4.4 Varilla elástica vibratoria del problema 8.

9. Una cuerda se estira y se ancla al eje x en $x = 0$ y en $x = \pi$ para $t > 0$. Si las vibraciones transversales se presentan en un medio con resistencia al movimiento proporcional a la velocidad instantánea, entonces la ecuación de onda toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < \beta < 1, \quad t > 0.$$

Encuentre el desplazamiento $u(x, t)$ si la cuerda parte del reposo desde un desplazamiento inicial $f(x)$.

10. Muestre que una solución del problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \pi$$

es

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\operatorname{sen}(2k-1)x\cos\sqrt{(2k-1)^2+1}\,t.$$

11. El desplazamiento transversal $u(x, t)$ de una viga vibratoria de longitud L está determinado por una ecuación diferencial parcial de cuarto orden

$$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Si la viga está **simplemente apoyada**, como se muestra en la figura 12.4.5, las condiciones en la frontera inicial son

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=L} = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L.$$

Resuelva para $u(x, t)$. [*Sugerencia*: Por conveniencia utilice $\lambda = \alpha^4$ al separar las variables.]

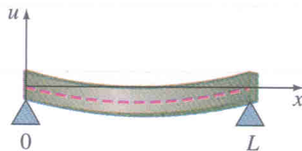


FIGURA 12.4.5 Viga simplemente apoyada del problema 11.

12. Si los extremos de la viga del problema 11 están incrustados en $x = 0$ y $x = L$, las condiciones de frontera se convierten, para $t > 0$, en:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0.$$

a) Demuestre que los eigenvalores del problema son $\lambda_n = x_n^2/L^2$, donde x_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, son las raíces positivas de la ecuación

$$\cosh x \cos x = 1.$$

b) Demuestre en forma gráfica que la ecuación del inciso a) tiene un número infinito de raíces.

c) Utilice una calculadora o un SAC para encontrar aproximaciones a los primeros cuatro eigenvalores. Utilice cuatro decimales.

13. Considere el problema con valores en la frontera dado en las ecuaciones (1), (2) y (3) de esta sección. Si $g(x) = 0$ para $0 < x < L$, demuestre que la solución del problema se puede escribir como

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)].$$

[Sugerencia: Utilice la identidad
$2\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 = \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) + \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)$.]

14. El desplazamiento vertical $u(x, t)$ de una cuerda infinitamente larga está determinado por el problema con valores iniciales

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x). \tag{12}$$

Este problema se puede resolver sin separar las variables.

a) Demuestre que la ecuación de onda se puede expresar en la forma $\partial^2 u/\partial\eta\partial\xi = 0$ haciendo las sustituciones $\xi = x + at$ y $\eta = x - at$.

b) Integre la ecuación diferencial parcial del inciso a), primero respecto a η y después respecto a ξ, para demostrar que $u(x, t) = F(x + at) + G(x - at)$ donde F y G son funciones arbitrarias derivables dos veces, es una solución de la ecuación de onda. Utilice esta solución y las condiciones iniciales dadas para demostrar que

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds + c$$

y $$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds - c,$$

donde x_0 es arbitraria y c es una constante de integración.

c) Utilice los resultados del inciso b) para demostrar que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds. \tag{13}$$

Observe que cuando la velocidad inicial $g(x) = 0$, obtenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)], \qquad -\infty < x < \infty.$$

Esta última solución se puede interpretar como una superposición de dos **ondas viajeras**, una moviéndose hacia la derecha (esto es, $\frac{1}{2}f(x - at)$) y la otra

moviéndose hacia la izquierda ($\frac{1}{2}f(x + at)$). Ambas ondas viajan con rapidez a y tienen la misma forma básica que la del desplazamiento inicial $f(x)$. La forma de $u(x, t)$ dado en (13) se llama **solución de d'Alembert**.

En los problemas 15 a 18 utilice la solución de d'Alembert (13) para resolver el problema con valores iniciales del problema 14 sujeto a las condiciones iniciales dadas.

15. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = 1$

16. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \cos x$

17. $f(x) = 0, \quad g(x) = \operatorname{sen} 2x$

18. $f(x) = e^{-x^2}, \quad g(x) = 0$

Tarea para el laboratorio de computación

19. **a)** Utilice un SAC para trazar la gráfica de la solución de d'Alembert del problema 18 en el intervalo $[-5, 5]$ en los tiempos $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ y $t = 4$. Coloque todas las gráficas en un sistema coordenado. Suponga que $a = 1$.

b) Utilice la aplicación 3D-plot de su SAC para trazar la gráfica de la solución de d'Alembert $u(x, t)$ en el problema 18 para $-5 \leq x \leq 5$, $0 \leq t \leq 4$. Experimente con distintas perspectivas tridimensionales de esta superficie. Elija la perspectiva de la superficie en la que usted considere que las gráficas del inciso a) son más evidentes.

20. Un modelo para una cuerda infinitamente larga se sujeta de los tres puntos $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y después se libera simultáneamente de esos tres puntos al tiempo que $t = 0$ está dado por (12) con

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = 0.$$

a) Trace la gráfica de la posición inicial de la cuerda en el intervalo $[-6, 6]$.

b) Utilice un SAC para trazar la gráfica de la solución de d'Alembert (13) en $[-6, 6]$ para $t = 0.2k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 25$. Suponga que $a = 1$.

c) Utilice la aplicación de su sistema algebraico computarizado para hacer un video de la solución. Describa el movimiento de la cuerda al transcurrir el tiempo.

21. Una cuerda de longitud infinita que coincide con el eje x se golpea en el origen con un martillo cuya cabeza tiene 0.2 pulgadas de diámetro. Un modelo para el movimiento de la cuerda está dado por (12) con

$$f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 0.1 \\ 0, & |x| \geq 0.1. \end{cases}$$

a) Utilice un SAC para trazar la gráfica de la solución de d'Alembert (13) en $[-6, 6]$ para $t = 0.2k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 25$. Suponga que $a = 1$.

b) Utilice la aplicación de animación de su sistema algebraico computarizado para hacer un video de la solución. Describa el movimiento de la cuerda al transcurrir el tiempo.

22. El modelo de la cuerda vibratoria en el problema 7 se llama de **cuerda pulsada**. La cuerda se fija al eje x en $x = 0$ y en $x = L$ y se sujeta en $x = L/2$ a h unidades arriba del eje x. Véase la figura 12.2.4. Iniciando en $t = 0$ la cuerda se libera a partir del reposo.

a) Utilice un SAC para trazar la gráfica de la suma parcial $S_6(x, t)$, esto es, los primeros seis términos distintos de cero de su solución, para $t = 0.1k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 20$. Suponga que $a = 1$, $h = 1$ y $L = \pi$.

b) Utilice la aplicación de animación de su sistema algebraico computarizado para hacer un video de la solución del problema 7.

12.5 ECUACIÓN DE LAPLACE

REPASO DE MATERIAL

- Lea nuevamente la página 438 de la sección 12.2 y el ejemplo 1 de la sección 11.4.

INTRODUCCIÓN Suponga que deseamos encontrar la temperatura de estado estable $u(x, y)$ en una placa rectangular cuyas aristas verticales $x = 0$ y $x = a$ están aislados, como se muestra en la figura 12.5.1. Cuando no se escapa calor de las caras laterales de la placa, resolvemos el siguiente problema con valores en la frontera:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < b \tag{2}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad 0 < x < a \tag{3}$$

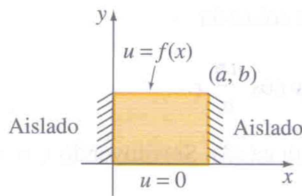


FIGURA 12.5.1 Temperaturas de estado estable en una placa rectangular.

SOLUCIÓN DEL PVF Haciendo $u(x, y) = X(x)Y(y)$, la separación de variables en la ecuación (1) conduce a

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{4}$$

$$Y'' - \lambda Y = 0. \tag{5}$$

Las tres condiciones homogéneas en (2) y (3) se traducen en $X'(0) = 0$, $X'(a) = 0$ y $Y(0) = 0$. El problema de Sturm-Liouville asociado con la ecuación en (4) es entonces

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(a) = 0. \tag{6}$$

Examinando los casos correspondientes a $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$, donde $\alpha > 0$, ya se han realizado en el ejemplo 1 de la sección 11.4.* Aquí presentamos un breve resumen del análisis.

Para $\lambda = 0$, la ecuación (6) se convierte en

$$X'' = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(a) = 0.$$

La solución de la ED es $X = c_1 + c_2x$. Las condiciones de frontera implican que $X = c_1$. Haciendo $c_1 \neq 0$, este problema tiene una solución no trivial. Para $\lambda = -\alpha^2 < 0$, (6) sólo tiene la solución trivial. Para $\lambda = \alpha^2 > 0$, (6) se convierte en

$$X'' + \alpha^2 X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(a) = 0.$$

La solución de la ED en este problema es $X = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x$. La condición de frontera $X'(0) = 0$ implica que $c_2 = 0$, por tanto $X = c_1 \cos \alpha x$. Derivando esta última expresión y después haciendo $x = a$ se obtiene $-c_1 \operatorname{sen} \alpha x = 0$. Como hemos supuesto que $\alpha > 0$, esta última condición se satisface cuando $\alpha a = n\pi$ o $\alpha = n\pi/a$, $n = 1, 2, \ldots$ Los eigenvalores de la ecuación (6) son entonces $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2/a^2$, $n = 1, 2, \ldots$ Si se corresponde $\lambda_0 = 0$ con $n = 0$, las eigenfunciones de (6) son

$$X = c_1, \qquad n = 0, \qquad \text{y} \qquad X = c_1 \cos\frac{n\pi}{a}x, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Ahora resolvemos la ecuación (5) sujeta a la única condición de frontera homogénea $Y(0) = 0$. Hay dos casos. Para $\lambda_0 = 0$, la ecuación (5) es simplemente $Y'' = 0$; por tanto su solución es $Y = c_3 + c_4y$. Pero $Y(0) = 0$ que implica que $c_3 = 0$, por tanto $Y = c_4y$. Para $\lambda_n = n^2\pi^2/a^2$, la ecuación (5) es $Y'' - \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}Y = 0$. Debido a que $0 < y < b$ define un intervalo finito, usamos (de acuerdo con la regla informal indicada en las páginas 135 y 136) la forma hiperbólica de la solución general:

$$Y = c_3 \cosh(n\pi y/a) + c_4 \operatorname{senh}(n\pi y/a).$$

$Y(0) = 0$ nuevamente implica que $c_3 = 0$, por lo que queda $Y = c_4 \operatorname{senh}(n\pi y/a)$.

Las soluciones producto $u_n = X(x)Y(y)$ que satisfacen la ecuación de Laplace (1) y las tres condiciones de frontera homogéneas en (2) y (3) son

$$A_0y, \quad n = 0, \qquad \text{y} \qquad A_n \operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}y \cos\frac{n\pi}{a}x, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

donde hemos reescrito c_1c_4 como A_0 para $n = 0$ y como A_n para $n = 1, 2, \ldots$

*En ese ejemplo los símbolos y y L juegan el papel de X y a en este análisis.

Con el principio de superposición se obtiene otra solución:

$$u(x, y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} y \cos \frac{n\pi}{a} x. \tag{7}$$

Ahora podemos aplicar la última condición de frontera en (3). Sustituyendo $x = b$ en la ecuación (7) se obtiene

$$u(x, b) = f(x) = A_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b \right) \cos \frac{n\pi}{a} x,$$

que es un desarrollo en un semiintervalo. Al hacer las identificaciones $A_0 b = a_0/2$ y $A_n = \operatorname{senh}(n\pi b/a) = a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ se tiene de las ecuaciones (2) y (3) de la sección 11.3 que

$$2A_0 b = \frac{2}{a} \int_0^a f(x)\, dx$$

$$A_0 = \frac{1}{ab} \int_0^a f(x)\, dx \tag{8}$$

y

$$A_n \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi}{a} x\, dx$$

$$A_n = \frac{2}{a \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi}{a} x\, dx. \tag{9}$$

La solución del problema con valores en la frontera (1) a (3) consiste en la serie (7), con coeficientes A_0 y A_n definidas en (8) y (9), respectivamente.

PROBLEMA DE DIRICHLET Un problema con valores en la frontera en el que se busca una solución de una ecuación diferencial parcial de tipo elíptico tal como la ecuación de Laplace, $\nabla^2 u = 0$, dentro de una región R acotada (en el plano o en el espacio tridimensional) tal que u tome los valores prescritos en toda la frontera de la región se llama **problema de Dirichlet**. En el problema 1 de los ejercicios 12.5 se pide demostrar que la solución del problema de Dirichlet, para una región rectangular

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad 0 < x < a$$

es

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} y \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x, \qquad \text{donde} \qquad A_n = \frac{2}{a \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x\, dx. \tag{10}$$

En el caso especial cuando $f(x) = 100$, $a = 1$ y $b = 1$, los coeficientes A_n en (10) están dados por $A_n = 200 \dfrac{1 - (-1)^n}{n\pi \operatorname{senh} n\pi}$. Con ayuda de un SAC se traza la gráfica de la superficie definida por $u(x, y)$ en la región R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, en la figura 12.5.2a se ve que se satisfacen las condiciones en la frontera; en especial, observe que a lo largo de $y = 1$, $u = 100$ para $0 \le x \le 1$. Las **isotermas** o curvas en la región rectangular a lo largo de las cuales la temperatura $u(x, y)$ es constante se pueden obtener con la aplicación para trazo de gráficas de curvas de nivel de un SAC, como se muestran en la

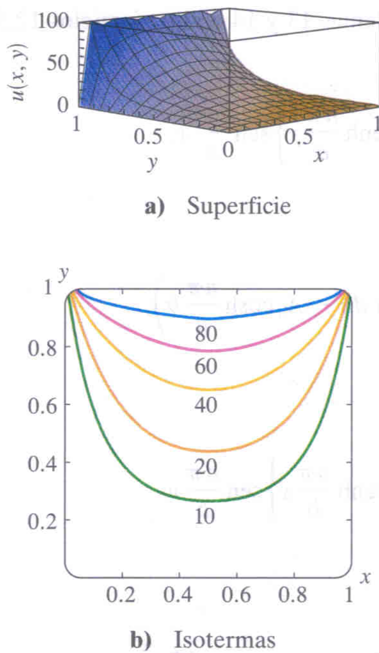


FIGURA 12.5.2 La superficie es la gráfica de las sumas parciales cuando $f(x) = 100$ y $a = b = 1$ en (10).

figura 12.5.2b. Estas isotermas también se pueden considerar como las curvas de intersección (proyectadas en el plano xy) de los planos horizontales $u = 80$, $u = 60$ y así sucesivamente, con la superficie de la figura 12.5.2a. Observe que en toda la región, la temperatura máxima es $u = 100$ y está en la parte de la frontera que corresponde a $y = 1$. Esto no es coincidencia. Hay un **principio del máximo** que establece que una solución u de la ecuación de Laplace dentro de una región R acotada con frontera B (como un rectángulo, círculo, esfera, etc.) tiene sus valores máximo y mínimo en B. Además, se puede demostrar que u no puede tener extremos (máximos o mínimos) relativos en el interior de R. Este último enunciado se ve con claridad en la superficie de la figura 12.5.2a.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN El problema de Dirichlet para un rectángulo se puede resolver con facilidad separando las variables cuando se especifican condiciones homogéneas para dos fronteras *paralelas*. Sin embargo, el método de separación de variables no se aplica a un problema de Dirichlet cuando las condiciones en la frontera en los cuatro lados del rectángulo son no homogéneas. Para salvar esta dificultad separamos el problema

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ &u(0, y) = F(y), \quad u(a, y) = G(y), \quad 0 < y < b \\ &u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 < x < a \end{aligned} \tag{11}$$

en dos problemas, cada uno con condiciones homogéneas en la frontera, en lados paralelos, como se muestra a continuación:

Problema 1

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ &u_1(0, y) = 0, \quad u_1(a, y) = 0, \quad 0 < y < b \\ &u_1(x, 0) = f(x), \quad u_1(x, b) = g(x), \quad 0 < x < a \end{aligned}$$

Problema 2

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ &u_2(0, y) = F(y), \quad u_2(a, y) = G(y), \quad 0 < y < b \\ &u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(x, b) = 0, \quad 0 < x < a \end{aligned}$$

Suponga que u_1 y u_2 son las soluciones de los problemas 1 y 2, respectivamente. Si definimos $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$, veremos que u satisface todas las condiciones en la frontera del problema original (11); por ejemplo,

$$\begin{aligned} u(0, y) &= u_1(0, y) + u_2(0, y) = 0 + F(y) = F(y), \\ u(x, b) &= u_1(x, b) + u_2(x, b) = g(x) + 0 = g(x), \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Además, u es una solución de la ecuación de Laplace por el teorema 12.1.1. En otras palabras, al resolver los problemas 1 y 2 y sumar las soluciones, ya hemos resuelto el problema original. Esta propiedad aditiva de las soluciones se llama **principio de superposición**. Véase la figura 12.5.3.

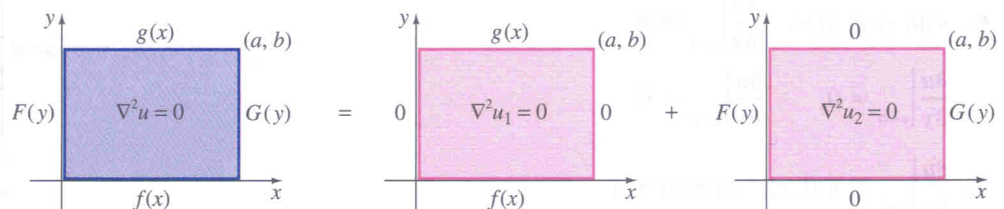


FIGURA 12.5.3 Solución u = solución u_1 del problema 1 + solución u_2 del problema 2.

Dejaremos como ejercicio (véanse los problemas 13 y 14 de los ejercicios 12.5) demostrar que una solución del problema 1 es

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n \cosh\frac{n\pi}{a}y + B_n \operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}y\right\}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x,$$

donde $$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

$$B_n = \frac{1}{\operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}b}\left(\frac{2}{a}\int_0^a g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\,dx - A_n\cosh\frac{n\pi}{a}b\right),$$

y que una solución del problema 2 es

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n \cosh\frac{n\pi}{b}x + B_n \operatorname{senh}\frac{n\pi}{b}x\right\}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{b}y,$$

donde $$A_n = \frac{2}{b}\int_0^b F(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{b}y\,dy$$

$$B_n = \frac{1}{\operatorname{senh}\frac{n\pi}{b}a}\left(\frac{2}{b}\int_0^b G(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{b}y\,dy - A_n\cosh\frac{n\pi}{b}a\right).$$

EJERCICIOS 12.5

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-21.

En los problemas 1 a 10, resuelva la ecuación de Laplace (1) para una placa rectangular sujeta a las condiciones de frontera dadas

1. $u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0$
   $u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x)$

2. $u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0$
   $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad u(x, b) = f(x)$

3. $u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0$
   $u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = 0$

4. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$
   $u(x, 0) = x, \quad u(x, b) = 0$

5. $u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 1 - y$
   $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = 0$

6. $u(0, y) = g(y), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0$
   $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi} = 0$

7. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u(0, y), \quad u(\pi, y) = 1$
   $u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = 0$

8. $u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0$
   $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = u(x, 0), \quad u(x, 1) = f(x)$

9. $u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0$
   $u(x, 0) = 100, \quad u(x, 1) = 200$

10. $u(0, y) = 10y, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = -1$
    $u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0$

En los problemas 11 y 12 resuelva la ecuación de Laplace (1) para la placa semiinfinita que se encuentra en la dirección positiva del eje y. En cada caso suponga que $u(x, y)$ está acotada cuando $y \to \infty$.

11.

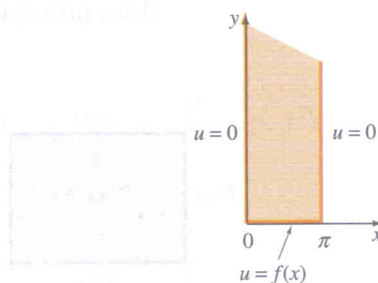


FIGURA 12.5.4 Placa del problema 11.

12.

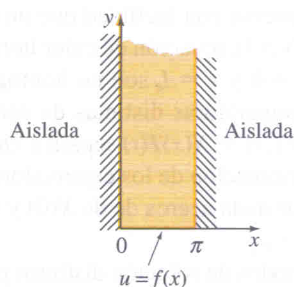


FIGURA 12.5.5 Placa del problema 12.

En los problemas 13 y 14 resuelva la ecuación de Laplace (1) para una placa rectangular sujeta a las condiciones de frontera dadas.

13. $u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0$
$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x)$

14. $u(0, y) = F(y), \quad u(a, y) = G(y)$
$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0$

En los problemas 15 y 16 aplique el principio de superposición y resuelva la ecuación de Laplace (1) para una placa cuadrada sujeta a las condiciones en la frontera dadas.

15. $u(0, y) = 1, \quad u(\pi, y) = 1$
$u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = 1$

16. $u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = y(2 - y)$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

Problemas para analizar

17. a) En el problema 1 suponga que $a = b = \pi$ y $f(x) = 100x(\pi - x)$. Sin utilizar la solución $u(x, y)$ dibuje, a mano, cómo se vería la superficie sobre una región rectangular definida por $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi$.

b) ¿Cuál es el máximo valor de la temperatura u para $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi$?

c) Utilice la información del inciso a) para calcular los coeficientes de su respuesta del problema 1. Después use la aplicación 3D-plot de su SAC para trazar la gráfica de la suma parcial $S_5(x, y)$ que consiste en los primeros cinco términos distintos de cero de la solución del inciso a) para $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi$. Utilice perspectivas diferentes y después compárelas con su dibujo del inciso a).

18. En el problema 16 ¿cuál es el valor máximo de la temperatura u para $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$?

Tarea para el laboratorio de computación

19. a) Use la aplicación de trazo de curvas de nivel de su SAC para trazar las gráficas de las isotermas $u = 170$, 140, 110, 80, 60, 30 para la solución del problema 9. Use la suma parcial $S_5(x, y)$ que consiste en los primeros cinco términos distintos de cero de la solución.

b) Utilice la aplicación de gráfica tridimensional de su SAC para trazar la suma parcial $S_5(x, y)$.

20. Use la aplicación 3D-plot de su SAC para trazar las isotermas $u = 2, 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0, -0.05$ de la solución del problema 10. Utilice la suma parcial $S_5(x, y)$ formada por los cinco primeros términos distintos de cero de la solución.

12.6 PROBLEMAS NO HOMOGÉNEOS CON VALORES EN LA FRONTERA

REPASO DE MATERIAL

- Secciones 12.3 a 12.5.

INTRODUCCIÓN Se dice que un problema con valores en la frontera es **no homogéneo** si la ecuación diferencial parcial o las condiciones de frontera son no homogéneas. El método de separación de variables que se ha empleado en las tres secciones anteriores no puede aplicarse *directamente* a un problema con valores en la frontera. Sin embargo, en las dos primeras técnicas que analizamos en esta sección empleamos un cambio de variable que transforma un problema con valores en la frontera en dos problemas; un PVF relativamente simple para una EDO y los otros PVF homogéneos para una EDP. El último problema se puede resolver con separación de variables. La segunda técnica es básicamente un procedimiento directo del PVF utilizando desarrollos en series ortogonales.

PVF NO HOMOGÉNEOS Cuando se genera calor a una razón constante r en una varilla de longitud finita, la forma de la ecuación de calor es

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0. \tag{1}$$

La ecuación (1) es no homogénea y se observa con facilidad que no es separable. Por otro lado, supongamos que se desea resolver la ecuación de calor homogénea $ku_{xx} = u_t$ cuando las condiciones de frontera en $x = 0$ y $x = L$ son no homogéneas, por ejemplo, que las fronteras se mantengan a temperaturas distintas de cero: $u(0, t) = u_0$ y $u(L, t) = u_1$. Aun cuando la sustitución $u(x, t) = X(x)T(t)$ separa a $ku_{xx} = u_t$, encontramos rápidamente un obstáculo en la determinación de los eigenvalores y las eigenfunciones porque lo que no podemos concluir nada acerca de de $X(0)$ y de $X(L)$ de $u(0, t) = X(0)T(t) = u_0$ y de $u(L, t) = X(L)T(t) = u_1$.

A continuación mostraremos dos métodos de solución distintos para los diferentes tipos de PVF no homogéneos.

MÉTODO 1 Considere un PVF que implica una *ecuación no homogénea con condiciones de frontera independientes del tiempo* tales como

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x) = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = u_0, \quad u(L, t) = u_1, \quad t > 0 \tag{2}$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L,$$

donde u_0 y u_1 son constantes. Cambiando la variable dependiente u a una nueva variable dependiente v sustituyendo $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$, el problema en (2) se puede reducir a dos problemas:

$$\text{Problema } A: \quad \{k\psi'' + F(x) = 0, \qquad \psi(0) = u_0, \quad \psi(L) = u_1$$

$$\text{Problema } B: \quad \begin{cases} k\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial v}{\partial t}, \\ v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0 \\ v(x, 0) = f(x) - \psi(x) \end{cases}$$

Observe que el problema A implica una EDO que se puede resolver por integración, mientras que el problema B es un PVF homogéneo que se puede resolver por la separación de variables común. Una solución del problema original (2) es la suma de las soluciones de los problemas A y B.

El siguiente ejemplo ilustra este primer método.

EJEMPLO 1 Uso del método 1

Suponga que r es una constante positiva. Resuelva la ecuación (1) sujeta a

$$u(0, t) = 0, \qquad u(1, t) = u_0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1.$$

SOLUCIÓN Ambas ecuaciones diferenciales parciales en la condición de frontera en $x = 1$ son no homogéneas. Si hacemos $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$, entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \psi'' \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (1) se obtiene

$$k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k\psi'' + r = \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{3}$$

La ecuación (3) se reduce a una ecuación homogénea si pedimos que ψ satisfaga

$$k\psi'' + r = 0 \qquad \text{o} \qquad \psi'' = -\frac{r}{k}.$$

Integrando la última ecuación dos veces se obtiene que

$$\psi(x) = -\frac{r}{2k}x^2 + c_1 x + c_2. \tag{4}$$

Además,
$$u(0, t) = v(0, t) + \psi(0) = 0$$
$$u(1, t) = v(1, t) + \psi(1) = u_0.$$

Se tiene que $v(0, t) = 0$ y $v(1, t) = 0$, suponiendo que
$$\psi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \psi(1) = u_0.$$

Aplicando estas dos últimas condiciones a la ecuación (4) se obtiene, respectivamente, $c_2 = 0$ y $c_1 = r/2k + u_0$. Por tanto,
$$\psi(x) = -\frac{r}{2k}x^2 + \left(\frac{r}{2k} + u_0\right)x.$$

Por último, la condición inicial $u(x, 0) = v(x, 0) + \psi(x)$ implica que $v(x, 0) = u(x, 0) - \psi(x) = f(x) - \psi(x)$. Entonces, para determinar $v(x, t)$, resolvemos el nuevo problema con valores en la frontera
$$k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0, \quad t > 0$$
$$v(x, 0) = f(x) + \frac{r}{2k}x^2 - \left(\frac{r}{2k} + u_0\right)x, \qquad 0 < x < 1$$

por separación de variables. De la manera usual encontramos que
$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-kn^2\pi^2 t} \operatorname{sen} n\pi x,$$

donde
$$A_n = 2\int_0^1 \left[f(x) + \frac{r}{2k}x^2 - \left(\frac{r}{2k} + u_0\right)x\right] \operatorname{sen} n\pi x\, dx. \tag{5}$$

Sumando $\psi(x)$ y $v(x, t)$ obtenemos una solución del problema original:
$$u(x, t) = -\frac{r}{2k}x^2 + \left(\frac{r}{2k} + u_0\right)x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-kn^2\pi^2 t} \operatorname{sen} n\pi x, \tag{6}$$

donde los coeficientes A_n están definidos en la ecuación (5). ■

Observe en la ecuación (6) que $u(x, t) \to \psi(x)$ cuando $t \to \infty$. En el contexto de las formas de solución de la ecuación de calor, ψ se llama **solución de estado estable**. Ya que $v(x, t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, ésta se llama **solución transitoria.**

MÉTODO 2 Otro tipo de problemas implica una *ecuación homogénea dependiente del tiempo* y *condiciones frontera homogéneas*. A diferencia del método 1, en el que $u(x, t)$ se encontró al resolver dos problemas separados, es posible encontrar la solución completa de un problema tal como
$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \tag{7}$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L,$$

haciendo la suposición de que los coeficientes dependientes del tiempo $u_n(t)$ y $F_n(t)$ se pueden encontrar tanto $u(x, t)$ como $F(x, t)$ en la ecuación (7) se puede desarrollar en las series
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L}x \qquad \text{y} \qquad F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L}x, \tag{8}$$

donde $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$, $n = 1, 2, 3 \ldots$, son las eigenfunciones de $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = 0$, $X(L) = 0$ correspondientes a los eigenvalores $\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2/L^2$. El último problema se obtendría aplicando separación de variables a la EPD homogénea asociada en (7). En (8) note que la forma supuesta para $u(x, t)$ ya satisface las condiciones de frontera en (7). La idea básica aquí es sustituir la primera serie de la ecuación (8) en la EDP no homogénea en la ecuación (7), agrupando términos e igualando la serie resultante con el desarrollo en serie encontrado para $F(x, t)$.

El siguiente ejemplo ilustra este método.

EJEMPLO 2 Uso del método 2

Resuelva $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 - x)\operatorname{sen} t = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

SOLUCIÓN Con $k = 1$, $L = 1$, los eigenvalores y las eigenfunciones de $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = 0$, $X(1) = 0$ se encuentra que son $\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2$ y $\operatorname{sen} n\pi x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Si suponemos que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \operatorname{sen} n\pi x, \tag{9}$$

entonces las derivadas parciales formales de u son

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)(-n^2\pi^2) \operatorname{sen} n\pi x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) \operatorname{sen} n\pi x. \tag{10}$$

Ahora suponiendo que podemos escribir $F(x, t) = (1 - x) \operatorname{sen} t$ como

$$(1 - x)\operatorname{sen} t = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \operatorname{sen} n\pi x$$

implica que

$$F_n(t) = \frac{2}{1}\int_0^1 (1 - x) \operatorname{sen} t \operatorname{sen} n\pi x \, dx = 2 \operatorname{sen} t \int_0^1 (1 - x) \operatorname{sen} n\pi x \, dx = \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} t.$$

Por tanto, $$(1 - x)\operatorname{sen} t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} t \operatorname{sen} n\pi x. \tag{11}$$

Sustituyendo las series de las ecuaciones (10) y (11) en $u_t - u_{xx} = (1 - x) \operatorname{sen} t$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n'(t) + n^2\pi^2 u_n(t) \right] \operatorname{sen} n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen} t}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x.$$

Para determinar $u_n(t)$, igualamos los coeficientes de $\operatorname{sen} n\pi x$ en cada miembro de la igualdad anterior:

$$u_n'(t) + n^2\pi^2 u_n(t) = \frac{2 \operatorname{sen} t}{n\pi}.$$

Esta última ecuación es una EDO lineal de primer orden cuya solución es

$$u_n(t) = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{n^2\pi^2 \operatorname{sen} t - \cos t}{n^4\pi^4 + 1} \right] + C_n e^{-n^2\pi^2 t},$$

donde C_n denota la constante arbitraria. Por tanto, la forma supuesta de $u(x, t)$ en la ecuación (9) se puede escribir como la suma de dos series:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left[\frac{n^2\pi^2 \operatorname{sen} t - \cos t}{n^4\pi^4 + 1}\right] \operatorname{sen} n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2\pi^2 t} \operatorname{sen} n\pi x. \quad (12)$$

Por último, aplicamos la condición inicial $u(x, 0) = 0$ en la ecuación (12). Reescribiendo la expresión resultante como una serie,

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-2}{n\pi(n^4\pi^4 + 1)} + C_n\right] \operatorname{sen} n\pi x,$$

concluimos de esta identidad que el coeficiente total de sen $n\pi x$ debe ser cero, por lo que

$$C_n = \frac{2}{n\pi(n^4\pi^4 + 1)}.$$

Por tanto, de la ecuación (12) vemos que una solución del problema dado es

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2 \operatorname{sen} t - \cos t}{n(n^4\pi^4 + 1)} \operatorname{sen} n\pi x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^4\pi^4 + 1)} e^{-n^2\pi^2 t} \operatorname{sen} n\pi x. \quad ■$$

EJERCICIOS 12.6

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-21.

En los problemas 1 a 12 utilice el método 1 de esta sección para resolver el problema con valores en la frontera dado.

En los problemas 1 y 2 resuelva la ecuación de calor $ku_{xx} = u_t$, $0 < x < 1$, $t > 0$, sujeto a las condiciones dadas.

1. $u(0, t) = 100, \quad u(1, t) = 100$
$u(x, 0) = 0$

2. $u(0, t) = u_0, \quad u(1, t) = 0$
$u(x, 0) = f(x)$

En los problemas 3 y 4 resuelva la ecuación diferencial parcial (1) sujeta a las condiciones dadas.

3. $u(0, t) = u_0, \quad u(1, t) = u_0$
$u(x, 0) = 0$

4. $u(0, t) = u_0, \quad u(1, t) = u_1$
$u(x, 0) = f(x)$

5. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Ae^{-\beta x} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \beta > 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1.$$

La ecuación diferencial parcial es una forma de la ecuación de calor cuando el calor se genera dentro de una varilla delgada a partir de un decaimiento radioactivo del material.

6. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = u_0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

La ecuación diferencial parcial es una forma de la ecuación de calor cuando hay pérdida de calor por radiación de la superficie lateral de una varilla delgada en un medio a temperatura cero.

7. Encuentre una solución de estado estable $\psi(x)$ del problema con valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u - u_0) = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = u_0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1.$$

8. Encuentre una solución de estado estable $\psi(x)$ si la varilla del problema 7 es semiinfinita y se encuentra sobre la dirección positiva de las x e irradia de su superficie lateral hacia un medio a temperatura cero y

$$u(0, t) = u_0, \qquad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad x > 0.$$

9. Cuando una cuerda vibratoria se somete a una fuerza vertical externa que varía con la distancia horizontal desde el

extremo izquierdo, la ecuación de onda tiene la forma

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Ax = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde A es una constante. Resuelva esta ecuación diferencial parcial sujeta a

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1.$$

10. Una cuerda inicialmente en reposo sobre el eje x está anclada en $x = 0$ y en $x = 1$. Si la cuerda se deja caer bajo su propio peso para $t > 0$, el desplazamiento $u(x, t)$ satisface

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Determine $u(x, t)$.

11. Encuentre la temperatura de estado estable $u(x, y)$ en la placa semiinfinita que se muestra en la figura 12.6.1. Suponga que la temperatura está acotada conforme $x \to \infty$. [*Sugerencia:* Pruebe $u(x, y) = v(x, y) + \psi(y)$.]

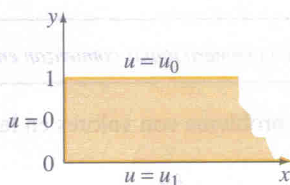


FIGURA 12.6.1 Placa del problema 11.

12. La ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -h,$$

donde $h > 0$ es una constante, se conoce como **ecuación de Poisson** y se presenta en diversos problemas que implican potencial eléctrico. Resuelva la ecuación sujeta a las condiciones

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 1, \quad y > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

En los problemas 13 a 16 utilice el método 2 de esta sección para resolver el problema con valores en la frontera dado.

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xe^{-3t} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$

$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0$

$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi$

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xe^{-3t} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \quad t > 0$

$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi$

15. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1 + x - x\cos t = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$

$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$

$u(x, 0) = x(1 - x), \quad 0 < x < 1$

16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos t \operatorname{sen} x = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$

$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0,$

$u(x, 0) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \pi$

Problema aportado

Dr. Ben Fitzpatrick, director del Clarence Wallen de Matemáticas, Departamento de matemáticas de la Universidad Loyola Marymount

17. Ecuación de una viga de Euler-Bernoulli En este problema analizaremos un modelo de una viga flexible que está sometida a una fuerza. Una metodología experimental común en el análisis vibracional es forzar una estructura a diferentes frecuencias. La estructura se monta sobre un agitador estilo pistón, que aplica fuerza sobre la estructura periódicamente. La fuerza periódica de entrada se controla normalmente con una computadora. Véase la figura 12.6.2

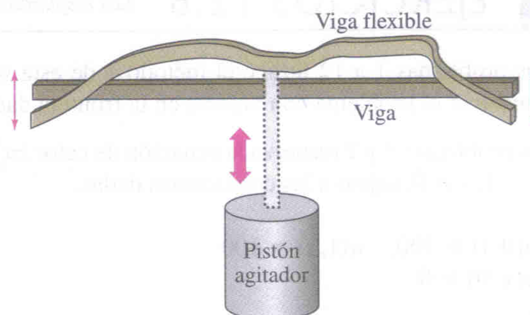


FIGURA 12.6.2 Viga del problema 17 flexionada bajo la fuerza ejercida por un dispositivo agitador central.

La **ecuación de una viga de Euler-Bernoulli** modela la dinámica de esta situación.

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = f(x, t).$$

Los extremos están libres, conduciendo a condiciones de frontera de "no momento/no fuerza de corte":

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=L} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{x=L} = 0,$$

Las definiciones de los parámetros son las siguientes. La densidad de masa lineal (que es la densidad de masa volumétrica por la sección transversal) del material de la viga es ρ. El módulo de Young es E y el momento de inercia es I. Para la viga de interés se conocen cada uno de estos parámetros. El momento de inercia para una sección transversal rectangular es $I = wh^3/12$, donde h es el espesor (medido en la dirección de movimiento de la viga) y w es el ancho (medido en la dirección ortogonal al movimiento).

En estos problemas hay varias tareas cuya solución requiere ayuda computacional. Un sistema algebraico computacional tal como *Mathematica* o *Maple* será muy útil. Estas son sus tareas:

a) Aplique separación de variables para resolver la ecuación homogénea

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=0.$$

La solución, como se analizó en las secciones de separación de variables para las ecuaciones de calor y de onda, toma la forma $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$, donde $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$. Esta tarea tiene varias subtareas:

i) Encuentre la fórmula general para la función $T(t)$. Su respuesta debería ser de la forma $T(t) = P\cos(\omega t) + Q\,\text{sen}(\omega t)$ donde P y Q son constantes desconocidas y ω depende de ρ, E, I, L y de las frecuencias espaciales que obtendrá de la ecuación $X(x)$.

ii) Encuentre la fórmula general para la función $X(x)$. Su respuesta debería ser de la forma $X(x) = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x} + C\cos\beta x + D\,\text{sen}\,\beta x$, donde A, B, C y D son constantes desconocidas y β depende de ρ, E, I, L y de las frecuencias espaciales.

iii) Utilice las condiciones de frontera para encontrar cuatro ecuaciones que incluyen las cinco incógnitas del inciso *ii)* (A, B, C, D y β). Escriba estas ecuaciones como una matriz 4×4 (que depende de β) por el vector de coeficientes A, B, C y D.

iv) Puesto que el miembro derecho de su sistema de ecuaciones es el vector cero, tiene dos posibilidades: Todos los coeficientes son cero o el determinante de la matriz es cero. Dibuje el determinante como una función de β. Dibújelo con cuidado para que así pueda ver las oscilaciones. Encuentre los 10 números más pequeños de β que hagan que el determinante sea igual a cero.

v) ¿Qué restricciones deben tener A, B, C y D? Éstos son parámetros desconocidos, pero se deben establecer algunas relaciones.

vi) Utilice estos valores de β para determinar los cinco valores más pequeños de ω del inciso *i)*.

b) Dibuje las formas de los 10 modos que encontró.

c) Utilice separación de variables para resolver la ecuación forzada,

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=f(x, t).$$

La función de fuerza es (aproximadamente) $f(x, t) = F_0\,\text{sen}(\alpha t)\delta(x - L/2)$, una función periódica que se concentra en el punto medio de la viga. Para utilizar el método de separación de variables, necesita desarrollar la función de fuerza en términos de las funciones $X_n(x)$. Como se describió en el contexto de la ecuación de onda de la página 479 de este libro y utilizando las técnicas del desarrollo en funciones ortogonales de la sección 11.1, la función de fuerza se puede escribir como

$$f(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_0^L f(x, t)X_n(x)\,dx}{\int_0^L X_n^2(x)\,dx}X_n(x).$$

d) Los parámetros del material para la viga, una viga de aluminio 6061-T6 con sección transversal rectangular, son los siguientes:

$$L = 1.22\text{ m},$$
$$w = 0.019\text{ m},$$
$$h = 0.0033\text{ m},$$
$$E = 7.310 \times 10^{10}\text{ m} = 73.10\text{ GPa},$$
$$\rho = 0.1693\text{ kg/m}.$$

Usando estos parámetros del material dibuje la solución como una función del espacio y del tiempo.

e) Dibuje la aceleración a partir del modelo y los datos (obtenidos desde el sitio web) y compare los resultados.

f) Genere una representación más exacta para la función de fuerza con base en el establecimiento del sistema y aplíquela para resolver la ecuación diferencial forzada.

12.7 DESARROLLOS EN SERIES ORTOGONALES

REPASO DE MATERIAL

- Los resultados de las ecuaciones (7) a (11) de la sección 11.1 constituyen la base del análisis siguiente. Se recomienda una revisión de este tema.

INTRODUCCIÓN Para ciertos tipos de condiciones en la frontera el método de separación de variables y el principio de superposición conducen al desarrollo de una función en forma de serie trigonométrica que *no* es una serie de Fourier. Para resolver los problemas de esta sección utilizaremos el concepto de desarrollos en series ortogonales o serie generalizada de Fourier.

EJEMPLO 1 Uso de desarrollo de series ortogonales

La temperatura en una varilla de longitud unitaria en la que existe transferencia de calor desde su extremo derecho hacia un ambiente a temperatura constante cero, se determina a partir de

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = -hu(1, t), \quad h > 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 1, \quad 0 < x < 1.$$

Determine $u(x, t)$.

SOLUCIÓN Procediendo como en la sección 12.3 con $u(x, t) = X(x)T(t)$ y utilizando $-\lambda$ como la constante de separación, encontramos que las ecuaciones separadas y las condiciones de frontera son, respectivamente,

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{1}$$

$$T' + k\lambda T = 0 \tag{2}$$

$$X(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad X'(1) = -hX(1). \tag{3}$$

La ecuación (1) y las condiciones de frontera homogéneas (3) forman un problema regular de Sturm-Liouville:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(1) + hX(1) = 0. \tag{4}$$

Analizando los tres casos usuales en los que λ es 0, negativa o positiva, encontramos que sólo en el último caso se obtienen las soluciones no triviales. Por tanto, con $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$, la solución general de la ED en (4) es

$$X(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x. \tag{5}$$

La primera condición en (4) da inmediatamente que $c_1 = 0$. Aplicando la segunda condición en (4) a $X(x) = c_2 \operatorname{sen} \alpha x$ se obtiene

$$\alpha \cos \alpha + h \operatorname{sen} \alpha = 0 \qquad \text{o} \qquad \tan \alpha = -\frac{\alpha}{h}. \tag{6}$$

Del análisis del ejemplo 2 de la sección 11.4, sabemos que la última de las ecuaciones (6) tiene un número infinito de raíces. Si las raíces positivas consecutivas se denotan por α_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces los eigenvalores del problema son $\lambda_n = \alpha_n^2$, y las eigenfunciones correspondientes son $X(x) = c_2 \operatorname{sen} \alpha_n x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ La solución de la ED de primer orden (2) es $T(t) = c_3 e^{-k\alpha_n^2 t}$, por tanto

$$u_n = XT = A_n e^{-k\alpha_n^2 t} \operatorname{sen} \alpha_n x \qquad \text{y} \qquad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\alpha_n^2 t} \operatorname{sen} \alpha_n x.$$

Ahora en $t = 0$, $u(x, 0) = 1$, $0 < x < 1$, por tanto

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \alpha_n x. \tag{7}$$

La serie (7) no es una serie de senos de Fourier; más bien, es un desarrollo de $u(x, 0) = 1$ en términos de las funciones ortogonales que surgen del problema regular de Sturm-Liouville (4). Por tanto, el conjunto de eigenfunciones propias $\{\operatorname{sen} \alpha_n x\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde las α se definen con $\tan \alpha = -\alpha/h$, es ortogonal respecto a la función de peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$. Acoplando (7) con (7) de la sección 11.1, se tiene de la ecuación (8) de esa sección, con $f(x) = 1$ y $\phi_n(x) = \operatorname{sen} \alpha_n x$, que los coeficientes A_n están dados por

$$A_n = \frac{\int_0^1 \operatorname{sen} \alpha_n x \, dx}{\int_0^1 \operatorname{sen}^2 \alpha_n x \, dx}. \tag{8}$$

Para evaluar la norma cuadrada de cada una de las eigenfunciones, utilizamos una identidad trigonométrica:

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2 \alpha_n x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 2\alpha x) \, dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\alpha_n} \operatorname{sen} 2\alpha_n\right). \tag{9}$$

Utilizando la fórmula del ángulo doble $\operatorname{sen} 2\alpha_n = 2 \operatorname{sen} \alpha_n \cos \alpha_n$ y la primer ecuación en (6) en la forma $\alpha_n \cos \alpha_n = -h \operatorname{sen} \alpha_n$, simplificamos (9) como

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2 \alpha_n x \, dx = \frac{1}{2h}(h + \cos^2 \alpha_n).$$

También $$\int_0^1 \operatorname{sen} \alpha_n x \, dx = -\frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n x \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha_n}(1 - \cos \alpha_n).$$

Por tanto, la ecuación (8) se convierte en

$$A_n = \frac{2h(1 - \cos \alpha_n)}{\alpha_n(h + \cos^2 \alpha_n)}.$$

Por último, una solución del problema con valores en la frontera es

$$u(x, t) = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \alpha_n}{\alpha_n(h + \cos^2 \alpha_n)} e^{-k\alpha_n^2 t} \operatorname{sen} \alpha_n x.$$ ■

EJEMPLO 2 Uso del desarrollo en series ortogonales

El ángulo de torsión $\theta(x, t)$ de un eje de longitud unitaria que vibra torsionalmente se determina a partir de

$$a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$\theta(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0, \quad t > 0$$

$$\theta(x, 0) = x, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1.$$

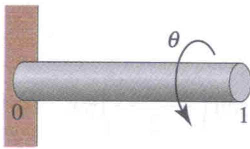


FIGURA 12.7.1 Torsión de un eje.

Véase la figura 12.7.1. La condición de frontera en $x = 1$ se llama condición de extremo libre. Determine $\theta(x, t)$.

SOLUCIÓN Procediendo como en la sección 12.4 con $\theta(x, t) = X(x)T(t)$ y utilizando $-\lambda$ una vez más como la constante de separación, las ecuaciones separadas y las condiciones de frontera son:

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{10}$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0 \tag{11}$$

$$X(0) = 0 \quad \text{y} \quad X'(1) = 0. \tag{12}$$

Un problema regular de Sturm-Liouville en este caso consiste en la ecuación (10) y en las condiciones de frontera homogéneas en (12):

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(1) = 0. \tag{13}$$

Como en el ejemplo 1, la ecuación (13) tiene soluciones no triviales para $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$. Las condiciones de frontera $X(0) = 0$ y $X'(1) = 0$ aplicadas a la solución general

$$X(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x \tag{14}$$

dan, respectivamente, $c_1 = 0$ y $c_2 \cos \alpha = 0$. Puesto que la función coseno es cero en múltiplos impares de $\pi/2$, $\alpha = (2n - 1)\pi/2$, y los eigenvalores de (13) son $\lambda_n = \alpha_n^2 = (2n - 1)^2\pi^2/4$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ La solución de la ED de segundo orden (11) es $T(t) = c_3 \cos a\alpha_n t + c_4 \operatorname{sen} a\alpha_n t$. La condición inicial $T'(0) = 0$ da $c_4 = 0$, por lo que

$$\theta_n = XT = A_n \cos a\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi t \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x.$$

Para satisfacer la ecuación inicial restante, formamos

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos a\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi t \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x. \tag{15}$$

Cuando $t = 0$, debemos tener, para $0 < x < 1$,

$$\theta(x, 0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x. \tag{16}$$

Como en el ejemplo 1, el conjunto de eigenfunciones $\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x\right\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, es ortogonal respecto a la función de peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$. Aunque la serie en la ecuación (16) parece una serie de Fourier de senos, no lo es porque el argumento de la función seno no es múltiplo entero de $\pi x/L$ (aquí $L = 1$). Nuevamente la serie es un desarrollo en serie ortogonal o una serie de Fourier generalizada. Por tanto, de (8) de la sección 11.1, los coeficientes en (16) son

$$A_n = \frac{\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x\, dx}{\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x\, dx}.$$

Realizando las dos integraciones, obtenemos que

$$A_n = \frac{8(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2}.$$

El ángulo de torsión es entonces

$$\theta(x, t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \cos a\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi t \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x. \tag{17}$$ ■

Podemos utilizar un SAC para trazar la gráfica de $\theta(x, t)$ definida en (17) ya sea como una superficie tridimensional o como curvas bidimensionales conservando una de las variables constante. En la figura 12.7.2 hemos trazado la gráfica de θ sobre la región rectangular $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 10$. Las secciones transversales de esta superficie son interesantes. En la figura 12.7.3 hemos trazado a θ como una función del tiempo t en el intervalo $[0, 10]$ usando cuatro valores específicos de x y una suma parcial de la ecuación (17) (con $a = 1$). Como se puede ver en las cuatro partes de la figura 12.7.3, el ángulo de torsión de cada sección transversal de la varilla oscila hacia adelante y hacia atrás (valores positivos y negativos de θ) conforme el tiempo aumenta. La figura 12.7.3d muestra lo que se esperaría intuitivamente cuando no hay amortiguamiento, el extremo de la varilla en $x = 1$ inicialmente se desplaza 1 radian ($\theta(1, 0) = 1$); cuando está en movimiento, este extremo oscila indefinidamente entre su desplazamiento máximo de 1 radián y su desplazamiento mínimo de -1 radián. Las gráficas de las figuras 12.7.3a-c presentan lo que parece ser un comportamiento de "pausa" de θ en su desplazamiento máximo (mínimo) de cada una de las secciones

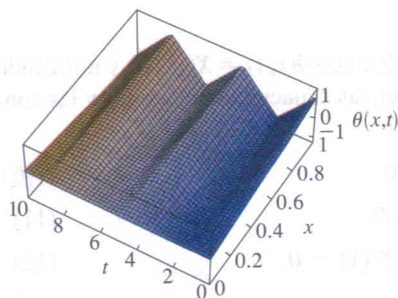


FIGURA 12.7.2 La superficie es la gráfica de una suma parcial de (17) con $a = 1$

transversales especificadas antes de cambiar de dirección y hacia delante de su mínimo (máximo). Este comportamiento disminuye conforme $x \to 1$.

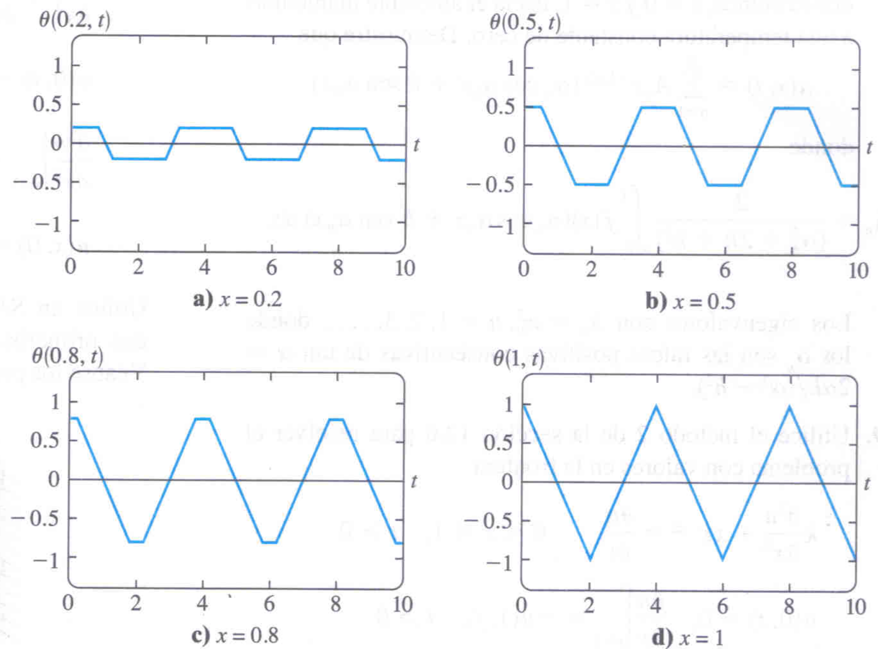


FIGURA 12.7.3 Desplazamiento angular θ como una función del tiempo en diferentes secciones transversales de la varilla.

EJERCICIOS 12.7

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-21.

1. En el ejemplo 1, encuentre la temperatura $u(x, t)$ cuando el extremo izquierdo de la varilla está aislado.

2. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = -h(u(1, t) - u_0), \quad h > 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1.$$

3. Encuentre la temperatura de estado estable en una placa rectangular cuyas condiciones en la frontera son

$$u(0, y) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = -hu(a, y), \quad 0 < y < b$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad 0 < x < a.$$

4. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < y < 1, \quad x > 0$$

$$u(0, y) = u_0, \quad \lim_{x \to \infty} u(x, y) = 0, \quad 0 < y < 1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = -hu(x, 1), \quad h > 0, \quad x > 0.$$

5. Encuentre la temperatura $u(x, t)$ en una varilla de longitud L si la temperatura inicial en toda la varilla es $f(x)$, el extremo $x = 0$ se mantiene a la temperatura cero y el extremo $x = L$ está aislado.

6. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad E\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = F_0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < L.$$

La solución $u(x, t)$ representa el desplazamiento longitudinal de una varilla elástica vibratoria anclada en su extremo izquierdo y sujeta a una fuerza constante de magnitud F_0 en su extremo derecho. Véase la figura 12.4.4 de los ejercicios 12.4. E es una constante que se llama módulo de elasticidad.

7. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u(1, y) = u_0, \quad 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = 0, \quad 0 < x < 1.$$

8. La temperatura inicial en una varilla de longitud unitaria es $f(x)$ en toda la varilla. Hay transferencia de calor en sus dos extremos, $x = 0$ y $x = 1$, hacia el ambiente mantenido a una temperatura constante de cero. Demuestre que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\alpha_n^2 t}(\alpha_n \cos \alpha_n x + h \operatorname{sen} \alpha_n x),$$

donde

$$A_n = \frac{2}{(\alpha_n^2 + 2h + h^2)} \int_0^1 f(x)(\alpha_n \cos \alpha_n x + h \operatorname{sen} \alpha_n x)\, dx.$$

Los eigenvalores son $\lambda_n = \alpha_n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ donde los α_n son las raíces positivas consecutivas de $\tan \alpha = 2\alpha h/(\alpha^2 - h^2)$.

9. Utilice el método 2 de la sección 12.6 para resolver el problema con valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xe^{-2t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = -u(1, t), \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Tarea para el laboratorio de computación

10. Una viga vibratoria en voladizo está incrustada en su extremo izquierdo ($x = 0$) y libre en su extremo derecho ($x = 1$). Véase la figura 12.7.4. El desplazamiento transversal $u(x, t)$ de la viga se determina del problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=1} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{x=1} = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < 1.$$

Utilice un SAC para encontrar aproximaciones de los dos primeros eigenvalores del problema. [*Sugerencia*: Véanse los problemas 11 y 12 en los ejercicios 12.4.]

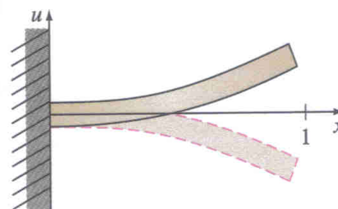


FIGURA 12.7.4 Viga en voladizo vibrando del problema 10.

11. a) Encuentre una ecuación que defina los eigenvalores cuando los extremos de la viga del problema 10 están incrustados en $x = 0$ y en $x = 1$.

b) Utilice un SAC para determinar las aproximaciones de los primeros dos eigenvalores positivos.

12.8 PROBLEMAS DIMENSIONALES DE ORDEN SUPERIOR

REPASO DE MATERIAL

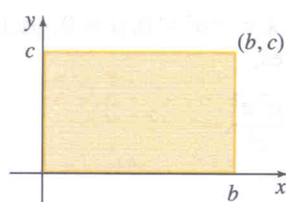
- Secciones 12.3 y 12.4.

INTRODUCCIÓN Hasta ahora hemos resuelto problemas con valores en la frontera que implican las ecuaciones unidimensionales de calor y de onda. En esta sección mostraremos cómo extender el método de separación de variables a problemas que implican las versiones bidimensionales de esas ecuaciones diferenciales parciales.

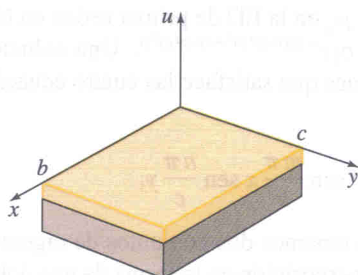
ECUACIONES DE CALOR Y DE ONDA EN DOS DIMENSIONES Suponga que la región rectangular de la figura 12.8.1a es una placa delgada en la que la temperatura u es una función de tiempo t y de posición (x, y). Entonces, bajo condiciones adecuadas, $u(x, y, t)$ se puede demostrar que satisface la **ecuación de calor en dos dimensiones**

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1}$$

Por otro lado, suponga que la figura 12.8.1b representa un marco rectangular sobre el que se ha extendido una membrana flexible delgada (un tambor rectangular). Si se pone en movimiento a la membrana rectangular, entonces su desplazamiento u,



a)



b)

FIGURA 12.8.1 a) Placa rectangular y b) membrana rectangular.

medido desde el plano xy (vibraciones transversales), es también una función de t y de posición (x, y). Cuando las vibraciones son pequeñas, libres y no amortiguadas, $u(x, y, t)$ satisface la **ecuación de onda en dos dimensiones**

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Para separar las variables en (1) y (2), suponemos una solución producto de la forma $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$. Observe que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''YT, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=XY''T \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=XYT'.$$

Como veremos en el siguiente ejemplo, con condiciones de frontera adecuadas, los problemas con valores en la frontera que implican (1) y (2) conducen a los conceptos de series de Fourier en dos variables.

EJEMPLO 1 Temperaturas en una placa

Encuentre la temperatura $u(x, y, t)$ de la placa que muestra la figura 12.8.1a, si la temperatura inicial es $f(x, y)$ en toda la varilla y si los bordes se mantienen a la temperatura cero para el tiempo $t > 0$.

SOLUCIÓN Debemos resolver

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0<x<b, \quad 0<y<c, \quad t>0$$

sujeta a

$$u(0, y, t)=0, \quad u(b, y, t)=0, \quad 0<y<c, \quad t>0$$
$$u(x, 0, t)=0, \quad u(x, c, t)=0, \quad 0<x<b, \quad t>0$$
$$u(x, y, 0)=f(x, y), \quad 0<x<b, \quad 0<y<c.$$

Sustituyendo $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, obtenemos

$$k(X''YT+XY''T)=XYT' \qquad \text{o} \qquad \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}+\frac{T'}{kT}. \tag{3}$$

Puesto que el miembro izquierdo de la última ecuación en (3) depende sólo de x y en el miembro derecho depende sólo de y y de t, igualamos ambos lados a una constante $-\lambda$:

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}+\frac{T'}{kT}=-\lambda$$

por tanto,

$$X''+\lambda X=0 \tag{4}$$

$$\frac{Y''}{Y}=\frac{T'}{kT}+\lambda. \tag{5}$$

Usando el mismo razonamiento, si introducimos otra constante de separación $-\mu$ en la ecuación (5), entonces

$$\frac{Y''}{Y}=-\mu \qquad \text{y} \qquad \frac{T'}{kT}+\lambda=-\mu$$

entonces

$$Y''+\mu Y=0 \qquad \text{y} \qquad T'+k(\lambda+\mu)T=0. \tag{6}$$

Ahora las condiciones de frontera homogéneas

$$\left.\begin{array}{l} u(0, y, t)=0, \quad u(b, y, t)=0 \\ u(x, 0, t)=0, \quad u(x, c, t)=0 \end{array}\right\} \quad \text{implican que} \quad \left\{\begin{array}{l} X(0)=0, \quad X(b)=0 \\ Y(0)=0, \quad Y(c)=0. \end{array}\right.$$

Por tanto, tenemos dos problemas de Sturm-Liouville:

$$X''+\lambda X=0, \quad X(0)=0, \quad X(b)=0 \tag{7}$$

y

$$Y''+\mu Y=0, \quad Y(0)=0, \quad Y(c)=0. \tag{8}$$

Los casos usuales a considerar son ($\lambda = 0$, $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$, $\mu = 0$, etc.) que conducen a los conjuntos independientes de eigenvalores,

$$\lambda_m = \frac{m^2\pi^2}{b^2} \qquad \text{y} \qquad \mu_n = \frac{n^2\pi^2}{c^2}.$$

Las eigenfunciones correspondientes son

$$X(x) = c_2 \operatorname{sen}\frac{m\pi}{b}x, \quad m = 1, 2, 3\,\ldots, \qquad \text{y} \qquad Y(y) = c_4 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{c}y, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Después de sustituir los valores conocidos de λ_n y μ_n en la ED de primer orden en (6), se encuentra que su solución general es $T(t) = c_5 e^{-k[(m\pi/b)^2 + (n\pi/c)^2]t}$. Una solución producto de la ecuación de calor en dos dimensiones que satisface las cuatro ecuaciones homogéneas es entonces

$$u_{mn}(x, y, t) = A_{mn}\, e^{-k[(m\pi/b)^2 + (n\pi/c)^2]t} \operatorname{sen}\frac{m\pi}{b}x \operatorname{sen}\frac{n\pi}{c}y,$$

donde A_{mn} es una constante arbitraria. Puesto que tenemos dos conjuntos de eigenvalores, esto nos motiva a intentar el principio de superposición en la forma de una doble suma

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-k[(m\pi/b)^2 + (n\pi/c)^2]t} \operatorname{sen}\frac{m\pi}{b}x \operatorname{sen}\frac{n\pi}{c}y. \tag{10}$$

En $t = 0$ tenemos que

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen}\frac{m\pi}{b}x \operatorname{sen}\frac{n\pi}{c}y. \tag{11}$$

Podemos encontrar los coeficientes A_{mn} multiplicando la doble suma (11) por el producto $\operatorname{sen}(m\pi x/b)\operatorname{sen}(m\pi y/c)$ e integrando sobre el rectángulo definido por las desigualdades $0 \le x \le b$, $0 \le y \le c$. Se tiene que

$$A_{mn} = \frac{4}{bc}\int_0^c\int_0^b f(x, y) \operatorname{sen}\frac{m\pi}{b}x \operatorname{sen}\frac{n\pi}{c}y\, dx\, dy. \tag{12}$$

Por lo que la solución del PVF consiste en (10) con los A_{mn} definidos en (12). ■

La serie (11) con coeficientes (12) se llama **serie de senos con dos variables** o **doble serie de senos**. Resumimos la siguiente **serie de cosenos con dos variables**.

La **doble serie de cosenos** de una función $f(x, y)$ definida sobre una región rectangular definida por $0 \le x \le b$, $0 \le y \le c$ está dada por

$$f(x, y) = A_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{m0}\cos\frac{m\pi}{b}x + \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n}\cos\frac{n\pi}{c}y + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\cos\frac{m\pi}{b}x\cos\frac{n\pi}{c}y,$$

donde

$$A_{00} = \frac{1}{bc}\int_0^c\int_0^b f(x, y)\, dx\, dy$$

$$A_{m0} = \frac{2}{bc}\int_0^c\int_0^b f(x, y)\cos\frac{m\pi}{b}x\, dx\, dy$$

$$A_{0n} = \frac{2}{bc}\int_0^c\int_0^b f(x, y)\cos\frac{n\pi}{c}y\, dx\, dy$$

$$A_{mn} = \frac{4}{bc}\int_0^c\int_0^b f(x, y)\cos\frac{m\pi}{b}x\cos\frac{n\pi}{c}y\, dx\, dy.$$

Para un problema que conduce a una doble serie de cosenos véase el problema 2 de los ejercicios 12.8.

EJERCICIOS 12.8

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-22.

En los problemas 1 y 2 resuelva la ecuación de calor (1) sujeta a las condiciones dadas.

1. $u(0, y, t) = 0, \quad u(\pi, y, t) = 0$
$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, \pi, t) = 0$
$u(x, y, 0) = u_0$

2. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = 0$
$u(x, y, 0) = xy$

En los problemas 3 y 4 resuelva la ecuación de calor (2) sujeta a las condiciones dadas.

3. $u(0, y, t) = 0, \quad u(\pi, y, t) = 0$
$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, \pi, t) = 0$
$u(x, y, 0) = xy(x - \pi)(y - \pi)$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

4. $u(0, y, t) = 0, \quad u(b, y, t) = 0$
$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, c, t) = 0$
$u(x, y, 0) = f(x, y)$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x, y)$

La temperatura de estado estable $u(x, y, z)$ del paralelepípedo rectangular que se muestra en la figura 12.8.2 satisface la ecuación de Laplace en tres dimensiones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{13}$$

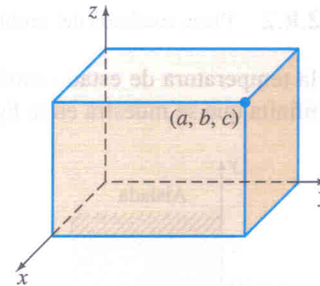


FIGURA 12.8.2 Paralelepípedo rectangular de los problemas 5 y 6.

5. Resuelva la ecuación de Laplace (13). La cara superior $(z = c)$ del paralelepípedo se conserva a la temperatura $f(x, y)$ y las caras restantes a temperatura cero.

6. Resuelva la ecuación de Laplace (13). La cara inferior $(z = 0)$ del paralelepípedo se conserva a temperatura $f(x, y)$ y las caras restantes a temperatura cero.

REPASO DEL CAPÍTULO 12

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-22.

1. Utilice separación de variables para encontrar las soluciones producto de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = u.$$

2. Use separación de variables para determinar las soluciones producto de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

¿Es posible elegir una constante de separación tal que tanto X como Y sean funciones oscilatorias?

3. Encuentre una solución de estado estable $\psi(x)$ del problema con valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = u_0, \quad -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = u(\pi, t) - u_1, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

4. Dé una interpretación física de las condiciones de frontera del problema 3.

5. En $t = 0$ una cuerda de longitud unitaria se encuentra tensa sobre el eje x positivo. Los extremos de la cuerda están anclados en el eje x, en $x = 0$ y en $x = 1$ para $t > 0$. Determine el desplazamiento $u(x, t)$ si la velocidad inicial $g(x)$ es la que se presenta en la figura 12.R.1.

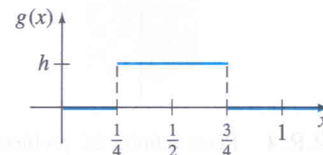


FIGURA 12.R.1 Velocidad inicial $g(x)$ del problema 5.

6. La ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

es una forma de la ecuación de onda cuando se aplica una fuerza vertical externa proporcional al cuadrado de la distancia horizontal en el extremo izquierdo de la cuerda. La cuerda está anclada en $x = 0$, una unidad arriba del eje x y en el eje x en $x = 1$ para $t > 0$. Encuentre el desplazamiento $u(x, t)$ si la cuerda parte del reposo desde un desplazamiento $f(x)$.

7. Encuentre la temperatura $u(x, y)$ de estado estable en la placa cuadrada de la figura 12.R.2.

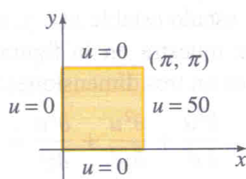


FIGURA 12.R.2 Placa cuadrada del problema 7.

8. Determine la temperatura de estado estable $u(x, y)$ en la placa semiinfinita que se muestra en la figura 12.R.3.

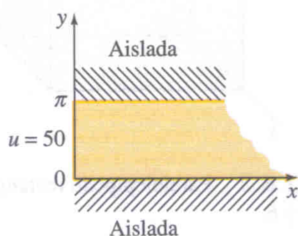


FIGURA 12.R.3 Placa cuadrada del problema 8.

9. Resuelva el problema 8 cuando las fronteras $y = 0$ y $y = \pi$ se conservan a temperatura cero durante todo el tiempo.

10. Encuentre la temperatura $u(x, t)$ en la placa infinita de ancho $2L$ que se muestra en la figura 12.R.4 si la temperatura inicial en toda la placa es u_0 en toda la placa. [*Sugerencia*: $u(x, 0) = u_0$, $-L < x < L$ es una función par de x.]

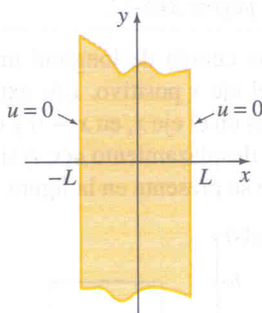


FIGURA 12.R.4 Placa infinita del problema 10.

11. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi, \qquad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < \pi.$$

12. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen} x = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 400, \quad u(\pi, t) = 200, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 400 + \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < \pi.$$

13. Encuentre la solución formal en serie para el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} + u, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

14. La concentración $c(x, t)$ de una sustancia que se difunde en un medio y que es arrastrada por las corrientes de convección del medio satisface la ecuación diferencial parcial

$$k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - h\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial t}, \qquad k \text{ y } h \text{ constantes.}$$

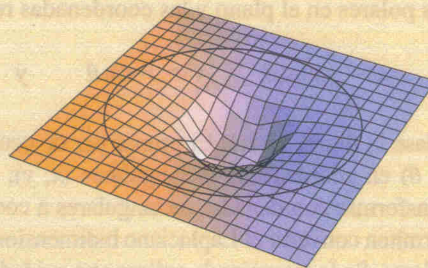
Resuelva la EDP sujeta a

$$c(0, t) = 0, \quad c(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$c(x, 0) = c_0, \quad 0 < x < 1,$$

donde c_0 es una constante.

13 PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA EN OTROS SISTEMAS COORDENADOS



Todos los problemas con valores en la frontera que hemos considerado hasta el momento sólo se han expresado en términos de un sistema coordenado rectangular. Pero si se desea encontrar, por ejemplo, temperaturas en una placa circular, en un cilindro circular o en una esfera, naturalmente trataríamos de describir el problema en términos de coordenadas polares, coordenadas cilíndricas o coordenadas esféricas, respectivamente. En este capítulo veremos que al tratar de resolver PVF en estos tres últimos sistemas coordenados por el método de separación de variables, se aplica en forma práctica la teoría de la serie de Fourier-Bessel y de la serie de Fourier-Legendre.

13.1 COORDENADAS POLARES

REPASO DE MATERIAL

- ED de Cauchy-Euler en la sección 4.7
- Repaso de las ED en la sección 11.4 (página 416)

INTRODUCCIÓN Debido a que en esta sección sólo se consideran problemas de temperatura de estado estable en coordenadas polares, lo primero que debemos hacer es convertir la ecuación de Laplace conocida de coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

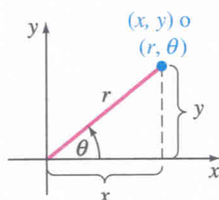


FIGURA 13.1.1 Las coordenadas polares de un punto (x, y) son (r, θ).

LAPLACIANO EN COORDENADAS POLARES La relación entre las coordenadas polares en el plano y las coordenadas rectangulares está dada por:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{y} \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Véase la figura 13.1.1. El primer par de ecuaciones transforma las coordenadas polares (r, θ) en coordenadas rectangulares (x, y); el segundo par de ecuaciones nos permite transformar coordenadas rectangulares a coordenadas polares. Esas ecuaciones también permiten convertir el Laplaciano bidimensional $\nabla^2 u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$ a coordenadas polares. Se le recomienda aplicar con cuidado la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\text{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{\text{sen}^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\text{sen}^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \text{sen}^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}. \tag{2}$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2) y simplificando se obtiene el Laplaciano de u en coordenadas polares:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

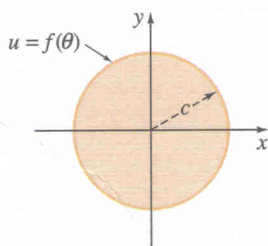


FIGURA 13.1.2 Problema de Dirichlet para un círculo.

En esta sección sólo consideraremos problemas que impliquen la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ en coordenadas polares:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0. \tag{3}$$

Nuestro primer ejemplo es el problema de Dirichlet para un disco circular. Queremos resolver la ecuación de Laplace (3) para la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en un disco circular o plato de radio c cuando la temperatura de la circunferencia es $u(c, \theta) = f(\theta)$, $0 < \theta < 2\pi$. Véase la figura 13.1.2. Se supone que las dos caras de la placa están aisladas. Este problema aparentemente simple no es como los que encontramos en el capítulo anterior.

EJEMPLO 1 Temperaturas estables en un disco circular

Resuelva la ecuación de Laplace (3) sujeta a $u(c, \theta) = f(\theta)$, $0 < \theta < 2\pi$.

SOLUCIÓN Antes de intentar la separación de variables, observamos que la única condición de frontera es no homogénea. En otras palabras, no hay condiciones explícitas en el enunciado del problema que nos permitan determinar ya sea los coeficientes en las soluciones de las EDO separadas o los eigenvalores necesarios. Sin embargo, hay algunas condiciones *implícitas*.

En primer lugar, nuestra intuición física nos lleva a esperar que la temperatura $u(r, \theta)$ debe ser continua y, por tanto, acotada dentro del círculo $r = c$. Además, la temperatura $u(r, \theta)$ debe ser univaluada; esto significa que el valor de u debe ser el mismo en cualquier punto del círculo, independientemente de la descripción polar de ese punto. Debido a que $(r, \theta + 2\pi)$ es una descripción equivalente del punto (r, θ), debemos tener $u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi)$. Es decir, $u(r, \theta)$ debe ser periódica en θ con periodo 2π. Si buscamos una solución producto $u = R(r)\Theta(\theta)$, entonces $\Theta(\theta)$ tiene que ser necesariamente periódica con periodo 2π.

Tomando todo esto en cuenta decidimos escribir la constante de separación en la separación de variables como λ:

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda.$$

Las ecuaciones separadas son entonces

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{4}$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0. \tag{5}$$

Estamos buscando una solución del problema

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi). \tag{6}$$

La ecuación (6) no es un problema regular de Sturm-Liouville, sin embargo, el problema genera eigenvalores y eigenfunciones. Estos últimos forman un conjunto ortogonal en el intervalo $[0, 2\pi]$.

De las tres posibles soluciones generales de (5),

$$\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta, \qquad \lambda = 0 \tag{7}$$

$$\Theta(\theta) = c_1 \cosh \alpha\theta + c_2 \operatorname{senh} \alpha\theta, \qquad \lambda = -\alpha^2 < 0 \tag{8}$$

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos \alpha\theta + c_2 \operatorname{sen} \alpha\theta, \qquad \lambda = \alpha^2 > 0 \tag{9}$$

podemos descartar a (8) como intrínsecamente no periódica a menos que $c_1 = c_2 = 0$. De igual manera, la solución (7) es no periódica a menos que definamos $c_2 = 0$. A la solución que resta $\Theta(\theta) = c_1$, $c_1 \neq 0$, se le puede asignar algún periodo y, por tanto, $\lambda = 0$ es un eigenvalor. Por último, la solución (9) tendrá periodo 2π si tomamos $\alpha = n$, donde $n = 1, 2, \ldots$ * Los eigenvalores de (6) son entonces $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$ Si corresponde $\lambda_0 = 0$ con $n = 0$, las eigenfunciones de (6) son

$$\Theta(\theta) = c_1, \quad n = 0, \qquad \text{y} \qquad \Theta(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \operatorname{sen} n\theta, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Cuando $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, las soluciones de la ED de Cauchy-Euler (4) son

$$R(r) = c_3 + c_4 \ln r, \qquad n = 0, \tag{10}$$

$$R(r) = c_3 r^n + c_4 r^{-n}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Ahora observe en (11) que $r^{-n} = 1/r^n$. En cualquiera de las soluciones (10) u (11) debemos definir $c_4 = 0$ para garantizar que la solución u está acotada en el centro de la placa (que es $r = 0$). Por tanto, las soluciones producto $u_n = R(r)\Theta(\theta)$ para la ecuación de Laplace en coordenadas polares son

$$u_0 = A_0, \quad n = 0, \qquad \text{y} \qquad u_n = r^n(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

*Por ejemplo, observe que $\cos n(\theta + 2\pi) = \cos(n\theta + 2n\pi) = \cos n\theta$.

donde se han reemplazado c_3c_1 por A_0 para $n = 0$ y por A_n para $n = 1, 2, \ldots$; la combinación c_3c_2 se ha sustituido por B_n. Entonces el principio de superposición da

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta). \tag{12}$$

Aplicando la condición frontera en $r = c$ a (12), reconocemos

$$f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c^n(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta)$$

como un desarrollo de f en serie de Fourier completa. Por tanto hacemos las identificaciones

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad c^nA_n = a_n \qquad \text{y} \qquad c^nB_n = b_n.$$

Esto es,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta \tag{13}$$

$$A_n = \frac{1}{c^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta \tag{14}$$

$$B_n = \frac{1}{c^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta\, d\theta. \tag{15}$$

La solución del problema consiste en la serie dada en (12), donde los coeficientes A_0, A_n y B_n están definidos por las ecuaciones (13), (14) y (15). ■

Observe en el ejemplo 1 que para cada eigenvalor *positivo* $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, hay dos diferentes eigenfunciones, en particular, $\cos n\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta$. En este caso los eigenvalores son algunas veces llamados **eigenvalores dobles**.

EJEMPLO 2 Temperaturas de estado estable en una placa semicircular

Encuentre la temperatura de estado estable $u(r,\theta)$ en la placa semicircular que se muestra en la figura 13.1.3.

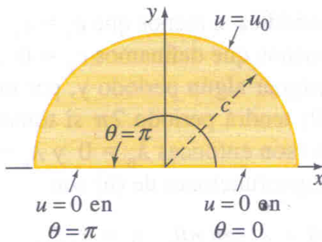


FIGURA 13.1.3 Placa semicircular del ejemplo 2.

SOLUCIÓN El problema con valores en la frontera es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \qquad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < r < c$$

$$u(c, \theta) = u_0, \quad 0 < \theta < \pi,$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = 0, \quad 0 < r < c.$$

Definiendo $u = R(r)\Theta(\theta)$ y separando variables se obtiene

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

y

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{16}$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0. \tag{17}$$

Las condiciones homogéneas establecidas en las fronteras $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ se traducen en $\Theta(0) = 0$ y $\Theta(\pi) = 0$. Estas condiciones junto con la ecuación (17) constituyen un problema regular de Sturm-Liouville:

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad \Theta(0) = 0, \quad \Theta(\pi) = 0. \tag{18}$$

Este familiar problema* tiene eigenvalores $\lambda_n = n^2$ y eigenfunciones $\Theta(\theta) = c_2 \operatorname{sen} n\theta$, $n = 1, 2, \ldots$ También al sustituir λ por n^2, la solución de (16) es $R(r) = c_3 r^n + c_4 r^{-n}$. El razonamiento que se usó en el ejemplo 1, en particular, nos hace esperar una solución u del problema que está acotada en $r = 0$, lo que nos conduce a definir que $c_4 = 0$. Por tanto, $u_n = R(r)\Theta(\theta) = A_n r^n \operatorname{sen} n\theta$ y

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \operatorname{sen} n\theta.$$

La condición de frontera que resta en $r = c$ da la serie de senos

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n c^n \operatorname{sen} n\theta.$$

Por tanto,
$$A_n c^n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0 \operatorname{sen} n\theta \, d\theta,$$

y así
$$A_n = \frac{2u_0}{\pi c^n}\frac{1-(-1)^n}{n}.$$

Por tanto, la solución del problema está dada por

$$u(r, \theta) = \frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\left(\frac{r}{c}\right)^n \operatorname{sen} n\theta.$$ ■

*El problema en (18) es el ejemplo 2 de la sección 5.2 con $L = \pi$.

EJERCICIOS 13.1

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-22.

En los problemas 1 a 4, determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en una placa circular de radio $r = 1$, si la temperatura en la circunferencia es la que se indica.

1. $u(1, \theta) = \begin{cases} u_0, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$

2. $u(1, \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < \theta < \pi \\ \pi - \theta, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$

3. $u(1, \theta) = 2\pi\theta - \theta^2, \quad 0 < \theta < 2\pi$

4. $u(1, \theta) = \theta, \quad 0 < \theta < 2\pi$

5. Resuelva el problema exterior de Dirichlet para un disco circular de radio c, si $u(c, \theta) = f(\theta)$, $0 < \theta < 2\pi$. En otras palabras, determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en una placa que coincide con todo el plano xy en el que se ha hecho un agujero circular de radio c, alrededor del origen y la temperatura de la circunferencia del agujero es $f(\theta)$. [*Sugerencia*: Suponga que la temperatura está acotada cuando $r \to \infty$.]

6. Determine la temperatura de estado estable en la placa de un cuarto de círculo que se muestra en la figura 13.1.4.

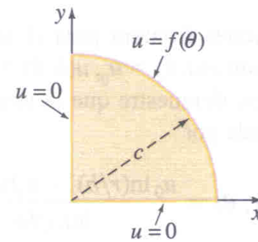


FIGURA 13.1.4 Placa de un cuarto de círculo del problema 6.

7. Si las condiciones $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ de la figura 13.1.4 están aisladas, entonces se tiene, respectivamente, que

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=\pi/2} = 0.$$

Encuentre la temperatura de estado estable si

$$u(c, \theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi/4 \\ 0, & \pi/4 < \theta < \pi/2. \end{cases}$$

8. Encuentre la temperatura de estado estable en la placa infinita en forma de cuña que se muestra en la figura 13.1.5. [*Sugerencia*: Suponga que la temperatura está acotada cuando $r \to 0$ y cuando $r \to \infty$.]

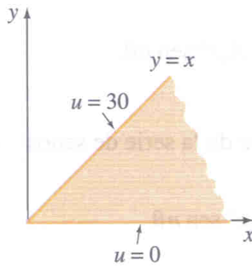


FIGURA 13.1.5 Placa en forma de cuña del problema 8.

9. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en el anillo circular de la figura 13.1.6. [*Sugerencia*: Proceda como en el ejemplo 1.]

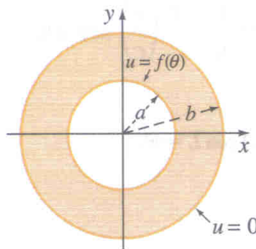


FIGURA 13.1.6 Placa en forma de anillo del problema 9.

10. Si las condiciones frontera para el anillo circular de la figura 13.1.6 son $u(a, \theta) = u_0$, $u(b, \theta) = u_1$, $0 < \theta < 2\pi$, u_0 y u_1 constantes, demuestre que la temperatura de estado estable está dada por

$$u(r, \theta) = \frac{u_0 \ln(r/b) - u_1 \ln(r/a)}{\ln(a/b)}.$$

[*Sugerencia*: Intente una solución de la forma $u(r, \theta) = v(r, \theta) + \psi(r)$.]

11. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en un anillo semicircular si

$$u(a, \theta) = \theta(\pi - \theta), \quad u(b, \theta) = 0, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$u(r, 0) = 0, \qquad u(r, \pi) = 0, \quad a < r < b.$$

12. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en una placa semicircular de radio $r = 1$ si

$$u(1, \theta) = u_0, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = u_0, \quad 0 < r < 1,$$

u_0 es constante.

13. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en una placa semicircular de radio $r = 2$, si

$$u(2, \theta) = \begin{cases} u_0, & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \theta < \pi, \end{cases}$$

u_0 es una constante y los bordes $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ están aislados.

14. La placa en el primer cuadrante que se muestra en la figura 13.1.7 es un octavo del anillo circular de la figura 13.1.6. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$.

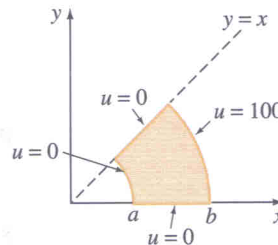


FIGURA 13.1.7 Placa del problema 14.

Problemas para analizar

15. Considere el anillo circular de la figura 13.1.6. Analice cómo se puede calcular la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ cuando las condiciones en la frontera son $u(a, \theta) = f(\theta)$, $u(b, \theta) = g(\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

16. Lleve a cabo sus ideas acerca del problema 15 para encontrar la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en el anillo circular que se muestra en la figura 13.1.6 cuando las condiciones de frontera son $u(\frac{1}{2}, \theta) = 100(1 + 0.5 \cos \theta)$, $u(1, \theta) = 200$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Tarea para el laboratorio de computación

17. a) Encuentre la solución en serie de $u(r, \theta)$ del ejemplo 1 cuando

$$u(1, \theta) = \begin{cases} 100, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

b) Use un SAC o una aplicación graficadora para trazar la gráfica de la suma parcial $S_5(r, \theta)$ formada por los cinco primeros términos distintos de cero de la solución del inciso a) para $r = 0.9$, $r = 0.7$, $r = 0.5$, $r = 0.3$ y $r = 0.1$. Sobreponga las gráficas en los mismos ejes coordenados.

c) Calcule las temperaturas aproximadas $u(0.9, 1.3)$, $u(0.7, 2)$, $u(0.5, 3.5)$, $u(0.3, 4)$, $u(0.1, 5.5)$. Después calcule aproximadamente $u(0.9, 2\pi - 1.3)$, $u(0.7, 2\pi - 2)$, $u(0.5, 2\pi - 3.5)$, $u(0.3, 2\pi - 4)$ y $u(0.1, 2\pi - 5.5)$.

d) ¿Cuál es la temperatura en el centro de la placa circular? Describa por qué es adecuado llamar a este valor temperatura promedio en la placa. [*Sugerencia*: Analice las gráficas del inciso b) y los números del inciso c).]

13.2 COORDENADAS POLARES Y CILÍNDRICAS

REPASO DE MATERIAL

- Ecuación diferencial paramétrica de Bessel en la sección 6.3.
- Formas de la serie de Fourier-Bessel en la definición 11.5.1.

INTRODUCCIÓN En esta sección consideraremos problemas con valores en la frontera que implican formas de la ecuación de calor y de onda en coordenadas polares y una forma de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. Hay concordancia en los ejemplos y ejercicios: cada problema con valores en la frontera de esta sección tiene simetría radial.

SIMETRÍA RADIAL Las ecuaciones bidimensionales de calor y de onda

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{y} \quad a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

expresadas en coordenadas polares son, respectivamente,

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{y} \quad a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

donde $u = u(r, \theta, t)$. Para resolver por separación de variables un problema con valores en la frontera donde intervenga alguna de estas ecuaciones, definiremos $u = R(r)\Theta(\theta)T(t)$. Como en la sección 12.8, esta suposición conduce a varias series infinitas múltiples. Véase el problema 14 de los ejercicios 13.2. En el análisis que se presenta a continuación, consideraremos una clase más sencilla, pero también importante, de problemas que tienen **simetría radial**, es decir, problemas en los que la función desconocida u es independiente de la coordenada angular θ. En este caso las ecuaciones calor y de onda en (1) toman, respectivamente, las formas

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{y} \quad a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2}$$

donde $u = u(r, t)$. Las vibraciones descritas por la segunda de las ecuaciones en (2) se llaman **vibraciones radiales**.

El primer ejemplo tiene que ver con las vibraciones radiales libres de una membrana circular delgada. Se supone que los desplazamientos son pequeños y que el movimiento es tal que cada punto de la membrana se mueve en dirección perpendicular al plano xy (vibraciones transversales), es decir, el eje u es perpendicular al plano xy. Un modelo físico que se puede recordar cuando se trabaja con este ejemplo es la vibración de la membrana de un tambor.

EJEMPLO 1 Vibraciones radiales de una membrana circular

Encuentre el desplazamiento $u(r, t)$ de una membrana circular de radio c sujeta a lo largo de su circunferencia si su desplazamiento inicial es $f(r)$ y su velocidad inicial es $g(r)$. Véase la figura 13.2.1.

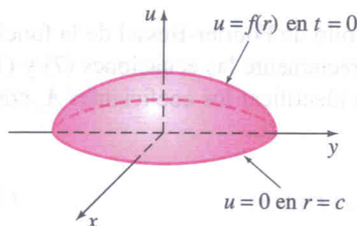


FIGURA 13.2.1 Desplazamiento inicial de una membrana circular del ejemplo 1.

SOLUCIÓN El problema con valores en la frontera que hay que resolver es

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < r < c, \quad t > 0$$

$$u(c, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r), \quad 0 < r < c.$$

Sustituyendo $u = R(r)T(t)$ en la ecuación diferencial parcial y separando las variables obtenemos

$$\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = \frac{T''}{a^2T} = -\lambda. \tag{3}$$

Observe que en la ecuación (3) hemos regresado a nuestra constante de separación usual $-\lambda$. Las dos ecuaciones obtenidas de la ecuación (3) son

$$rR'' + R' + \lambda rR = 0 \tag{4}$$

y

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{5}$$

Debido a la naturaleza vibracional del problema, la ecuación (5) sugiere que sólo se use $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$, ya que esta elección conduce a funciones periódicas. También observe que la ecuación (4) *no* es una ecuación de Cauchy-Euler sino que es la ecuación diferencial paramétrica de Bessel de orden $\nu = 0$, es decir, $rR'' + R' + \alpha^2 rR = 0$. Del problema (13) de la sección 6.3 la solución general de la última ecuación es

$$R = c_1J_0(\alpha r) + c_2Y_0(\alpha r). \tag{6}$$

La solución general de la ecuación conocida (5) es

$$T = c_3 \cos a\alpha t + c_4 \operatorname{sen} a\alpha t.$$

Ahora, recordemos que $Y_0(\alpha r) \to -\infty$ cuando $r \to 0^+$, por lo que la suposición implícita de que el desplazamiento $u(r, t)$ debe estar acotado en $r = 0$ nos conduce a definir $c_2 = 0$ en la ecuación (6). Así $R = c_1J_0(\alpha r)$.

Puesto que la condición de frontera $u(c, t) = 0$ es equivalente a $R(c) = 0$, se debe cumplir que $c_1J_0(\alpha c) = 0$. Se excluye $c_1 = 0$ (porque conduciría a una solución trivial de la EDP) por lo que

$$J_0(\alpha c) = 0. \tag{7}$$

Si $x_n = \alpha_n c$ son las raíces positivas de la ecuación (7), entonces $\alpha_n = x_n/c$, así los eigenvalores del problema son $\lambda_n = \alpha_n^2 = x_n^2/c^2$, y las eigenfunciones son $c_1J_0(\alpha r)$. Las soluciones producto que satisfacen la ecuación diferencial parcial y la condición a la frontera son

$$u_n = R(r)T(t) = (A_n \cos a\alpha_n t + B_n \operatorname{sen} a\alpha_n t)\, J_0(\alpha_n r), \tag{8}$$

donde hemos etiquetado las constantes en la forma usual. Con el principio de superposición se obtiene

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a\alpha_n t + B_n \operatorname{sen} a\alpha_n t)\, J_0(\alpha_n r). \tag{9}$$

Las condiciones iniciales dadas determinan los coeficientes A_n y B_n.

Haciendo $t = 0$ en la ecuación (9) y usando $u(r, 0) = f(r)$ se obtiene

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_nJ_0(\alpha_n r). \tag{10}$$

Este último resultado se reconoce como el desarrollo de Fourier-Bessel de la función f en el intervalo $(0, c)$. Por tanto, comparando directamente las ecuaciones (7) y (10) con la (8) y la (15) de la sección 11.5, se pueden identificar los coeficientes A_n como los dados en la ecuación (16) de la sección 11.5:

$$A_n = \frac{2}{c^2J_1^2(\alpha_n c)} \int_0^c rJ_0(\alpha_n r)\, f(r)\, dr. \tag{11}$$

A continuación, derivamos la ecuación (9) respecto a t, haciendo $t = 0$ y usando $u_t(r, 0) = g(r)$:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a\alpha_n B_n J_0(\alpha_n r).$$

Esto es ahora un desarrollo de Fourier-Bessel de la función g. Identificando el coeficiente total aA_nB_n con el de la ecuación (16) de la sección 11.5, podemos escribir

$$B_n = \frac{2}{a\alpha_n c^2 J_1^2(\alpha_n c)} \int_0^c rJ_0(\alpha_n r)g(r)\,dr. \tag{12}$$

Por último, la solución del problema con valores en la frontera original es la serie (9) con coeficientes A_n y B_n definidos en las ecuaciones (11) y (12). ■

ONDAS ESTACIONARIAS De manera análoga a la ecuación (11) de la sección 12.4, las soluciones resultantes (8) se llaman **ondas estacionarias**. Para $n = 1, 2, 3, \ldots,$ las ondas estacionarias son básicamente la gráfica de $J_0(\alpha_n r)$ con amplitud variable en el tiempo

$$A_n \cos a\alpha_n t + B_n \operatorname{sen} a\alpha_n t.$$

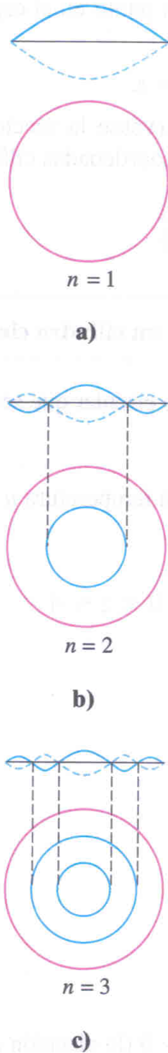


FIGURA 13.2.2 Ondas estacionarias.

En la figura 13.2.2 se representan con líneas punteadas las ondas estacionarias con distintos valores de tiempo. Las raíces de cada onda estacionaria en el intervalo $(0, c)$ son las raíces de $J_0(\alpha_n r) = 0$ y corresponden al conjunto de los puntos en una onda estacionaria donde no hay movimiento. Este conjunto de puntos se llama **línea nodal**. Si, como en el ejemplo 1, las raíces positivas de $J_0(\alpha_n c) = 0$ se representan por x_n, entonces $x_n = \alpha_n c$ lo que implica que $\alpha_n = x_n/c$ y, por tanto, las raíces de las ondas estacionarias se determinan con

$$J_0(\alpha_n r) = J_0\left(\frac{x_n}{c}r\right) = 0.$$

Ahora de la tabla 6.1 las tres primeras raíces positivas de J_0 son (aproximadamente) $x_1 = 2.4$, $x_2 = 5.5$ y $x_3 = 8.7$. Así, para $n = 1$ la primera raíz positiva de

$$J_0\left(\frac{x_1}{c}r\right) = 0 \quad \text{es} \quad \frac{2.4}{c}r = 2.4 \quad \text{o} \quad r = c.$$

Como lo que se busca son las raíces de las ondas estacionarias en el intervalo abierto $(0, c)$, el último resultado indica que la primera onda estacionaria no tiene línea nodal. Para $n = 2$ las dos primeras raíces positivas de

$$J_0\left(\frac{x_2}{c}r\right) = 0 \quad \text{se determinan de} \quad \frac{5.5}{c}r = 2.4 \quad \text{y} \quad \frac{5.5}{c}r = 5.5.$$

Así, la segunda onda estacionaria tiene una línea nodal definida por $r = x_1c/x_2 = 2.4c/5.5$. Observe que $r \approx 0.44c < c$. Para $n = 3$ con un análisis parecido se demuestra que hay dos líneas nodales definidas por $r = x_1c/x_3 = 2.4c/8.7$ y $r = x_2c/x_3 = 5.5c/8.7$. En general, la n-ésima onda estacionaria tiene $n - 1$ líneas nodales $r = x_1c/x_n$, $r = x_2c/x_n, \ldots, r = x_{n-1}\,c/x_n$. Puesto que $r =$ *constante* es la ecuación de una circunferencia en coordenadas polares, vemos en la figura 13.2.2 que las líneas nodales de una onda estacionaria son circunferencias concéntricas.

USO DE COMPUTADORAS Es posible ver el efecto de un simple toque de tambor para el modelo resuelto en el ejemplo 1 mediante la aplicación de animación de un sistema algebraico computarizado. En el problema 15 de los ejercicios 13.2 se le pide encontrar la solución dada en la ecuación (6) cuando

$$c = 1, \quad f(r) = 0 \quad \text{y} \quad g(r) = \begin{cases} -v_0, & 0 \le r < b \\ 0, & b \le r < 1. \end{cases}$$

En la figura 13.2.3 se presentan algunos marcos de un "video" del toque de tambor.

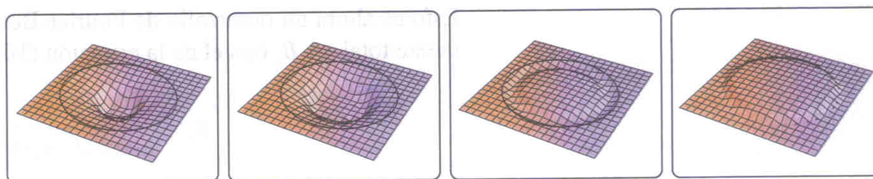


FIGURA 13.2.3 Marcos de un "video" de un SAC.

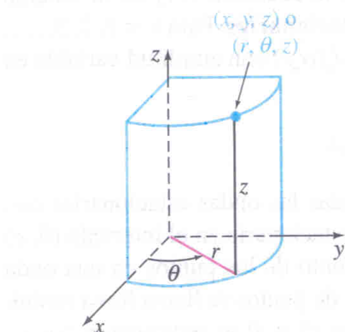


FIGURA 13.2.4 Las coordenadas cilíndricas de un punto (x, y, z) son (r, θ, z).

LAPLACIANO EN COORDENADAS CILÍNDRICAS En la figura 13.2.4 se puede ver que la relación entre las coordenadas cilíndricas de un punto en el espacio y sus coordenadas rectangulares está dada por

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = z.$$

De la deducción del Laplaciano en coordenadas polares (véase la sección 13.1) se tiene de inmediato que el Laplaciano de una función u en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

EJEMPLO 2 Temperaturas de estado estable en un cilindro circular

Determine la temperatura de estado estable u en el cilindro circular que se muestra en la figura 13.2.5.

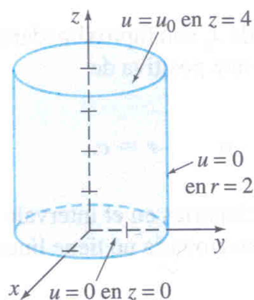


FIGURA 13.2.5 Cilindro circular del ejemplo 2.

SOLUCIÓN Las condiciones en la frontera indican que la temperatura u tiene simetría radial. Por tanto, $u(r, z)$ se determina de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad 0 < r < 2, \quad 0 < z < 4$$

$$u(2, z) = 0, \quad 0 < z < 4$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, 4) = u_0, \quad 0 < r < 2.$$

Utilizando $u = R(r)Z(z)$ y separando variables se obtiene

$$\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda \tag{13}$$

y

$$rR'' + R' + \lambda rR = 0 \tag{14}$$

$$Z'' - \lambda Z = 0. \tag{15}$$

Hemos elegido la constante de separación como $\lambda = \alpha^2 > 0$ (la elección de $\lambda = -\alpha^2 < 0$ podría, de acuerdo con la ecuación (15), dar como resultado una condición que no hay razón de esperar en particular, solución $u(r, z)$ que sea periódica en z). La solución de la ecuación (14) es

$$R(r) = c_1 J_0(\alpha r) + c_2 Y_0(\alpha r),$$

y puesto que la solución de (15) se define en el intervalo finito [0, 4], la solución general se escribe como

$$Z(z) = c_3\cosh\alpha z + c_4\,\text{senh}\,\alpha z.$$

Como en el ejemplo 1, la suposición de que la temperatura u está acotada en $r = 0$ impone que $c_2 = 0$. La condición $u(2, z) = 0$ implica que $R(2) = 0$. Esta ecuación,

$$J_0(2\alpha) = 0, \tag{16}$$

define a los eigenvalores positivos $\lambda_n = \alpha_n^2$ del problema. Por último, $Z(0) = 0$ implica que $c_3 = 0$. Por lo que tenemos que $R(r) = c_1 J_0(\alpha_n r)$, $Z(z) = c_4$ senh $\alpha_n z$, y

$$u_n = R(r)Z(z) = A_n \operatorname{senh} \alpha_n z J_0(\alpha_n r)$$

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh} \alpha_n z J_0(\alpha_n r).$$

La condición de frontera que resta en $z = 4$ determina entonces la serie de Fourier-Bessels

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh} 4\alpha_n J_0(\alpha_n r),$$

por lo que de acuerdo con la ecuación de definición (16), los coeficientes se definen por la ecuación (16) de la sección 11.5,

$$A_n \operatorname{senh} 4\alpha_n = \frac{2u_0}{2^2 J_1^2(2\alpha_n)} \int_0^2 r J_0(\alpha_n r)\, dr.$$

Para evaluar la última integral, primero se usa la sustitución $t = \alpha_n r$ y después $\frac{d}{dt}[tJ_1(t)] = tJ_0(t)$. A partir de

$$A_n \operatorname{senh} 4\alpha_n = \frac{u_0}{2\alpha_n^2 J_1^2(2\alpha_n)} \int_0^{2\alpha_n} \frac{d}{dt}[tJ_1(t)]\, dt = \frac{u_0}{\alpha_n J_1(2\alpha_n)}$$

obtenemos
$$A_n = \frac{u_0}{\alpha_n \operatorname{senh} 4\alpha_n J_1(2\alpha_n)}.$$

Por lo que la temperatura en el cilindro es

$$u(r, z) = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n \operatorname{senh} 4\alpha_n J_1(2\alpha_n)} \operatorname{senh} \alpha_n z J_0(\alpha_n r).$$ ■

EJERCICIOS 13.2 *Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-22.*

1. Determine el desplazamiento $u(r, t)$ en el ejemplo 1 si $f(r) = 0$ y a la membrana circular se le transmite una velocidad inicial unitaria dirigida hacia arriba.

2. Se sujeta por su circunferencia a una membrana circular de radio 1. Determine el desplazamiento $u(r, t)$ si la membrana parte del reposo desde el desplazamiento inicial $f(r) = 1 - r^2$, $0 < r < 1$. [*Sugerencia:* Vea el problema 10 en los ejercicios 11.5.]

3. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, z)$ del cilindro del ejemplo 2, si las condiciones en la frontera son $u(2, z) = 0$, $0 < z < 4$, $u(r, 0) = u_0$, $u(r, 4) = 0$, $0 < r < 2$.

4. Si la superficie lateral del cilindro del ejemplo 2 está aislada, entonces

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2} = 0, \qquad 0 < z < 4.$$

a) Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, z)$ cuando $u(r, 4) = f(r)$, $0 < r < 2$.

b) Demuestre que la temperatura de estado estable del inciso a) se reduce a $u(r, z) = u_0 z/4$ cuando $f(r) = u_0$. [*Sugerencia:* Utilice la ecuación (12) de la sección 11.5.]

5. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, z)$ en el cilindro de la figura 13.2.5 si la superficie lateral se mantiene a temperatura 0, la parte superior $z = 4$ se mantiene a temperatura 50 y la base $z = 0$ está aislada.

6. Determine la temperatura de estado estable $u(r, z)$ en el cilindro de la figura 13.2.5 si la superficie lateral se mantiene a temperatura 50 y la parte superior $z = 4$ y la base $z = 0$ están aisladas.

7. La temperatura en una placa circular de radio c se determina con el problema con valores en la frontera

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < r < c, \quad t > 0$$

$$u(c, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad 0 < r < c.$$

Determine $u(r, t)$.

8. Resuelva el problema 7 si la orilla $r = c$ de la placa está aislada.

9. Cuando hay transferencia de calor desde la superficie lateral de un cilindro circular de longitud infinita y radio uno (véase la figura 13.2.6) hacia el medio circundante

a temperatura cero, la temperatura dentro del cilindro se determina a partir de

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < r < 1, \quad t > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = -hu(1, t), \qquad h > 0, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad 0 < r < 1.$$

Determine para $u(r, t)$.

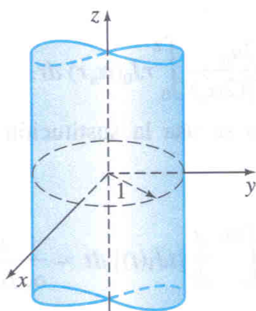


FIGURA 13.2.6 Cilindro infinito del problema 9.

10. Determine la temperatura de estado estable $u(r, z)$ de un cilindro semiinfinito de radio uno ($z \geq 0$) si hay transferencia de calor por su superficie lateral hacia el medio circundante a temperatura cero y si la temperatura de la base $z = 0$ se mantiene a la temperatura constante u_0.

11. Una placa circular está compuesta por dos materiales distintos en forma de círculos concéntricos. Véase la figura 13.2.7. La temperatura en la placa se determina como un problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < r < 2, \quad t > 0$$

$$u(2, t) = 100, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = \begin{cases} 200, & 0 < r < 1 \\ 100, & 1 < r < 2. \end{cases}$$

Determine $u(r, t)$. [*Sugerencia*: Sea $u(r, t) = v(r, t) + \psi(r)$.]

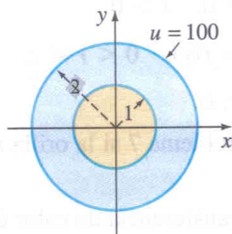


FIGURA 13.2.7 Placa compuesta circular del problema 11.

12. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \beta = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < r < 1, \quad t > 0$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = 0, \quad 0 < r < 1.$$

Suponga que β es una constante.

13. El desplazamiento horizontal $u(x, t)$ de una pesada cadena de longitud L que oscila en un plano vertical satisface la ecuación diferencial parcial

$$g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Véase la figura 13.2.8.

a) Utilice $-\lambda$ como constante de separación para demostrar que la ecuación diferencial ordinaria en la variable espacial x es $xX'' + X' + \lambda X = 0$. Resuelva esta ecuación con la sustitución $x = \tau^2/4$.

b) Utilice el resultado del inciso a) para resolver la ecuación diferencial parcial dada, sujeta a

$$u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < L.$$

[*Sugerencia*: Suponga que las oscilaciones en el extremo libre $x = 0$ son finitas.]

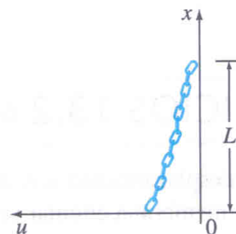


FIGURA 13.2.8 Cadena oscilatoria del problema 13.

14. En este problema considere el caso general, es decir, con dependencia de θ, de la membrana circular vibratoria de radio c:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < r < c, \quad t > 0$$

$$u(c, \theta, t) = 0, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad t > 0$$

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \quad 0 < r < c, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r, \theta), \quad 0 < r < c, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

a) Suponga que $u = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ y que las constantes de separación son $-\lambda$ y $-\nu$. Demuestre que las ecuaciones diferenciales separadas son

$$T'' + a^2\lambda T = 0, \qquad \Theta'' + \nu\Theta = 0$$

$$r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - \nu)R = 0.$$

b) Haciendo $\lambda = \alpha^2$ y $\nu = \beta^2$ resuelva las ecuaciones separadas.

c) Determine los eigenvalores y eigenfunciones del problema.

d) Utilizando el principio de superposición determine una solución en series múltiples. No intente evaluar los coeficientes.

Tarea para el laboratorio de computación

15. Considere un tambor ideal formado por una membrana delgada tensada sobre un marco circular de radio uno. Cuando se golpea ese tambor en su centro, se oye un sonido que con frecuencia se considera un retumbo más que un tono melódico. Se puede modelar un solo golpe mediante el problema con valores en la frontera que se resolvió en el ejemplo 1.

a) Determine la solución $u(r, t)$ dada en la ecuación (6) cuando $c = 1, f(r) = 0$ y

$$g(r) = \begin{cases} -v_0, & 0 \le r < b \\ 0, & b \le r < 1. \end{cases}$$

b) Demuestre que la frecuencia de la onda estacionaria $u_n(r, t)$ es $f_n = a\alpha_n/2\pi$, donde α_n es la n-ésima raíz positiva de $J_0(x)$. A diferencia de la solución de la ecuación de onda en una dimensión, en la sección 12.4, las frecuencias no son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental f_1. Demuestre que $f_2 \approx 2.295f_1$ y que $f_3 \approx 3.598f_1$. Se dice que las vibraciones del tambor producen **sobretonos anarmónicos**. Como resultado, la función de desplazamiento $u(r, t)$ no es periódica, por lo que el tambor ideal no puede sostener un tono.

c) Sean $a = 1$, $b = \frac{1}{4}$, y $v_0 = 1$ en su solución del inciso a). Utilice un SAC para graficar la quinta suma parcial $S_5(r, t)$, en los tiempos $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \ldots,$ 5.9, 6.0 en el intervalo $-1 \le r \le 1$. Utilice la aplicación de animación de su SAC para obtener un video de esas vibraciones.

d) Como un desafío mayor, utilice la aplicación 3D-plot de su SAC para hacer un video del movimiento de la parte superior de su tambor circular que se presenta en sección transversal en el inciso c). [*Sugerencia*: Hay varias formas de hacerlo. Para un tiempo fijo, trace la gráfica u en función de x y y usando $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ o bien utilice el equivalente a la instrucción **CylindricalPlot3D** de *Mathematica*.]

16. **a)** Considere el ejemplo 1 con $a = 1$, $c = 10$, $g(r) = 0$ y $f(r) = 1 - r/10$, $0 < r < 10$. Utilice un SAC como ayuda para calcular los valores numéricos de los tres primeros eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ del problema con valores en la frontera y los tres primeros coeficientes A_1, A_2, A_3 de la solución $u(r, t)$ dada en la ecuación (6). Escriba la tercera suma parcial $S_3(r, t)$ de la solución en serie.

b) Utilice un SAC para trazar la gráfica de $S_3(r, t)$ para $t = 0, 4, 10, 12, 20$.

17. Resuelva el problema 7 con las condiciones de frontera $u(c, t) = 200$, $u(r, 0) = 0$. Con las condiciones de frontera dadas, se podría esperar en forma intuitiva que en cualquier punto interior de la placa, $u(r, t) \to 200$ cuando $t \to \infty$. Suponga que $c = 10$ y que la placa es de hierro colado de tal modo que $k = 0.1$ (aproximadamente). Use un SAC para ayudarse a calcular los valores numéricos de los primeros cinco eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ del problema con valores en la frontera y los cinco primeros coeficientes A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 en la solución $u(r, t)$. Denote la solución aproximada correspondiente por $S_5(r, t)$. Trace la gráfica de $S_5(5, t)$ y de $S_5(0, t)$ en un intervalo de tiempo suficientemente grande $0 \le t \le T$. Utilice las gráficas de $S_5(5, t)$ y $S_5(0, t)$ para estimar los tiempos (en segundos) para los que $u(5, t) \approx 100$ y $u(0, t) \approx 100$. Repita para $u(5, t) \approx 200$ y $u(0, t) \approx 200$.

13.3 COORDENADAS ESFÉRICAS

REPASO DE MATERIAL

- Ecuación diferencial de Legendre en la sección 6.3
- Formas de la serie de Fourier-Legendre en la definición 11.5.2.

INTRODUCCIÓN Concluiremos nuestro análisis de problemas con valores en la frontera en diferentes sistemas coordenados considerando problemas que impliquen las ecuaciones de calor, de onda y de Laplace en coordenadas esféricas.

LAPLACIANO EN COORDENADAS ESFÉRICAS Como se muestra en la figura 13.3.1, un punto en el espacio tridimensional está descrito en coordenadas rectangulares y en coordenadas esféricas. Las coordenadas rectangulares x, y y z del punto están relacionadas con sus coordenadas esféricas por medio de las ecuaciones:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \qquad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \qquad z = r \cos \theta. \tag{1}$$

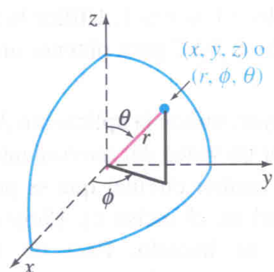


FIGURA 13.3.1 Las coordenadas esféricas de un punto (x, y, z) son (r, θ, ϕ).

Utilizando las ecuaciones (1), se puede demostrar que el Laplaciano $\nabla^2 u$ en el sistema coordenado esférico es

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \tag{2}$$

Como ya podrá imaginarse, los problemas que involucran la ecuación (2) pueden ser muy complicados. Por tanto, sólo consideraremos algunos de los problemas más sencillos independientes del ángulo azimutal ϕ.

El siguiente ejemplo es un problema de Dirichlet para una esfera.

EJEMPLO 1 Temperaturas de estado estable en una esfera

Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en la esfera que muestra la figura 13.3.2.

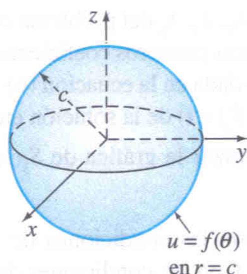


FIGURA 13.3.2 Problema de Dirichlet para una esfera.

SOLUCIÓN La temperatura se determina a partir de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \qquad 0 < r < c, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$u(c, \theta) = f(\theta), \quad 0 < \theta < \pi.$$

Si $u = R(r)\Theta(\theta)$, la ecuación diferencial parcial se separa como

$$\frac{r^2R'' + 2rR'}{R} = -\frac{\Theta'' + \cot\theta\,\Theta'}{\Theta} = \lambda,$$

y por tanto,

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \tag{3}$$

$$\operatorname{sen}\theta\,\Theta'' + \cos\theta\,\Theta' + \lambda\operatorname{sen}\theta\,\Theta = 0. \tag{4}$$

Después de sustituir $x = \cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$, la ecuación (4) se convierte en

$$(1 - x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \lambda\,\Theta = 0, \quad -1 \le x \le 1. \tag{5}$$

Esta última ecuación es una forma de la ecuación de Legendre (véase el problema 46 en los ejercicios 6.3). Ahora las únicas soluciones de la ecuación (5) que son continuas y tienen derivadas continuas en el intervalo cerrado $[-1, 1]$ son los polinomios de Legendre $P_n(x)$ que corresponden a $\lambda = n(n + 1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Por tanto, supondremos que las soluciones de (4) son

$$\Theta = P_n(\cos\theta).$$

Además, cuando $\lambda = n(n + 1)$, la solución general de la ecuación de Cauchy-Euler (3) es

$$R = c_1r^n + c_2r^{-(n+1)}.$$

Puesto que nuevamente es de esperarse que $u(r, \theta)$ esté acotada en $r = 0$, definimos $c_2 = 0$. Por tanto, $u_n = A_nr^nP_n(\cos\theta)$ y

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_nr^nP_n(\cos\theta).$$

En $r = c$,

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_nc^nP_n(\cos\theta).$$

Por tanto A_nc^n son los coeficientes de la serie de Fourier-Legendre (23) de la sección 11.5:

$$A_n = \frac{2n + 1}{2c^n}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta.$$

Por lo que la solución es

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n + 1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)\,P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta\right)\left(\frac{r}{c}\right)^n P_n(\cos\theta). \qquad \blacksquare$$

EJERCICIOS 13.3

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-22.

1. Resuelva el PVF en el ejemplo 1 si

$$f(\theta) = \begin{cases} 50, & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \theta < \pi. \end{cases}$$

Escriba los primeros cuatro términos distintos de cero de la solución en serie. [*Sugerencia*: Véase en el ejemplo 3, en la sección 11.5.]

2. La solución $u(r, \theta)$ del ejemplo 1 también se puede interpretar como el potencial en el interior de la esfera debido a una distribución de cargas $f(\theta)$ en su superficie. Determine el potencial fuera de la esfera.

3. Determine la solución del problema en el ejemplo 1 si $f(\theta) = \cos\theta$, $0 < \theta < \pi$. [*Sugerencia*: $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$. Utilice la ortogonalidad.]

4. Determine la solución del problema en el ejemplo 1 si $f(\theta) = 1 - \cos 2\theta$, $0 < \theta < \pi$. [*Sugerencia*: Véase el problema 18 en los ejercicios 11.5.]

5. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en el interior de una esfera hueca $a < r < b$, si su superficie interna $r = a$ se conserva a la temperatura $f(\theta)$ y su superficie externa $r = b$ se conserva a la temperatura cero. En la figura 13.3.3 se ve el primer octante de esa esfera.

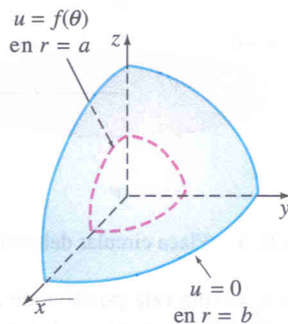


FIGURA 13.3.3 Esfera hueca del problema 5.

6. La temperatura de estado estable de un hemisferio de radio $r = c$ se determina a partir de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0,$$

$$0 < r < c, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 < r < c$$

$$u(r, \theta) = f(\theta), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Determine $u(r, \theta)$. [*Sugerencia*: $P_n(0) = 0$ sólo si n es impar. Véase también el problema 18 en los ejercicios 11.5.]

7. Resuelva el problema 6 cuando la base del hemisferio está aislada; es decir,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta = \pi/2} = 0, \qquad 0 < r < c.$$

8. Resuelva el problema 6 para $r > c$.

9. La temperatura en el interior de una esfera de radio uno, en función del tiempo, se determina a partir de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < r < 1, \quad t > 0$$

$$u(1, t) = 100, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = 0, \quad 0 < r < 1.$$

Determine $u(r, t)$. [*Sugerencia*: Compruebe que el miembro izquierdo de la ecuación diferencial parcial se puede escribir como $\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$. Sea $ru(r, t) = v(r, t) + \psi(r)$. Sólo utilice funciones que estén acotadas cuando $r \to 0$.]

10. Una esfera maciza uniforme de radio 1, a una temperatura inicial constante u_0 en toda la esfera se deja caer en un gran recipiente de líquido que se conserva a una temperatura constante u_1 ($u_1 > u_0$) durante todo el tiempo. Véase la figura 13.3.4. Puesto que hay transferencia de calor a través de la frontera $r = 1$, la temperatura $u(r, t)$ en la esfera se determina con el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < r < 1, \quad t > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = -h(u(1, t) - u_1), \quad 0 < h < 1$$

$$u(r, 0) = u_0, \quad 0 < r < 1.$$

Determine $u(r, t)$. [*Sugerencia*: Proceda como en el problema 9.]

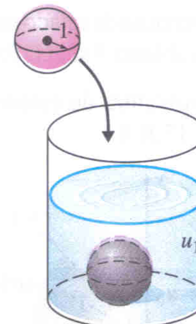


FIGURA 13.3.4 Recipiente de un fluido del problema 10.

11. Resuelva el problema con valores en la frontera que implica vibraciones esféricas:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < r < c, \quad t > 0$$

$$u(c, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r), \quad 0 < r < c.$$

[*Sugerencia*: Compruebe que el miembro izquierdo de la ecuación diferencial parcial es $a^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$. Sea $v(r, t) = ru(r, t)$.]

12. Una esfera conductora de radio $r = c$ se conecta a tierra y se coloca dentro de un campo eléctrico uniforme cuya intensidad en la dirección z es E. El potencial $u(r, \theta)$ fuera de la esfera se determina a partir del problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad r > c, \ 0 < \theta < \pi$$

$$u(c, \theta) = 0, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta) = -Ez = -Er\cos\theta.$$

Demuestre que

$$u(r, \theta) = -Er\cos\theta + E\frac{c^3}{r^2}\cos\theta.$$

[*Sugerencia*: Explique por qué $\int_0^\pi \cos\theta\, P_n(\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta\, d\theta = 0$ para todos los enteros no negativos, excepto $n = 1$. Véase la ecuación (24) en la sección 11.5.]

REPASO DEL CAPÍTULO 13

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-23.

1. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en una placa circular de radio c, si la temperatura en la circunferencia está dada por

$$u(c, \theta) = \begin{cases} u_0, & 0 < \theta < \pi \\ -u_0, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

2. Determine la temperatura de estado estable en la placa circular del problema 1, si

$$u(c, \theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \\ 1, & 3\pi/2 < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

3. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en una placa semicircular de radio 1, si

$$u(1, \theta) = u_0(\pi\theta - \theta^2), \quad 0 < \theta < \pi$$
$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = 0, \quad 0 < r < 1.$$

4. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en la placa semicircular del problema 3 si $u(1, \theta) = \text{sen}\,\theta$, $0 < \theta < \pi$.

5. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en la placa de la figura 13.R.1.

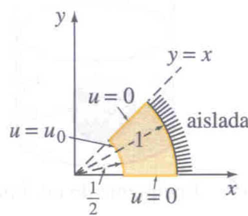


FIGURA 13.R.1 Placa en forma de cuña del problema 5.

6. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en la placa infinita que se muestra en la figura 13.R.2.

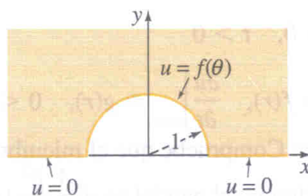


FIGURA 13.R.2 Placa infinita del problema 6.

7. Suponga que se pierde calor de las caras de un disco circular muy delgado de radio uno hacia el medio que lo circunda que está a temperatura cero. Si se aplica la ley lineal de transferencia de calor, la ecuación de calor toma la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - hu = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad h > 0, \ 0 < r < 1, \ t > 0.$$

Véase la figura 13.R.3. Determine la temperatura $u(r, t)$ si la orilla $r = 1$ se conserva a temperatura cero y si al principio la temperatura en toda la placa es igual a uno.

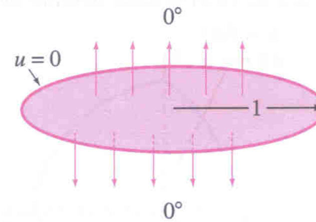


FIGURA 13.R.3 Placa circular del problema 7.

8. Suponga que x_k es una raíz positiva de J_0. Demuestre que una solución del problema con valores en la frontera

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < r < 1, \ t > 0$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = u_0 J_0(x_k r), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < r < 1$$

es $u(r, t) = u_0 J_0(x_k r)\cos a x_k t$.

9. Determine la temperatura de estado estable $u(r, z)$ en el cilindro de la figura 13.2.5, si la superficie lateral se mantiene a temperatura 50, la tapa superior $z = 4$ se mantiene a temperatura 0 y la base $z = 0$ está aislada.

10. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < 1, \ 0 < z < 1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \quad 0 < z < 1$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad u(r, 1) = g(r), \quad 0 < r < 1.$$

11. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en una esfera de radio uno, si la temperatura se conserva a

$$u(1, \theta) = \begin{cases} 100, & 0 < \theta < \pi/2 \\ -100, & \pi/2 < \theta < \pi. \end{cases}$$

[*Sugerencia*: Véase el problema 20, de los ejercicios 11.5.]

12. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < r < 1, \quad t > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r), \quad 0 < r < 1.$$

[*Sugerencia*: Proceda como en los problemas 9 y 10 de los ejercicios 13.3, pero haga $v(r, t) = ru(r, t)$. Véase la sección 12.7.]

13. La función $u(x) = Y_0(\alpha a)J_0(\alpha x) - J_0(\alpha a)Y_0(\alpha x)$, $a > 0$ es una solución de la ecuación paramétrica de Bessel

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + \alpha^2 x^2 u = 0$$

en el intervalo $[a, b]$. Si los eigenvalores $\lambda_n = \alpha_n^2$ se definen como las raíces positivas de la ecuación

$$Y_0(\alpha a)J_0(\alpha b) - J_0(\alpha a)Y_0(\alpha b) = 0,$$

demuestre que las funciones

$$u_m(x) = Y_0(\alpha_m a)J_0(\alpha_m x) - J_0(\alpha_m a)Y_0(\alpha_m x)$$
$$u_n(x) = Y_0(\alpha_n a)J_0(\alpha_n x) - J_0(\alpha_n a)Y_0(\alpha_n x)$$

son ortogonales respecto a la función de peso $p(x) = x$ en el intervalo $[a, b]$; esto es,

$$\int_a^b x u_m(x) u_n(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n.$$

[*Sugerencia*: Siga el procedimiento de las páginas 418 a 419.]

14. Use los resultados del problema 13 para resolver el siguiente problema con valores en la frontera, para la temperatura $u(r, t)$ en un anillo circular:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad a < r < b, \quad t > 0$$

$$u(a, t) = 0, \quad u(b, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad a < r < b.$$

15. Analice cómo resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad 0 < r < c, \quad 0 < z < L$$

con las condiciones frontera dadas en la figura 13.R.4. Lleve a cabo sus ideas y determine $u(r, z)$. [*Sugerencia*: Repase la ecuación (11) de la sección 12.5.]

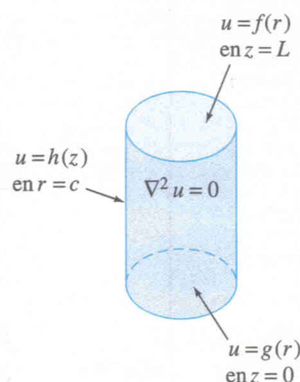
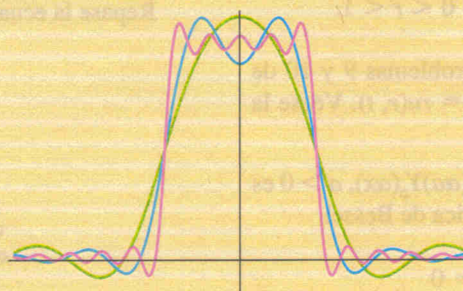


FIGURA 13.R.4 Cilindro del problema 15.

14 TRANSFORMADA INTEGRAL



El método de separación de variables es poderoso pero no se aplica universalmente en la solución de problemas con valores en la frontera si la ecuación diferencial parcial es no homogénea o si las condiciones en la frontera dependen del tiempo o si el dominio de la variable espacial es infinito $(-\infty,\infty)$ o semiinfinito (a,∞); podremos usar una transformada integral para resolver el problema. En la sección 14.2, resolveremos problemas que implican la ecuación de calor y la ecuación de onda, mediante la transformada de Laplace que ya conoce. En la sección 14.4 presentaremos y usaremos tres nuevas transformadas integrales, las transformadas de Fourier.

14.1 FUNCIÓN ERROR

REPASO DE MATERIAL

- Véase la ecuación (14) y el ejemplo 7 de la sección 2.3.

INTRODUCCIÓN En matemáticas hay numerosas funciones que se definen con una integral. Por ejemplo, en muchos textos tradicionales de cálculo se define al logaritmo natural como: $\ln x = \int_1^x dt/t$, $x > 0$. En los capítulos anteriores explicamos, aunque en forma breve, la función error erf(x), la función error complementaria, erfc(x), la función integral del seno Si(x), la integral seno de Fresnel $S(x)$ y la función gamma, $\Gamma(\alpha)$; todas esas funciones se definen en términos de una integral. Antes de aplicar la transformada de Laplace a problemas con valores en la frontera, necesitamos conocer un poco más acerca de la función de error y la función de error complementaria. En esta sección examinaremos las gráficas y algunas propiedades obvias de erf(x) y erfc(x).

PROPIEDADES Y GRÁFICAS Las definiciones de **función error** erf(x) y la **función error complementaria** erfc(x) son, respectivamente,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\, du \quad \text{y} \quad \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2}\, du. \tag{1}$$

Con la ayuda de coordenadas polares se puede demostrar que

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{o} \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2}\, du = 1.$$

Así, de la propiedad aditiva de intervalos de las integrales definidas, $\int_0^\infty = \int_0^x + \int_x^\infty$, el último resultado se puede escribir como

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^x e^{-u^2}\, du + \int_x^\infty e^{-u^2}\, du \right] = 1.$$

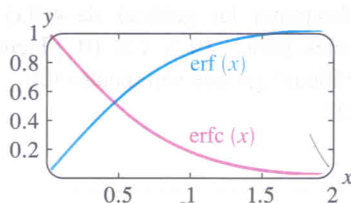


FIGURA 14.1.1 Gráficas de erf(x) y erfc(x) para $x \geq 0$.

Esto demuestra que erf(x) y erfc(x) se relacionan mediante la identidad

$$\operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = 1. \tag{2}$$

En la figura 14.1.1 se presentan las gráficas de erf(x) y erfc(x) para $x \geq 0$. Observe que $\operatorname{erf}(0) = 0$, $\operatorname{erfc}(0) = 1$ y que $\operatorname{erf}(x) \to 1$, $\operatorname{erfc}(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Se pueden obtener otros valores numéricos de erf(x) y erfc(x) de un SAC o de tablas. En las tablas, a la función error con frecuencia se le llama **integral de probabilidad**. El dominio de erf(x) y de erfc(x) es $(-\infty, \infty)$. En el problema 11 de los ejercicios 14.1 se le pedirá obtener la gráfica de cada función en este intervalo y deducir algunas propiedades adicionales.

La tabla 14.1 de las transformadas de Laplace, nos servirá en los ejercicios de la siguiente sección. Las demostraciones de estos resultados son complicadas y no las presentaremos.

TABLA 14.1 Transformadas de Laplace.

$f(t), a > 0$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$	$f(t), a > 0$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
1. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	**4.** $2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\, e^{-a^2/4t} - a \operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$
2. $\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	**5.** $e^{ab}e^{b^2 t} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + b)}$
3. $\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	**6.** $-e^{ab}e^{b^2 t} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{be^{-a\sqrt{s}}}{s(\sqrt{s} + b)}$

EJERCICIOS 14.1 *Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-23.*

1. a) Demuestre que $\operatorname{erf}(\sqrt{t}) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}}\,d\tau$.

b) Use el teorema de convolución y los resultados de los problemas 41 y 42 de los ejercicios 7.1 para demostrar que

$$\mathscr{L}\{\operatorname{erf}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}.$$

2. Utilice el resultado del problema 1 para demostrar que

$$\mathscr{L}\{\operatorname{erfc}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{s+1}}\right].$$

3. Utilice el resultado del problema 1 para demostrar que

$$\mathscr{L}\{e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{\sqrt{s}\,(s-1)}.$$

4. Use el resultado del problema 2 para demostrar que

$$\mathscr{L}\{e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{\sqrt{s}\,(\sqrt{s}+1)}.$$

5. Sean C, G, R y x constantes. Use la tabla 14.1 para demostrar que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{C}{Cs+G}\left(1 - e^{-x\sqrt{RCs+RG}}\right)\right\} = e^{-Gt/C}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right).$$

6. Sea a una constante. Demuestre que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{senh} a\sqrt{s}}{s\operatorname{senh}\sqrt{s}}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{2n+1+a}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{2n+1-a}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

[*Sugerencia*: Utilice la definición exponencial del seno hiperbólico. Desarrolle $1/(1 - e^{-2\sqrt{s}})$ en una serie geométrica].

7. Use la transformada de Laplace y la tabla 14.1 para resolver la ecuación integral

$$y(t) = 1 - \int_0^t \frac{y(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau.$$

8. Utilice el tercero y el quinto elemento de la tabla 14.1 para deducir el sexto elemento.

9. Demuestre que $\displaystyle\int_a^b e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}[\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)]$.

10. Demuestre que $\displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}\operatorname{erf}(a)$.

Tarea para el laboratorio de computación

11. Las funciones $\operatorname{erf}(x)$ y $\operatorname{erfc}(x)$ están definidas para $x < 0$. Use un SAC para sobreponer las gráficas de $\operatorname{erf}(x)$ y $\operatorname{erfc}(x)$ en los mismos ejes, para $-10 \le x \le 10$. ¿Tienen alguna simetría esas gráficas? ¿A qué son iguales $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{erf}(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{erfc}(x)$?

14.2 TRANSFORMADA DE LAPLACE

REPASO DE MATERIAL

- Problemas con valores iniciales lineales de segundo orden (secciones 4.3 y 4.4),
- Propiedades operacionales de la transformada de Laplace (secciones 7.2−7.4)

INTRODUCCIÓN La transformada de Laplace de una función $f(t)$, $t \ge 0$ se define como $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ siempre que la integral impropia converja. La integral transforma la función $f(t)$ en una función F del parámetro transformado s, es decir, $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$. De la misma forma que en el capítulo 7, donde la transformada de Laplace se usó principalmente para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, en esta sección utilizamos la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Pero a diferencia del capítulo 7, donde la transformada de Laplace reduce a una EDO lineal con coeficientes constantes a una ecuación algebraica, en esta sección vemos que una EDP con coeficientes constantes se convierte en una EDO.

TRANSFORMADA DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES Los problemas con valores en la frontera que consideramos en esta sección implicarán ya sea ecuaciones de onda unidimensional o de calor o ligeras variantes de estas ecuaciones. Las EDP implican una función desconocida de dos variables independientes $u(x, t)$ donde

la variable t representa al tiempo $t \geq 0$. La transformada de Laplace de la función $u(x, t)$ respecto a t está definida por

$$\mathscr{L}\{u(x, t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, u(x, t)\, dt,$$

donde x se trata como un parámetro. Continuamos con la convención de usar letras mayúsculas para indicar la transformada de Laplace de una función escribiendo

$$\mathscr{L}\{u(x, t)\} = U(x, s).$$

TRANSFORMADA DE DERIVADAS PARCIALES Las transformadas de las derivadas parciales $\partial u/\partial t$ y $\partial^2 u/\partial t^2$ son similares a las ecuaciones (6) y (7) de la sección 7.2:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = sU(x, s) - u(x, 0), \tag{1}$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2 U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0). \tag{2}$$

Debido a que estamos transformando respecto a t, además suponemos que es válido intercambiar la integración y la derivación en la transformada de $\partial^2 u/\partial x^2$:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2}[e^{-st}\, u(x, t)]\, dt = \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty e^{-st}\, u(x, t)\, dt = \frac{d^2}{dx^2}\mathscr{L}\{u(x, t)\};$$

es decir,

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2 U}{dx^2}. \tag{3}$$

De las ecuaciones (1) y (2) vemos que la transformada de Laplace es adecuada para problemas con condiciones iniciales, en particular, con problemas asociados con la ecuación de calor o con la ecuación de onda.

EJEMPLO 1 Transformada de Laplace de una EDP

Determine la transformada de Laplace de la ecuación de onda $a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $t > 0$.

SOLUCIÓN De la ecuación (2) y (3),

$$\mathscr{L}\left\{a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}$$

se convierte en
$$a^2\frac{d^2}{dx^2}\mathscr{L}\{u(x, t)\} = s^2\mathscr{L}\{u(x, t)\} - su(x, 0) - u_t(x, 0)$$

o
$$a^2\frac{d^2 U}{dx^2} - s^2 U = -su(x, 0) - u_t(x, 0). \tag{4}$$ ■

La transformada de Laplace respecto a t de la ecuación de onda o de la ecuación de calor elimina esa variable y para ecuaciones unidimensionales las ecuaciones transformadas son entonces *ecuaciones diferenciales ordinarias* en la variable espacial x. Al resolver una ecuación transformada, consideraremos a s un parámetro.

EJEMPLO 2 Uso de la transformada de Laplace para resolver un PVF

Resuelva $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

sujeta a $$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 < x < 1.$$

SOLUCIÓN Se reconoce a la ecuación diferencial parcial como la ecuación de onda con $a = 1$. A partir de la ecuación (4) y de las condiciones iniciales dada la ecuación transformada es

$$\frac{d^2U}{dx^2} - s^2U = -\operatorname{sen} \pi x, \tag{5}$$

donde $U(x, s) = \mathscr{L}\{u(x, t)\}$. Como las condiciones en la frontera son funciones de t, también habrá que determinar sus transformadas de Laplace:

$$\mathscr{L}\{u(0, t)\} = U(0, s) = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathscr{L}\{u(1, t)\} = U(1, s) = 0. \tag{6}$$

Los resultados en la ecuación (6) son condiciones en la frontera para la ecuación diferencial ordinaria (5). Puesto que la ecuación (5) está definida en un intervalo finito, su función complementaria es

$$U_c(x, s) = c_1 \cosh sx + c_2 \operatorname{senh} sx.$$

Con el método de los coeficientes indeterminados se obtiene una solución particular:

$$U_p(x, s) = \frac{1}{s^2 + \pi^2} \operatorname{sen} \pi x.$$

Por lo que $$U(x, s) = c_1 \cosh sx + c_2 \operatorname{senh} sx + \frac{1}{s^2 + \pi^2} \operatorname{sen} \pi x.$$

Pero las condiciones $U(0, s) = 0$ y $U(1, s) = 0$ hacen que a su vez, $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$. Se concluye que,

$$U(x, s) = \frac{1}{s^2 + \pi^2} \operatorname{sen} \pi x$$

$$u(x, t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \pi^2} \operatorname{sen} \pi x\right\} = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi x \, \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\pi}{s^2 + \pi^2}\right\}.$$

Por tanto $$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} \pi t.$$ ■

EJEMPLO 3 Uso de la transformada de Laplace para resolver un PVF

Una cuerda muy larga está inicialmente en reposo sobre la parte no negativa del eje x. La cuerda está anclada en $x = 0$ y su distante extremo derecho se desliza hacia abajo por un soporte vertical sin fricción. La cuerda se pone en movimiento dejándola caer por su propio peso. Determine el desplazamiento $u(x, t)$.

SOLUCIÓN Puesto que se considera la fuerza de gravedad se puede demostrar que la ecuación de onda tiene la forma

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad x > 0, \quad t > 0.$$

Aquí g representa la aceleración constante debida a la gravedad. Las condiciones frontera e iniciales son, respectivamente,

$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0.$$

La segunda condición en la frontera, $\lim_{x\to\infty} \partial u/\partial x = 0$, indica que la cuerda está horizontalmente a una gran distancia de su extremo izquierdo. Ahora, de las ecuaciones (2) y (3),

$$\mathscr{L}\left\{a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} - \mathscr{L}\{g\} = \mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}$$

se convierten en $\quad a^2 \dfrac{d^2 U}{dx^2} - \dfrac{g}{s} = s^2 U - su(x, 0) - u_t(x, 0)$

o, en vista de las condiciones iniciales,

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2} U = \frac{g}{a^2 s}.$$

Las transformadas de las condiciones en la frontera son

$$\mathscr{L}\{u(0, t)\} = U(0, s) = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathscr{L}\left\{\lim_{x\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{dU}{dx} = 0.$$

Con ayuda del método de los coeficientes indeterminados se ve que la solución general de la ecuación transformada es

$$U(x, s) = c_1 e^{-(x/a)s} + c_2 e^{(x/a)s} - \frac{g}{s^3}.$$

La condición en la frontera $\lim_{x\to\infty} dU/dx = 0$ implica que $c_2 = 0$ y que $U(0, s) = 0$ lo que da como resultado que $c_1 = g/s^3$. Por tanto

$$U(x, s) = \frac{g}{s^3} e^{-(x/a)s} - \frac{g}{s^3}.$$

Ahora, de acuerdo con el segundo teorema de traslación, tenemos que

$$u(x, t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{g}{s^3} e^{-(x/a)s} - \frac{g}{s^3}\right\} = \frac{1}{2} g \left(t - \frac{x}{a}\right)^2 \mathscr{U}\left(t - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2} gt^2$$

o

$$u(x, t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} gt^2, & 0 \le t < \dfrac{x}{a} \\ -\dfrac{g}{2a^2}(2axt - x^2), & t \ge \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

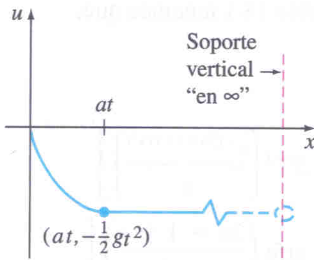


FIGURA 14.2.1 Cuerda "infinitamente larga" cayendo bajo su propio peso.

Para interpretar la solución, supongamos que $t > 0$ está fijo. Para $0 \le x \le at$, la cuerda tiene la forma de una parábola que pasa por $(0, 0)$ y por $(at, -\frac{1}{2}gt^2)$. Para $x > at$, la cuerda se describe con la recta horizontal $u = -\frac{1}{2}gt^2$. Véase la figura 14.2.1. ■

Observe que el problema del siguiente ejemplo se podría resolver con el procedimiento de la sección 12.6. La transformada de Laplace proporciona un método alternativo.

EJEMPLO 4 Una solución en términos de erf(x)

Resuelva la ecuación de calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

sujeta a $\quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = u_0, \quad t > 0$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

SOLUCIÓN De las ecuaciones (1) y (3) y de la condición inicial dada,

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}$$

se convierte en

$$\frac{d^2U}{dx^2} - sU = 0. \tag{7}$$

La transformada de las condiciones en la frontera es

$$U(0, s) = 0 \quad \text{y} \quad U(1, s) = \frac{u_0}{s}. \tag{8}$$

Puesto que nos ocupa un intervalo finito en el eje x, optamos por escribir la solución general de la ecuación (7) en la forma

$$U(x, s) = c_1 \cosh(\sqrt{s}x) + c_2 \operatorname{senh}(\sqrt{s}x).$$

Aplicando las dos condiciones en la frontera de la ecuación (8) se obtiene, respectivamente, $c_1 = 0$ y $c_2 = u_0/(s \operatorname{senh}\sqrt{s})$. Así

$$U(x, s) = u_0 \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{s}x)}{s \operatorname{senh}\sqrt{s}}.$$

Ahora, la transformada inversa de esta última función no aparece en la mayor parte de las tablas. Sin embargo, si escribimos

$$\frac{\operatorname{senh}(\sqrt{s}x)}{s \operatorname{senh}\sqrt{s}} = \frac{e^{\sqrt{s}x} - e^{-\sqrt{s}x}}{s(e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}})} = \frac{e^{(x-1)\sqrt{s}} - e^{-(x+1)\sqrt{s}}}{s(1 - e^{-2\sqrt{s}})}$$

y usando la serie geométrica

$$\frac{1}{1 - e^{-2\sqrt{s}}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\sqrt{s}}$$

encontramos

$$\frac{\operatorname{senh}(\sqrt{s}x)}{s \operatorname{senh}\sqrt{s}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{e^{-(2n+1-x)\sqrt{s}}}{s} - \frac{e^{-(2n+1+x)\sqrt{s}}}{s}\right].$$

Si suponemos que se puede hacer la transformada inversa de Laplace término a término, entonces, de acuerdo con la entrada 3 de la tabla 14.1 tenemos que,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{senh}(\sqrt{s}x)}{s \operatorname{senh}\sqrt{s}}\right\} \\ &= u_0 \sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-(2n+1-x)\sqrt{s}}}{s}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-(2n+1+x)\sqrt{s}}}{s}\right\}\right] \\ &= u_0 \sum_{n=0}^{\infty}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{2n+1-x}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{2n+1+x}{2\sqrt{t}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

La solución (9) se puede expresar en términos de la función $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$:

$$u(x, t) = u_0 \sum_{n=0}^{\infty}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{2n+1+x}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{2n+1-x}{2\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{10}$$ ■

La figura 14.2.2a que se obtuvo con la ayuda de la aplicación 3D-plot de un SAC, muestra la superficie sobre la región rectangular $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 6$, definida por la suma parcial $S_{10}(x, t)$ de la solución (10) con $u_0 = 100$. Se ve de la superficie y de las gráficas bidimensionales adjuntas, que para un valor fijo de x (la curva de intersección de un plano que corta la superficie perpendicularmente al eje x en el intervalo [0, 1], la temperatura $u(x, t)$ aumenta con rapidez hasta un valor constante conforme se incrementa el

tiempo. Véanse las figuras 14.2.2b y 14.2.2c. Para un tiempo fijo (la curva de intersección de un plano que corta la superficie perpendicularmente al eje t) la temperatura $u(x, t)$ aumenta en forma natural de 0 a 100. Véanse las figuras 14.2.2d y 14.2.2e.

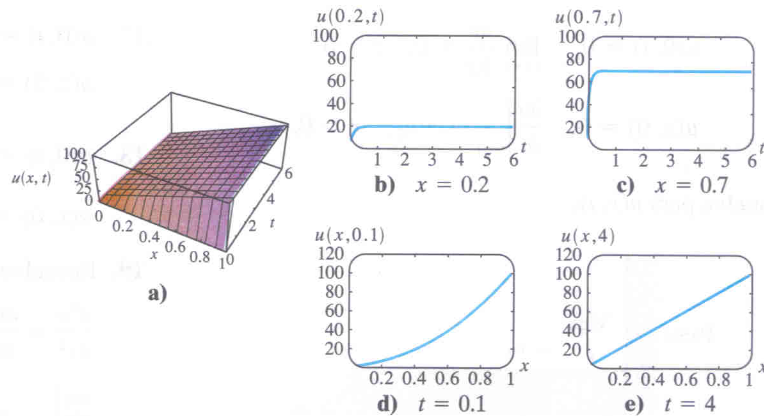


FIGURA 14.2.2 Gráfica de la solución dada en la ecuación (10). En las figuras b) y c) x se conserva constante. En las figuras d) y e) t se conserva constante.

EJERCICIOS 14.2

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-23.

1. Se estira una cuerda a lo largo del eje x entre $(0, 0)$ y $(L, 0)$. Determine el desplazamiento $u(x, t)$ si la cuerda parte del reposo en la posición inicial A sen$(\pi x/L)$.

2. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 2 \operatorname{sen} \pi x + 4 \operatorname{sen} 3\pi x.$$

3. El desplazamiento de una cuerda elástica semiinfinita se determina a partir de

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = f(t), \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0.$$

Determine $u(x, t)$.

4. Resuelva el problema con valores en la frontera 3, cuando

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} \pi t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Dibuje el desplazamiento $u(x, t)$ para $t > 1$.

5. En el ejemplo 3, encuentre el desplazamiento $u(x, t)$ cuando al extremo izquierdo de la cuerda en $x = 0$ se le comunica un movimiento oscilatorio que se describe con $f(t) = A$ sen ωt.

6. El desplazamiento $u(x, t)$ de una cuerda impulsada por una fuerza externa se determina de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} \omega t = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Determine $u(x, t)$.

7. Una barra uniforme está sujeta en $x = 0$ y está inicialmente en reposo. Si se aplica una fuerza constante F_0 al extremo libre en $x = L$, el desplazamiento longitudinal $u(x, t)$ de una sección transversal de la barra se determina de

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad E \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = F_0, \quad E \text{ constante}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < L.$$

Determine $u(x, t)$. [*Sugerencia*: Desarrolle $1/(1 + e^{-2sL/a})$ en una serie geométrica.]

8. Una viga elástica semiinfinita que se mueve a lo largo del eje x con una velocidad constante $-v_0$ se detiene al golpear

una pared al tiempo $t = 0$. Véase la figura 14.2.3. El desplazamiento longitudinal $u(x, t)$ se determina a partir de

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -v_0, \quad x > 0.$$

Resuelva para $u(x, t)$.

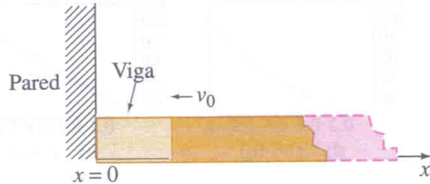


FIGURA 14.2.3 Viga elástica en movimiento del problema 8.

9. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = xe^{-x}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0.$$

10. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 1, \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = e^{-x}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0.$$

En los problemas 11 a 18 utilice la transformada de Laplace para resolver la ecuación de calor $u_{xx} = u_t$, $x > 0$, $t > 0$, sujeta a las condiciones dadas.

11. $u(0, t) = u_0, \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = u_1, \quad u(x, 0) = u_1$

12. $u(0, t) = u_0, \quad \lim_{x \to \infty} \dfrac{u(x, t)}{x} = u_1, \quad u(x, 0) = u_1 x$

13. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u(0, t), \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = u_0, \quad u(x, 0) = u_0$

14. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u(0, t) - 50, \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0$

15. $u(0, t) = f(t), \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0$

[*Sugerencia*: Utilice el teorema de convolución.]

16. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -f(t), \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0$

17. $u(0, t) = 60 + 40\mathcal{U}(t - 2), \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = 60,$

$u(x, 0) = 60$

18. $u(0, t) = \begin{cases} 20, & 0 < t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}, \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = 100,$

$u(x, 0) = 100$

19. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad -\infty < x < 1, \quad t > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 100 - u(1, t), \quad \lim_{x \to -\infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < 1.$$

20. Demuestre que una solución del problema con valores en la frontera

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0,$$

donde r es constante, está dada por

$$u(x, t) = rt - r \int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{k\tau}}\right) d\tau.$$

21. Una varilla de longitud L se mantiene a temperatura constante u_0 en sus extremos $x = 0$ y $x = L$. Si la temperatura inicial de la varilla es $u_0 + u_0 \operatorname{sen}(x\pi/L)$, resuelva la ecuación de calor $u_{xx} = u_t$, $0 < x < L$, $t > 0$ para la temperatura $u(x, t)$.

22. Si hay transferencia de calor en la superficie lateral de un alambre delgado de longitud L, hacia un medio a temperatura constante u_m, la ecuación de calor toma la forma:

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u - u_m) = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

donde h es constante. Determine la temperatura $u(x, t)$ si la temperatura inicial es una constante u_0 en todo el alambre y si los extremos están aislados en $x = 0$ y en $x = L$.

23. Una varilla de longitud uno está aislada en $x = 0$ y se conserva a temperatura cero en $x = 1$. Si la temperatura inicial de la varilla es constante e igual a u_0, determine para la temperatura $u(x, t)$ al resolver $ku_{xx} = u_t$, $0 < x < 1$, $t > 0$. [*Sugerencia*: Desarrolle $1/(1 + e^{-2\sqrt{s/k}})$ en una serie geométrica.]

24. Una losa porosa infinita de ancho uno se sumerge en una solución de concentración constante c_0. En el interior de la losa se difunde una sustancia disuelta en la solución. La concentración $c(x, t)$ en la losa se determina a partir de

$$D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \qquad t > 0$$

$$c(0, t) = c_0, \quad c(1, t) = c_0, \qquad t > 0$$

$$c(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

donde D es una constante. Determine $c(x, t)$.

25. Una línea de transmisión telefónica muy larga está inicialmente a un potencial constante u_0. Si el conductor se conecta a tierra en $x = 0$ y se aísla en el distante extremo derecho, entonces el potencial $u(x, t)$ en un punto x a lo largo de la línea al tiempo t se determina a partir de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - RC\frac{\partial u}{\partial t} - RGu = 0, \qquad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0, \quad x > 0,$$

donde R, C y G son constantes conocidas como resistencia, capacitancia y conductancia, respectivamente. Determine $u(x, t)$. [*Sugerencia*: Véase el problema 5, en los ejercicios 14.1.]

26. Demuestre que una solución del problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad x > 0, \quad t > 0, \quad h \text{ constante}$$

$$u(0, t) = u_0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0$$

es $$u(x, t) = \frac{u_0 x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-h\tau - x^2/4\tau}}{\tau^{3/2}}\,d\tau.$$

27. Comenzando en $t = 0$, una carga concentrada de magnitud F_0 se mueve con una velocidad constante v_0 a lo largo de una cuerda semiinfinita. En este caso la ecuación de onda se convierte en

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F_0\delta\left(t - \frac{x}{v_0}\right),$$

donde $\delta(t - x/v_0)$ es la función delta de Dirac. Resuelva la EDP sujeta a

$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0$$

a) cuando $v_0 \neq a$ b) cuando $v_0 = a$.

Tarea para el laboratorio de computación

28. a) La temperatura en un sólido semiinfinito se modela por el problema con valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u_0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0.$$

Determine $u(x, t)$. Utilice la solución para determinar analíticamente el valor de $\lim_{t\to\infty} u(x, t), x > 0$.

b) Use un SAC para trazar la gráfica de $u(x, t)$ sobre la región rectangular definida por $0 \leq x \leq 10, 0 \leq t \leq 15$. Suponga que $u_0 = 100$ y que $k = 1$. Indique las dos condiciones en la frontera y la condición inicial en su gráfica. Utilice gráficas de $u(x, t)$ en 2 y 3 dimensiones para comprobar su respuesta del inciso a).

29. a) En el problema 28 si hay un flujo constante de calor que entra al sólido en su frontera izquierda, entonces la condición en la frontera es $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -A, A > 0, t > 0$. Determine $u(x, t)$. Utilice la solución para determinar analíticamente el valor de $\lim_{t\to\infty} u(x, t), x > 0$.

b) Use un SAC para trazar la gráfica de $u(x, t)$ sobre la región rectangular $0 \leq x \leq 10, 0 \leq t \leq 15$. Suponga que $u_0 = 100$ y que $k = 1$. Use gráficas en 2 y 3 dimensiones de $u(x, t)$ para comprobar su respuesta del inciso a).

30. Los humanos buscan la mayor parte de su información sobre el mundo exterior a través de la vista y el oído. Pero muchas criaturas usan señales químicas como su medio principal de comunicación; por ejemplo, las abejas, al estar alarmadas, emiten una sustancia y agitan sus alas en forma febril para mandar la señal de advertencia a las abejas que atienden a la reina. Esos mensajes moleculares entre miembros de la misma especie se llaman feromonas. Las señales se pueden conducir por aire o agua en movimiento o por un *proceso de difusión* en el que el movimiento aleatorio de las moléculas del gas aleja la sustancia química de su fuente. La figura 14.2.4 muestra una hormiga emitiendo una sustancia de alarma hacia el aire en calma dentro de un túnel. Si $c(x, t)$ denota la concentración de la sustancia a x centímetros de la fuente al tiempo t, entonces $c(x, t)$ satisface

$$k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t}, \qquad x > 0, \quad t > 0$$

y k es una constante positiva. La emisión de feromonas en forma de un impulso discreto origina una condición en la frontera de la forma

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=0} = -A\delta(t),$$

donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac.

a) Resuelva el problema con valores en la frontera si además se sabe que

$$c(x, 0) = 0, \quad x > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} c(x, t) = 0, \quad t > 0.$$

b) Use un SAC para trazar la gráfica de la solución en el inciso a), para $x \geq 0$ en los tiempos fijos $t = 0.1$, $t = 0.5$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 5$.

c) Para cualquier tiempo fijo t, demuestre que $\int_0^\infty c(x, t)\,dx = Ak$. Así Ak representa la cantidad total de sustancia descargada.



FIGURA 14.2.4 Hormiga respondiendo a una señal química del problema 30.

14.3 INTEGRAL DE FOURIER

REPASO DE MATERIAL

- La integral de Fourier tiene diferentes formas que son análogas a las cuatro formas de la serie de Fourier dadas en las definiciones 11.2.1 y 11.3.1 y en el problema 21 de los ejercicios 14.2. Se recomienda un repaso de estas formas.

INTRODUCCIÓN En los capítulos 11 a 13 usamos series de Fourier para representar una función f definida en un intervalo finito tal como $(-p, p)$ o $(0, L)$. Cuando f y f' son continuas por tramos en ese intervalo, una serie de Fourier representa a la función en el intervalo y converge hacia una extensión periódica de f fuera del intervalo. De esta forma podemos decir justificadamente que las series de Fourier están asociadas sólo con *funciones periódicas*. Ahora deduciremos, en forma no rigurosa, un medio de representar ciertas clases de funciones *no periódicas* que están definidas ya sea en un intervalo infinito $(-\infty, \infty)$, o en un intervalo semiinfinito $(0, \infty)$.

DE LA SERIE DE FOURIER A LA INTEGRAL DE FOURIER Supongamos que una función f está definida en $(-p, p)$. Si usamos las definiciones integrales de los coeficientes en (9), (10) y (11) de la sección 11.2 en la ecuación (8) de esa sección, entonces la serie de Fourier de f en el intervalo es

$$f(x) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt + \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-p}^{p} f(t)\cos\frac{n\pi}{p}t\,dt\right)\cos\frac{n\pi}{p}x + \left(\int_{-p}^{p} f(t)\,\text{sen}\frac{n\pi}{p}t\,dt\right)\text{sen}\frac{n\pi}{p}x\right]. \quad (1)$$

Si hacemos $\alpha_n = n\pi/p$, $\Delta\alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \pi/p$, entonces la ecuación (1) se convierte en

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-p}^{p} f(t)\,dt\right)\Delta\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-p}^{p} f(t)\cos\alpha_n t\,dt\right)\cos\alpha_n x + \left(\int_{-p}^{p} f(t)\,\text{sen}\,\alpha_n t\,dt\right)\text{sen}\,\alpha_n x\right]\Delta\alpha. \quad (2)$$

Ahora, ampliando el intervalo $(-p, p)$ haciendo que $p \to \infty$. Puesto que $p \to \infty$ implica que $\Delta\alpha \to 0$, el límite de (2) tiene la forma $\lim_{\Delta\alpha\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha_n)\,\Delta\alpha$, que sugiere la definición de la integral $\int_0^\infty F(\alpha)\,d\alpha$. Por lo que si $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ existe, el límite del primer término de la ecuación (2) es cero y el límite de la suma se convierte en

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{sen}\,\alpha t\,dt\right)\text{sen}\,\alpha x\right]d\alpha. \quad (3)$$

El resultado de la ecuación (3) se llama **integral de Fourier** de f en $(-\infty, \infty)$. Como se muestra en el siguiente resumen, la estructura básica de la integral de Fourier recuerda la de una serie de Fourier.

DEFINICIÓN 14.3.1 Integral de Fourier

La **integral de Fourier** de una función f definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$ está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\,\text{sen}\,\alpha x]\,d\alpha, \tag{4}$$

donde

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx \tag{5}$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\text{sen}\,\alpha x\,dx. \tag{6}$$

CONVERGENCIA DE UNA INTEGRAL DE FOURIER Las condiciones suficientes para que una integral de Fourier converja a $f(x)$ se parecen a las de una serie de Fourier, pero son ligeramente más restrictivas que las condiciones para una serie de Fourier.

TEOREMA 14.3.1 Condiciones para la convergencia

Sean f y f' continuas por tramos en todo intervalo finito y sea f absolutamente integrable en $(-\infty, \infty)$.* Entonces la integral de Fourier de f en el intervalo converge a $f(x)$ en un punto de continuidad. En un punto de discontinuidad, la integral de Fourier converge al promedio

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

donde $f(x^+)$ y $f(x^-)$ representan el límite de f en x, desde la derecha y desde la izquierda, respectivamente.

EJEMPLO 1 Representación de la integral de Fourier

Encuentre la representación integral de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

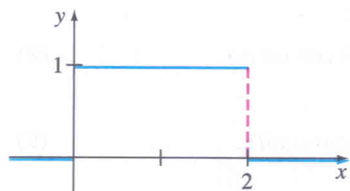


FIGURA 14.3.1 La función continua en tramos definida en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN La función cuya gráfica se presenta en la figura 14.3.1, satisface la hipótesis del teorema 14.3.1. Por tanto, de las ecuaciones (5) y (6) se tiene que

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\cos\alpha x\,dx + \int_0^2 f(x)\cos\alpha x\,dx + \int_2^\infty f(x)\cos\alpha x\,dx \\ &= \int_0^2 \cos\alpha x\,dx = \frac{\text{sen}\,2\alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\text{sen}\,\alpha x\,dx = \int_0^2 \text{sen}\,\alpha x\,dx = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\alpha}.$$

*Esto significa que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ converge.

Entonces sustituyendo estos coeficientes en (4) se tiene que

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\left(\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\alpha}\right)\cos \alpha x + \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{\alpha}\right)\operatorname{sen} \alpha x\right] d\alpha.$$

Cuando utilizamos las identidades trigonométricas, la última integral se simplifica como

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha(x-1)}{\alpha}\, d\alpha. \qquad (7)$$ ■

La integral de Fourier se puede utilizar para evaluar las integrales. Por ejemplo, se tiene de acuerdo con el teorema 14.3.1, que la ecuación (7) converge a $f(1)=1$; esto es,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}\, d\alpha = 1 \quad \text{así} \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Este último resultado merece una nota especial porque no se puede obtener de la manera "usual" ya que el integrando $(\operatorname{sen} x)/x$ no tiene una antiderivada que sea una función elemental.

INTEGRALES COSENO Y SENO Cuando f es una función par en el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces el producto $f(x) \cos \alpha x$ también es una función par, mientras que $f(x) \operatorname{sen} \alpha x$ es una función impar. Como consecuencia de la propiedad (*g*) del teorema 11.3.1, $B(\alpha) = 0$ y así la ecuación (4) se convierte en

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(t)\cos \alpha t\, dt\right)\cos \alpha x\, d\alpha.$$

Aquí hemos utilizado la propiedad (*f*) del teorema 11.3.1 para escribir

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos \alpha t\, dt = 2\int_0^\infty f(t)\cos \alpha t\, dt.$$

De igual manera, cuando f es una función impar en $(-\infty, \infty)$, los productos $f(x) \cos \alpha x$ y $f(x) \operatorname{sen} \alpha x$ son funciones impar y par, respectivamente. Por tanto, $A(\alpha) = 0$, y

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(t)\operatorname{sen} \alpha t\, dt\right)\operatorname{sen} \alpha x\, d\alpha.$$

Se resume en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 14.3.2 Integrales de Fourier del coseno y del seno

i) La integral de Fourier de una función par en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es la **integral coseno**

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty A(\alpha)\cos \alpha x\, d\alpha, \qquad (8)$$

donde

$$A(\alpha) = \int_0^\infty f(x)\cos \alpha x\, dx. \qquad (9)$$

ii) La integral de Fourier de una función impar en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es la **integral seno**

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty B(\alpha)\operatorname{sen} \alpha x\, d\alpha, \qquad (10)$$

donde

$$B(\alpha) = \int_0^\infty f(x)\operatorname{sen} \alpha x\, dx. \qquad (11)$$

EJEMPLO 2 Representación integral del coseno

Determine la representación integral de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

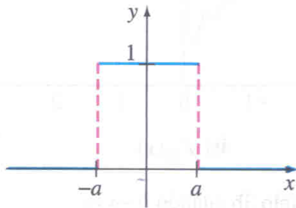


FIGURA 14.3.2 Función par continua en tramos definida en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN Se ve en la figura 14.3.2 que f es una función par. Por lo que representaremos a f por la integral coseno de Fourier (8). De la ecuación (9) obtenemos

$$A(\alpha) = \int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\,dx = \int_0^a f(x)\cos\alpha x\,dx + \int_a^\infty f(x)\cos\alpha x\,dx = \int_0^a \cos\alpha x\,dx = \frac{\operatorname{sen}a\alpha}{\alpha},$$

por lo que $$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}a\alpha\cos\alpha x}{\alpha}\,d\alpha. \qquad (12)$$ ■

Se pueden usar las integrales (8) y (10) cuando f no es par ni impar y está definida sólo por la semirrecta $(0, \infty)$. En este caso (8) representa a f en el intervalo $(0, \infty)$ y a su desarrollo par (pero no periódico) en $(-\infty, 0)$, mientras que la ecuación (10) representa a f en $(0, \infty)$ y a su desarrollo impar en el intervalo $(-\infty, 0)$. El siguiente ejemplo ilustra este concepto.

EJEMPLO 3 Representaciones integrales del coseno y del seno

Represente $f(x) = e^{-x}, x > 0$

a) con una integral coseno **b)** con una integral seno.

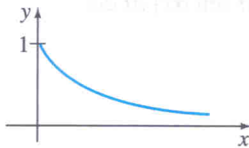


FIGURA 14.3.3 Función definida en $(0, \infty)$.

SOLUCIÓN En la figura 14.3.3 se presenta la gráfica de la función.

a) Usando integración por partes, se encuentra que

$$A(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x\,dx = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Por tanto, la integral coseno de f es

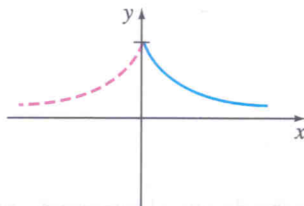
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2}\,d\alpha. \qquad (13)$$

b) Del mismo modo, tenemos que

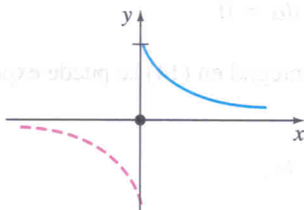
$$B(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen}\alpha x\,dx = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Entonces, la integral seno de f es

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha\operatorname{sen}\alpha x}{1+\alpha^2}\,d\alpha. \qquad (14)$$



a) Integral coseno



b) Integral seno

FIGURA 14.3.4 a) es la extensión par de f; b) es la extensión impar de f.

La figura 14.3.4 muestra las gráficas de las funciones y de sus desarrollos representadas por las dos integrales. ■

USO DE COMPUTADORAS Podemos examinar la convergencia de una integral de una manera similar a trazar las gráficas de las sumas parciales de una serie de Fourier. Para ilustrar esto, usaremos el inciso b) del ejemplo 13. Entonces, por definición de una integral impropia, la representación integral seno de Fourier de $f(x) = e^{-x}, x > 0$, se puede escribir como $f(x) = \lim_{b\to\infty} F_b(x)$, donde x se considera un parámetro en

$$F_b(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^b \frac{\alpha\operatorname{sen}\alpha x}{1+\alpha^2}\,d\alpha. \qquad (15)$$

Ahora la idea es ésta: puesto que la integral de Fourier (14) converge, para un valor dado de $b > 0$ la gráfica de la **integral parcial** $F_b(x)$ en (15) será una aproximación a la gráfica de f en la figura 14.3.4b. Las gráficas de $F_b(x)$ en la ecuación (15) serán una aproximación a la gráfica de f de la figura 14.3.4b. En la figura 14.3.5 se presentan las gráficas de $F_b(x)$ para $b = 5$ y $b = 20$ que se obtuvieron utilizando *Mathematica* y su aplicación **NIntegrate**. Véase el problema 21 de los ejercicios 14.3.

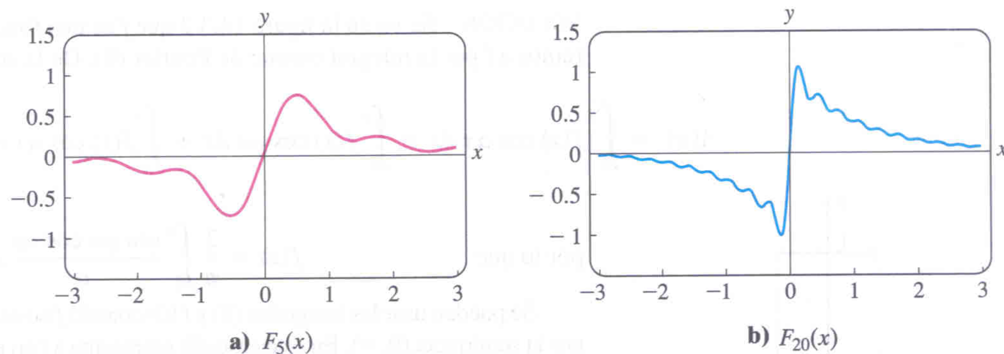


FIGURA 14.3.5 Convergencia de $F_b(x)$ a $f(x)$ del ejemplo 3b cuando $b \to \infty$.

FORMA COMPLEJA La integral de Fourier (ecuación (4)) también tiene una **forma compleja** equivalente o **forma exponencial**, que es similar a la forma compleja de una serie de Fourier (véase el problema 21 en los ejercicios 11.2). Si se sustituyen las ecuaciones (5) y (6) en la (4), entonces

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)\,[\cos \alpha t \cos \alpha x + \operatorname{sen} \alpha t \operatorname{sen} \alpha x]\, dt\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos \alpha(t - x)\, dt\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos \alpha(t - x)\, dt\, d\alpha \tag{16}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)[\cos \alpha(t - x) + i \operatorname{sen} \alpha(t - x)]\, dt\, d\alpha \tag{17}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\alpha(t-x)}\, dt\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\alpha t}\, dt\right) e^{-i\alpha x}\, d\alpha. \tag{18}$$

Observe que la ecuación (16) es consecuencia del hecho de que el integrando es una función par de α. En la ecuación (17) sólo hemos agregado cero al integrando;

$$i\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) \operatorname{sen} \alpha(t - x)\, dt\, d\alpha = 0$$

porque el integrando es una función impar de α. La integral en (14) se puede expresar en la forma

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty C(\alpha)e^{-i\alpha x}\, d\alpha, \tag{19}$$

donde

$$C(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{i\alpha x}\, dx. \tag{20}$$

Esta última forma de la integral de Fourier se usará en la siguiente sección, cuando regresemos a la solución de problemas con valores en la frontera.

EJERCICIOS 14.3

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la páginae RES-24.

En los problemas 1 a 6 encuentre la representación integral de Fourier de la función dada.

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -1, & -1 < x < 0 \\ 2, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < \pi \\ 4, & \pi < x < 2\pi \\ 0, & x > 2\pi \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 < x < 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \operatorname{sen} x, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} e^{x}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

En los problemas 7 a 12, represente la función dada mediante una integral coseno o seno apropiada.

7. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -5, & -1 < x < 0 \\ 5, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \pi, & 1 < |x| < 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x, & |x| < \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$

11. $f(x) = e^{-|x|} \operatorname{sen} x$

12. $f(x) = xe^{-|x|}$

En los problemas 13 a 16 encuentre las representaciones de integrales de cosenos y senos de la función dada.

13. $f(x) = e^{-kx}, \quad k > 0, \quad x > 0$

14. $f(x) = e^{-x} - e^{-3x}, \quad x > 0$

15. $f(x) = xe^{-2x}, \quad x > 0$

16. $f(x) = e^{-x} \cos x, \quad x > 0$

En los problemas 17 y 18 resuelva la ecuación integral correspondiente y determine f.

17. $\displaystyle\int_0^\infty f(x) \cos \alpha x \, dx = e^{-\alpha}$

18. $\displaystyle\int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx = \begin{cases} 1, & 0 < \alpha < 1 \\ 0, & \alpha > 1 \end{cases}$

19. **a)** Use la ecuación (7) para demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

[*Sugerencia*: α es una variable muda de integración.]

b) Demuestre que en general, para $k > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} kx}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

20. Utilice la forma compleja (19) para hallar la representación integral de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$. Demuestre que el resultado es el mismo que el obtenido de (8).

Tarea para el laboratorio de computación

21. Mientras que la integral (12) se puede trazar de la misma manera como se analizó en la página 501 para obtener la figura 14.3.5, también se puede expresar en términos de una función especial que está incorporada en un SAC.

a) Utilice una identidad trigonométrica para demostrar que una forma alternativa de la representación integral de Fourier (12) de la función f del ejemplo 2 (con $a = 1$) es

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha(x+1) - \operatorname{sen} \alpha(x-1)}{\alpha} \, d\alpha.$$

b) Como una consecuencia del inciso a), $f(x) = \lim_{b \to \infty} F_b(x)$, donde

$$F_b(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} \alpha(x+1) - \operatorname{sen} \alpha(x-1)}{\alpha} \, d\alpha.$$

Demuestre que la última integral se puede escribir como

$$F_b(x) = \frac{1}{\pi} [\operatorname{Si}(b(x+1)) - \operatorname{Si}(b(x-1))],$$

donde $\operatorname{Si}(x)$ es la **función seno integral**. Véase el problema 49 de los ejercicios 2.3.

c) Utilice un SAC y la forma integral del seno de $F_b(x)$ en el inciso b) para obtener las gráficas en el intervalo $[-3, 3]$ para $b = 4, 6$ y 15. Después trace la gráfica de $F_b(x)$ para valores grandes de $b > 0$.

14.4 TRANSFORMADAS DE FOURIER

REPASO DE MATERIAL

- Definición 14.3.2.
- Ecuaciones (19) y (20) en la sección 14.3.

INTRODUCCIÓN Hasta el momento, en este libro hemos estudiado y utilizado sólo una transformada integral, la transformada de Laplace. Pero en la sección 14.3 vimos que la integral de Fourier tiene tres formas alternativas: el coseno integral, el seno integral y la forma compleja o exponencial. En esta sección tomaremos estas tres formas de la integral de Fourier y las desarrollaremos en tres nuevas transformadas de integrales, llamadas, como es de esperar, **transformadas de Fourier.** Además, desarrollaremos el concepto de transformada de un par, que es una transformada integral y su inversa. También veremos que la inversa de una transformada integral es en sí misma otra transformada integral.

PARES DE TRANSFORMADAS La transformada de Laplace $F(s)$ de una función $f(t)$ se define con una integral, pero hasta ahora hemos usado la representación simbólica $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ para denotar la transformada inversa de Laplace de $F(s)$. En realidad, la transformada inversa de Laplace también es una transformada integral.

Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$, entonces la transformada inversa de Laplace es

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)\, ds = f(t).$$

La última integral se llama **integral de contorno**; para evaluarla se necesita usar variables complejas, lo que va más allá del alcance de este libro. El punto es éste: las transformadas integrales aparecen en **pares de transformadas**. Si $f(x)$ se transforma en $F(\alpha)$ con una **transformada integral**

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x)K(\alpha, x)\, dx,$$

entonces se puede recuperar la función f mediante otra transformada integral

$$f(x) = \int_c^d F(\alpha)H(\alpha, x)\, d\alpha,$$

llamada **transformada inversa**. Las funciones K y H se llaman **kernels** (núcleos) de sus transformadas respectivas. Identificamos $K(s, t) = e^{-st}$ como kernel de la transformada de Laplace y $H(s, t) = e^{st}/2\pi i$ como el kernel de la transformada inversa de Laplace.

PARES DE TRANSFORMADAS DE FOURIER La integral de Fourier es el origen de tres nuevas transformadas integrales. Las ecuaciones (20)−(19), (11)−(10) y (9)−(8) de la sección 14.3 nos conducen a definir los siguientes **pares de transformadas de Fourier**.

DEFINICIÓN 14.4.1 Pares de transformadas de Fourier

i) Transformada de Fourier: $$\mathscr{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\, dx = F(\alpha) \tag{1}$$

Transformada inversa de Fourier: $$\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}\, d\alpha = f(x) \tag{2}$$

ii) Transformada de Fourier del seno:
$$\mathscr{F}_s\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx = F(\alpha) \tag{3}$$

Transformada inversa de Fourier del seno:
$$\mathscr{F}_s^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha) \operatorname{sen} \alpha x \, d\alpha = f(x) \tag{4}$$

iii) Transformada de Fourier del coseno:
$$\mathscr{F}_c\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x) \cos \alpha x \, dx = F(\alpha) \tag{5}$$

Transformada inversa de Fourier del coseno:
$$\mathscr{F}_c^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha = f(x) \tag{6}$$

EXISTENCIA Las condiciones bajo las que existen (1), (3) y (5) son más estrictas que las de la transformada de Laplace. Por ejemplo, debe comprobar que $\mathscr{F}\{1\}$, $\mathscr{F}_s\{1\}$ y $\mathscr{F}_c\{1\}$ no existen. Las condiciones suficientes para la existencia son que f sea absolutamente integrable en el intervalo adecuado y que f y f' sean continuas por tramos en todo intervalo finito.

PROPIEDADES OPERACIONALES Como nuestro objetivo inmediato es aplicar estas nuevas transformadas a problemas con valores en la frontera, necesitamos examinar las transformadas de las derivadas.

TRANSFORMADA DE FOURIER Supongamos que f es continua y absolutamente integrable en el intervalo $(-\infty, \infty)$, y que f' es continua por tramos en todo intervalo finito. Si $f(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$, entonces la integración por partes da

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{f'(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{i\alpha x}\,dx \\ &= f(x)\,e^{i\alpha x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - i\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx \\ &= -i\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx,\end{aligned}$$

esto es
$$\mathscr{F}\{f'(x)\} = -i\alpha\,F(\alpha). \tag{7}$$

De igual manera, con las hipótesis adicionales de que f' es continua en $(-\infty, \infty)$, $f''(x)$ es continua por tramos en todo intervalo finito y que $f'(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$, se tiene que

$$\mathscr{F}\{f''(x)\} = (-i\alpha)^2\,\mathscr{F}\{f(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha). \tag{8}$$

Es importante observar que las transformadas seno y coseno no son adecuadas para transformar la primera derivada (o, en realidad, cualquier derivada de orden *impar*). Se demuestra con facilidad que

$$\mathscr{F}_s\{f'(x)\} = -\alpha\mathscr{F}_c\{f(x)\} \qquad \text{y} \qquad \mathscr{F}_c\{f'(x)\} = \alpha\mathscr{F}_s\{f(x)\} - f(0).$$

La dificultad es evidente; la transformada de $f'(x)$ no se expresa en términos de la transformada integral original.

TRANSFORMADA SENO DE FOURIER Supongamos que f y f' son continuas, f es absolutamente integrable en el intervalo $[0,\infty)$ y f'' es continua por tramos en todo

intervalo finito. Si $f \to 0$ y $f' \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s\{f''(x)\} &= \int_0^\infty f''(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx \\
&= f'(x) \operatorname{sen} \alpha x \Big|_0^\infty - \alpha \int_0^\infty f'(x) \cos \alpha x \, dx \\
&= -\alpha \left[f(x) \cos \alpha x \Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx \right] \\
&= \alpha f(0) - \alpha^2 \mathcal{F}_s\{f(x)\},
\end{aligned}$$

esto es,
$$\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha) + \alpha f(0). \tag{9}$$

TRANSFORMADA COSENO DE FOURIER Bajo las mismas suposiciones que condujeron a la ecuación (9), se ve que la transformada coseno de Fourier de $f''(x)$ es

$$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha) - f'(0). \tag{10}$$

Una duda natural es la siguiente: "¿Cómo se sabe cuál transformada se debe usar en determinado problema con valores en la frontera?". Es claro que para usar una transformada de Fourier, el dominio de la variable que se va a eliminar debe ser $(-\infty, \infty)$. Para utilizar una transformada seno o coseno, el dominio de al menos una de las variables del problema debe ser $[0, \infty)$. Pero el factor determinante para elegir entre la transformada seno y la transformada coseno es el tipo de condición en la frontera que se especifique en cero.

■ Recuerde esto cuando trabaje con los ejercicios 14.4.

En los ejemplos que siguen, supondremos sin volver a mencionarlo, que tanto u como $\partial u/\partial x$ (o $\partial u/\partial y$) tienden a cero cuando $x \to \pm\infty$. Ésta no es una restricción mayor, porque estas condiciones son válidas en la mayor parte de las aplicaciones.

EJEMPLO 1 Uso de la transformada de Fourier

Resuelva la ecuación de calor $k \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, sujeta a

$$u(x, 0) = f(x), \qquad \text{donde} \qquad f(x) = \begin{cases} u_0, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

SOLUCIÓN El problema se puede interpretar como encontrar la temperatura $u(x, t)$ en una varilla infinita. Puesto que el dominio de x es el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$, usaremos la transformada de Fourier, ecuación (1) y definiremos

$$\mathcal{F}\{u(x, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\alpha x} \, dx = U(\alpha, t).$$

Si transformamos la ecuación diferencial parcial y utilizamos la ecuación (8),

$$\mathcal{F}\left\{k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}$$

se obtiene
$$-k\alpha^2 U(\alpha, t) = \frac{dU}{dt} \qquad \text{o} \qquad \frac{dU}{dt} + k\alpha^2 U(\alpha, t) = 0.$$

Resolviendo la última ecuación se obtiene $U(\alpha, t) = ce^{-k\alpha^2 t}$. Ahora, la transformada de la condición inicial es

$$\mathcal{F}\{u(x, 0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} \, dx = \int_{-1}^{1} u_0 \, e^{i\alpha x} \, dx = u_0 \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i\alpha}.$$

Este resultado es igual a $U(\alpha, 0) = 2u_0 \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$. Aplicando esta condición a la solución a $U(\alpha, t)$ se obtiene $U(\alpha, 0) = c = (2u_0 \operatorname{sen}\alpha)/\alpha$, por lo que

$$U(\alpha, t) = 2u_0 \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t}.$$

Por lo que de la integral de inversión (2),

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t} e^{-i\alpha x}\, d\alpha.$$

La última expresión se puede simplificar un poco usando la fórmula de Euler $e^{-i\alpha x} = \cos\alpha x - i \operatorname{sen}\alpha x$ y observando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t} \operatorname{sen}\alpha x \; d\alpha = 0,$$

ya que el integrando es una función impar de α. Por tanto, finalmente tenemos que

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha x}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t}\, d\alpha. \qquad (11)$$ ■

Se deja como ejercicio mostrar que la solución (11) se puede expresar en términos de la función de error. Véase el problema 4, en los ejercicios 14.4.

EJEMPLO 2 Uso de la transformada coseno

La temperatura estable en una placa semiinfinita se determina a partir de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < \pi, \quad y > 0$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = e^{-y}, \quad y > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

Determine $u(x, y)$.

SOLUCIÓN El dominio de la variable y y la condición prescrita en $y = 0$ indican que la transformada coseno de Fourier es adecuada para este problema. Definiremos

$$\mathscr{F}_c\{u(x, y)\} = \int_0^{\infty} u(x, y) \cos\alpha y \, dy = U(x, \alpha).$$

En vista de la ecuación (10), $\mathscr{F}_c\left\{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} + \mathscr{F}_c\left\{\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\} = \mathscr{F}_c\{0\}$

se convierte en $\dfrac{d^2U}{dx^2} - \alpha^2 U(x, \alpha) - u_y(x, 0) = 0 \quad$ o $\quad \dfrac{d^2U}{dx^2} - \alpha^2 U = 0.$

Puesto que el dominio de x es un intervalo finito, optaremos por escribir la solución de la ecuación diferencial ordinaria como

$$U(x, \alpha) = c_1 \cosh\alpha x + c_2 \operatorname{senh}\alpha x. \qquad (12)$$

Ahora, a su vez $\mathscr{F}_c\{u(0, y)\} = \mathscr{F}_c\{0\}$ y $\mathscr{F}_c\{u(\pi, y)\} = \mathscr{F}_c\{e^{-y}\}$ equivalentes respectivamente a

$$U(0, \alpha) = 0 \qquad \text{y} \qquad U(\pi, \alpha) = \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

Cuando se aplican estas últimas condiciones, la solución (12) da como resultado $c_1 = 0$ y $c_2 = 1/[(1 + \alpha^2)\,\text{senh}\,\alpha\pi]$. Por tanto,

$$U(x, \alpha) = \frac{\text{senh}\,\alpha x}{(1 + \alpha^2)\,\text{senh}\,\alpha\pi},$$

Por lo que de (6) tenemos que

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\text{senh}\,\alpha x}{(1 + \alpha^2)\,\text{senh}\,\alpha\pi}\cos\alpha y\, d\alpha. \qquad (13)$$ ■

Si en el ejemplo 2 se hubiera dado $u(x, 0)$ en lugar de $u_y(x, 0)$, entonces lo adecuado hubiera sido la transformación seno.

EJERCICIOS 14.4

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-24.

En los problemas 1 a 21 use las transformadas integrales de Fourier de esta sección para resolver el problema con valores en la frontera dado. Haga hipótesis acerca de los acotamientos donde sean necesarios.

1. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$

$u(x, 0) = e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$

2. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -100, & -1 < x < 0 \\ 100, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

3. Encuentre la temperatura $u(x, t)$ en una varilla semiinfinita si $u(0, t) = u_0$, $t > 0$ y $u(x, 0)$, $x > 0$.

4. Use el resultado $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,\alpha x}{\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$, para demostrar que la solución del problema 3 se puede escribir como

$$u(x, t) = u_0 - \frac{2u_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,\alpha x}{\alpha}e^{-k\alpha^2 t}\,d\alpha.$$

5. Determine la temperatura $u(x, t)$ en una varilla semiinfinita si $u(0, t) = 0$, $t > 0$ y

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

6. Resuelva el problema 3 si la condición en la frontera izquierda es

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -A, \quad t > 0,$$

donde A es una constante.

7. Resuelva el problema 5 si el extremo $x = 0$ está aislado.

8. Encuentre la temperatura $u(x, t)$ en una varilla semiinfinita si $u(0, t) = 1$, $t > 0$ y $u(x, 0) = e^{-x}$, $x > 0$.

9. **a)** $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

b) Si $g(x) = 0$, demuestre que la solución del inciso a) se puede escribir como $u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)]$.

10. Determine el desplazamiento $u(x, t)$ de una cuerda semiinfinita si

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = xe^{-x}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0$$

11. Resuelva el problema del ejemplo 2 si las condiciones en la frontera en $x = 0$ y en $x = \pi$ están invertidas: $u(0, y) = e^{-y}$, $u(\pi, y) = 0$, $y > 0$.

12. Resuelva el problema del ejemplo 2 si la condición en la frontera en $y = 0$ es $u(x, 0) = 1$, $0 < x < \pi$.

13. Determine la temperatura de estado estable $u(x, y)$ en una placa definida por $x \geq 0$, $y \geq 0$ si la frontera $x = 0$ está aislada y en $y = 0$,

$$u(x, 0) = \begin{cases} 50, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

14. Resuelva el problema 13 si la condición en la frontera en $x = 0$ es $u(0, y) = 0$, $y > 0$.

15. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0, \quad 0 < y < 2$

$u(0, y) = 0, \quad 0 < y < 2$

$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, 2) = 0, \quad x > 0$

16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y > 0$

$u(0, y) = f(y), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \quad y > 0$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < \pi$

En los problemas 17 y 18 determine la temperatura de estado estable en la placa de la figura dada. [*Sugerencia*: Una forma de proceder es expresar los problemas 17 y 18 en forma de dos y tres problemas con valores en la frontera, respectivamente. Utilice el principio de superposición. Véase la sección 12.5.]

17.

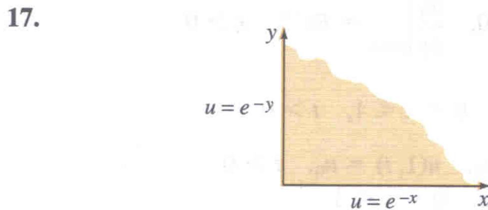


FIGURA 14.4.1 Placa del problema 17.

18.

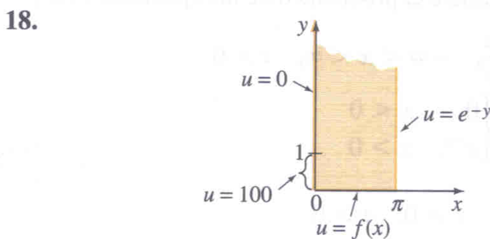


FIGURA 14.4.2 Placa del problema 18.

19. Utilice el resultado $\mathscr{F}\{e^{-x^2/4p^2}\} = 2\sqrt{\pi}pe^{-p^2\alpha^2}$ para resolver el problema con valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

20. Si $\mathscr{F}\{f(x)\} = F(\alpha)$ y $\mathscr{F}\{g(x)\} = G(\alpha)$, entonces el **teorema de convolución** para la transformada de Fourier está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau)\, d\tau = \mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)G(\alpha)\}.$$

Utilice este resultado y $\mathscr{F}\{e^{-x^2/4p^2}\} = 2\sqrt{\pi}pe^{-p^2\alpha^2}$ para demostrar que una solución del problema con valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

es $$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-(x-\tau)^2/4kt}\, d\tau.$$

21. Utilice la transformada $\mathscr{F}\{e^{-x^2/4p^2}\}$ dada en el problema 19 para determinar la temperatura de estado estable en la banda infinita que se muestra en la figura 14.4.3.

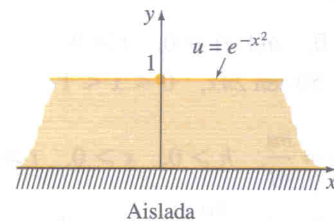


FIGURA 14.4.3 Banda infinita del problema 21.

22. La solución del problema 14 se puede integrar. Use los elementos 42 y 43 de la tabla del apéndice III para demostrar que

$$u(x, y) = \frac{100}{\pi}\left[\arctan\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{y} - \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{y}\right].$$

23. Utilice la solución dada en el problema 20 para rescribir la solución del ejemplo 1 en una forma integral alternativa. Después utilice el cambio de variable $v = (x - \tau)/2\sqrt{kt}$ y los resultados del problema 9 de los ejercicios 14.1 para demostrar que la solución del ejemplo 1 se puede expresar como

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{kt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{kt}}\right)\right].$$

Tarea para el laboratorio de computación

24. Suponga que $u_0 = 100$ y que $k = 1$ en la solución del problema 23. Utilice un SAC para trazar la gráfica de $u(x, t)$ sobre una región rectangular definida por $-4 \le x \le 4$, $0 \le t \le 6$. Use una gráfica en dos dimensiones para sobreponer las gráficas de $u(x, t)$ para $t = 0.05, 0.125, 0.5, 1, 2, 4, 6$ y 15 en el intervalo $[-4, 4]$. Utilice las gráficas para inferir los valores de $\lim_{t\to\infty} u(x, t)$ y $\lim_{x\to\infty} u(x, t)$. Después demuestre estos resultados analíticamente usando las propiedades de $\operatorname{erf}(x)$.

REPASO DEL CAPÍTULO 14

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-24.

En los problemas 1 a 16 resuelva el problema con valores en la frontera dado, mediante una transformada integral adecuada. Donde sea necesario haga suposiciones acerca de los acotamientos.

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0, \quad 0 < y < \pi$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad 0 < y < \pi$

$u(x, 0) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi} = e^{-x}, \quad x > 0$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$

$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$

$u(x, 0) = 50 \operatorname{sen} 2\pi x, \quad 0 < x < 1$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad h > 0, \quad x > 0, \quad t > 0$

$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0$

$u(x, 0) = u_0, \quad x > 0$

4. $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$

$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad x > 0, \quad t > 0$

$u(0, t) = t, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0$

$u(x, 0) = 0, \quad x > 0$ [*Sugerencia*: Utilice el teorema 7.4.2.]

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$

$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$

$u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -\operatorname{sen} \pi x, \quad 0 < x < 1$

7. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ u_0, & 0 < x < \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y > 0$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = \begin{cases} 0, & 0 < y < 1 \\ 1, & 1 < y < 2 \\ 0, & y > 2 \end{cases}$$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < \pi$

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$

$$u(0, y) = \begin{cases} 50, & 0 < y < 1 \\ 0, & y > 1 \end{cases}$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 100, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$

$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1$

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0, \quad 0 < y < \pi$

$u(0, y) = A, \quad 0 < y < \pi$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi} = Be^{-x}, \quad x > 0$

12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$

$u(0, t) = u_0, \quad u(1, t) = u_0, \quad t > 0$

$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1$

[*Sugerencia*: Utilice la identidad

$$\operatorname{senh}(x - y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y,$$

y después utilice el problema 6 de los ejercicios 14.1.]

13. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad x > 0, \quad t > 0$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -50, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 100, \quad t > 0$

$u(x, 0) = 100, \quad x > 0$

15. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad x > 0, \quad t > 0$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t > 0$

$u(x, 0) = e^{-x}, \quad x > 0$

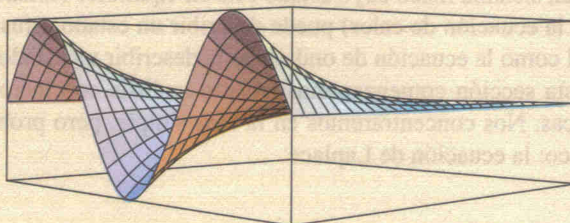
16. Demuestre que una solución de un PVF

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < 1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad u(x, 1) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

es $u(x, y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)\, \frac{\cosh \alpha y \cos \alpha(t - x)}{\cosh \alpha}\, dt\, d\alpha.$

15 SOLUCIONES NUMÉRICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES



En la sección 9.5 vimos que una forma de aproximar una solución de un problema con valores en la frontera de segundo orden es trabajar sustituyendo la ecuación diferencial ordinaria por una ecuación en diferencias finitas. La ecuación en diferencias se construyó reemplazando las derivadas d^2y/dx^2 y dy/dx por cocientes de diferencias. El mismo concepto se aplica a problemas con valores en la frontera donde intervienen ecuaciones diferenciales parciales. En las secciones subsecuentes de este capítulo formularemos una ecuación en diferencias para reemplazar la ecuación de Laplace, la ecuación de calor y la ecuación de onda al reemplazar las derivadas parciales $\partial^2u/\partial x^2$, $\partial^2u/\partial y^2$, $\partial^2u/\partial t^2$ y $\partial u/\partial t$, por cocientes de diferencias.

15.1 ECUACIÓN DE LAPLACE

REPASO DE MATERIAL

- Secciones 9.5, 12.1, 12.2 y 12.5.

INTRODUCCIÓN En la sección 12.1 vimos que las EDP de segundo orden de dos variables independientes se clasifican como *elípticas*, *parabólicas* e *hiperbólicas*. En general, las EDP sólo implican derivadas parciales respecto a las variables espaciales y por tanto, las soluciones de esas ecuaciones sólo se determinan por las condiciones en la frontera. Las ecuaciones parabólicas e hiperbólicas involucran derivadas parciales respecto a las variables espaciales así como al tiempo, por lo que las soluciones de esas ecuaciones generalmente se determinan a partir de las condiciones de frontera e iniciales. Una solución de una EDP elíptica (tal como la ecuación de Laplace) puede describir un sistema físico cuyo estado está en equilibrio (estado estable); una solución de una EDP (tal como la ecuación de calor) puede describir un estado difusional, mientras que una EDP hiperbólica (tal como la ecuación de onda) puede describir un estado vibracional.

En esta sección comenzaremos nuestro análisis con métodos aproximados para las ecuaciones elípticas. Nos concentraremos en la más simple, pero probablemente más importante EDP de tipo elíptico: la ecuación de Laplace.

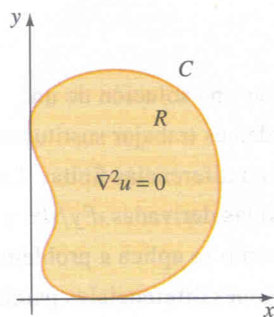


FIGURA 15.1.1 Región plana R con frontera C.

REEMPLAZO POR UNA ECUACIÓN DE DIFERENCIAS Suponga que estamos buscando una solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

en una región plana R que está acotada por alguna curva C. Véase la figura 15.1.1. Al igual que en la sección (6) de la sección 9.5, utilizando diferencias centrales

$$u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y) \quad \text{y} \quad u(x, y + h) - 2u(x, y) + u(x, y - h),$$

se pueden obtener aproximaciones para las segundas derivadas parciales u_{xx} y u_{yy} utilizando cocientes de diferencias

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y)] \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x, y + h) - 2u(x, y) + u(x, y - h)]. \tag{3}$$

Si sumamos (2) y (3) obtendremos una **aproximación con cinco puntos** del Laplaciano:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x + h, y) + u(x, y + h) + u(x - h, y) + u(x, y - h) - 4u(x, y)].$$

Por tanto, podemos reemplazar la ecuación de Laplace (1) por la ecuación en diferencias

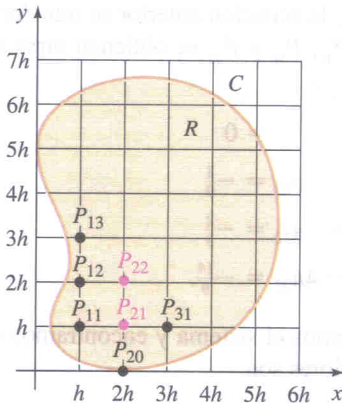
$$u(x + h, y) + u(x, y + h) + u(x - h, y) + u(x, y - h) - 4u(x, y) = 0. \tag{4}$$

Si adoptamos la notación $u(x, y) = u_{ij}$ y

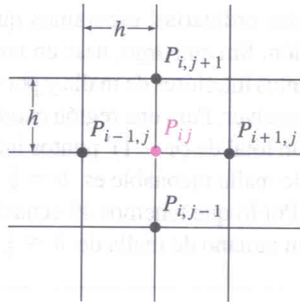
$$u(x + h, y) = u_{i+1,j}, \quad u(x, y + h) = u_{i,j+1}$$
$$u(x - h, y) = u_{i-1,j}, \quad u(x, y - h) = u_{i,j-1},$$

entonces la ecuación (4) se convierte en

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = 0. \tag{5}$$



a)



b)

FIGURA 15.1.2 Malla rectangular sobrepuesta sobre la región R.

Para comprender mejor la ecuación (5), supongamos que se coloca sobre una región R una rejilla rectangular formada por rectas horizontales espaciadas h unidades y rectas verticales espaciadas h unidades. El número h se llama **tamaño de la malla**. Véase la figura 15.1.2a. Los puntos de intersección sobre las rectas $P_{ij} = P(ih, jh)$, con i y j enteros, se llaman **puntos de la malla** o **puntos de la red**. Un punto de la malla es un **punto interior** si sus cuatro puntos de la malla vecinos más cercanos son puntos de R. Los puntos en R o en C que no son puntos interiores se llaman **puntos frontera**. Por ejemplo, en la figura 15.1.2a tenemos que

$$P_{20} = P(2h, 0), \qquad P_{11} = P(h, h), \qquad P_{21} = P(2h, h), \qquad P_{22} = P(2h, 2h),$$

etcétera. De los puntos que se indican, P_{21} y P_{22} son puntos interiores, mientras que P_{20} y P_{11} son puntos frontera. En la figura 15.1.2a los puntos interiores se muestran en rojo y los puntos frontera se muestran en negro. Ahora de la ecuación (5), se ve que

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left[u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} \right], \tag{6}$$

por lo que, como se puede ver en la figura 15.1.2b, el valor de u_{ij} en un punto de malla interior de R es el promedio de los valores de u en cuatro puntos de malla vecinos. Los puntos vecinos $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$, $P_{i-1,j}$ y $P_{i,j-1}$ corresponden a los cuatro puntos de una brújula E, N, O y S, respectivamente.

PROBLEMA DE DIRICHLET Recuerde que en el **problema de Dirichlet** para la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ los valores de $u(x, y)$ están determinados en la frontera de una región R. La idea básica es determinar una solución aproximada de la ecuación de Laplace en puntos de malla interiores, reemplazando la ecuación diferencial parcial en estos puntos por la ecuación en diferencias (5). Por tanto, los valores aproximados de u en los puntos de malla, en particular, los u_{ij}, se relacionan entre sí y posiblemente con valores conocidos de u si un punto de malla está en la frontera. De esta manera se obtiene un sistema de ecuaciones lineales algebraicas que se resuelve para determinar la incógnita u_{ij}. El siguiente ejemplo ilustra el método para una región cuadrada.

EJEMPLO 1 Revisión de un PVF

En el problema 16 de los ejercicios 12.5 se pidió al lector resolver el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 2$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = y(2 - y), \quad 0 < y < 2$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2. \end{cases}$$

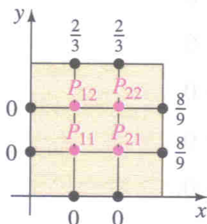


FIGURA 15.1.3 Región cuadrada R del ejemplo 1.

utilizando el principio de superposición. Para aplicar el método numérico del que nos ocupamos comencemos con un tamaño de malla de $h = \frac{2}{3}$. Como vemos en la figura 15.1.3, esa opción produce cuatro puntos interiores y ocho puntos frontera. Los números que se enlistan junto a los puntos frontera son los valores exactos de u, obtenidos con la condición especificada a lo largo de esa frontera. Por ejemplo, en $P_{31} = P(3h, h) = P(2, \frac{2}{3})$ se tiene $x = 2$ y $y = \frac{2}{3}$, por lo que la condición $u(2, y)$ da $u(2, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}(2 - \frac{2}{3}) = \frac{8}{9}$. Del mismo modo, en $P_{13} = P(\frac{2}{3}, 2)$ la condición $u(x,2)$ produce $u(\frac{2}{3}, 2) = \frac{2}{3}$. Ahora aplicamos la ecuación (5) en cada punto interior. Por ejemplo, en P_{11} tenemos $i = 1$ y $j = 1$, por lo que la ecuación (5) se convierte en

$$u_{21} + u_{12} + u_{01} + u_{10} - 4u_{11} = 0.$$

Puesto que $u_{01} = u(0, \frac{2}{3}) = 0$ y $u_{10} = u(\frac{2}{3}, 0) = 0$, la ecuación anterior se transforma en $-4u_{11} + u_{21} + u_{12} = 0$. Si esto se repite en P_{21}, P_{12} y P_{22} se obtienen otras tres ecuaciones más:

$$\begin{aligned} -4u_{11} + u_{21} + u_{12} \qquad &= 0 \\ u_{11} - 4u_{21} + \qquad u_{22} &= -\tfrac{8}{9} \\ u_{11} \qquad - 4u_{12} + u_{22} &= -\tfrac{2}{3} \\ u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= -\tfrac{14}{9}. \end{aligned} \tag{7}$$

Con un sistema algebraico computarizado resolvemos el sistema y encontramos que los valores aproximados en los cuatro puntos interiores son

$$u_{11} = \frac{7}{36} = 0.1944, \quad u_{21} = \frac{5}{12} = 0.4167, \quad u_{12} = \frac{13}{36} = 0.3611, \quad u_{22} = \frac{7}{12} = 0.5833. \quad ■$$

Como en el análisis de las ecuaciones diferenciales ordinarias, esperamos que un valor menor de h mejore la exactitud de la aproximación. Sin embargo, usar un tamaño menor de malla significa, por supuesto, que hay más puntos interiores de malla y por tanto hay un sistema de ecuaciones mucho más grande para resolver. Para una región *cuadrada* de lado L, un tamaño de malla de $h = L/n$ produciría un total de $(n-1)^2$ puntos interiores de malla. En el ejemplo 1, para $n = 8$, un tamaño de malla razonable es $h = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, pero el número de puntos interiores es $(8-1)^2 = 49$. Por lo que tenemos 49 ecuaciones con 49 incógnitas. En el siguiente ejemplo usaremos un tamaño de malla de $h = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 2 Ejemplo 1 con más puntos de malla

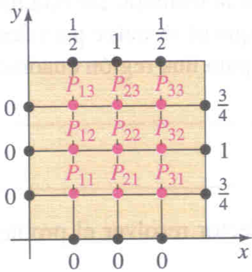


FIGURA 15.1.4 Región R del ejemplo 1 con más puntos de malla.

Como se muestra en la figura 15.1.4, con $n = 4$, un tamaño de malla $h = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ para el cuadrado del ejemplo 1 da $3^2 = 9$ puntos interiores de malla. Aplicando la ecuación (5) en esos puntos y utilizando las condiciones en la frontera indicadas, se obtienen nueve ecuaciones con nueve incógnitas. Para que pueda verificar estos resultados presentaremos el sistema en su forma no simplificada:

$$\begin{aligned} u_{21} + u_{12} + 0 + 0 - 4u_{11} &= 0 \\ u_{31} + u_{22} + u_{11} + 0 - 4u_{21} &= 0 \\ \tfrac{3}{4} + u_{32} + u_{21} + 0 - 4u_{31} &= 0 \\ u_{22} + u_{13} + u_{11} + 0 - 4u_{12} &= 0 \\ u_{32} + u_{23} + u_{12} + u_{21} - 4u_{22} &= 0 \\ 1 + u_{33} + u_{22} + u_{31} - 4u_{32} &= 0 \\ u_{23} + \tfrac{1}{2} + 0 + u_{12} - 4u_{13} &= 0 \\ u_{33} + 1 + u_{13} + u_{22} - 4u_{23} &= 0 \\ \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} + u_{23} + u_{32} - 4u_{33} &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

En este caso con un SAC se obtiene

$$u_{11} = \frac{7}{64} = 0.1094, \quad u_{21} = \frac{51}{224} = 0.2277, \quad u_{31} = \frac{177}{448} = 0.3951$$

$$u_{12} = \frac{47}{224} = 0.2098, \quad u_{22} = \frac{13}{32} = 0.4063, \quad u_{32} = \frac{135}{224} = 0.6027$$

$$u_{13} = \frac{145}{448} = 0.3237, \quad u_{23} = \frac{131}{224} = 0.5848, \quad u_{33} = \frac{39}{64} = 0.6094. \quad ■$$

Después de simplificar las ecuaciones (8), es interesante hacer notar que la matriz de coeficientes 9×9 es

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Este es un ejemplo de una **matriz dispersa** en la que un gran porcentaje de los elementos son cero. También la matriz (9) es un ejemplo de **matriz banda**. Esta clase de matrices se caracterizan por la propiedad de que los elementos de la diagonal principal y en las diagonales (o bandas) paralelas a la principal, todos son distintos de cero.

ITERACIÓN DE GAUSS-SEIDEL Los problemas que requieren aproximaciones a soluciones de ecuaciones diferenciales parciales invariablemente conducen a grandes sistemas de ecuaciones algebraicas lineales. No es raro tener que resolver sistemas de cientos de ecuaciones. Aunque un método directo de solución tal como la eliminación de Gauss deja inalterados los elementos cero fuera de las bandas de una matriz como la (9), se llenan las posiciones entre las bandas con elementos distintos de cero. Debido a que para almacenar matrices muy grandes se usa gran parte de la memoria de la computadora, se acostumbra resolver los sistemas grandes en una forma indirecta. Un método indirecto muy popular se llama **iteración de Gauss-Seidel**.

Ilustraremos este método para el sistema de las ecuaciones (7). Para simplificar reemplazaremos las variables con doble subíndice u_{11}, u_{21}, u_{12} y u_{22} por x_1, x_2, x_3 y x_4, respectivamente.

EJEMPLO 3 Iteración de Gauss-Seidel

Paso 1: *Despeje de cada ecuación las variables en la diagonal principal del sistema.* Esto es, en el sistema (7) se despeja x_1 de la primera ecuación, x_2 de la segunda y así sucesivamente:

$$\begin{aligned} x_1 &= \phantom{0.25x_1 +{}} 0.25x_2 + 0.25x_3 \\ x_2 &= 0.25x_1 + \phantom{0.25x_2 + 0.25x_3 +{}} 0.25x_4 + 0.2222 \\ x_3 &= 0.25x_1 + \phantom{0.25x_2 + 0.25x_3 +{}} 0.25x_4 + 0.1667 \\ x_4 &= \phantom{0.25x_1 +{}} 0.25x_2 + 0.25x_3 + 0.3889. \end{aligned} \tag{10}$$

Estas ecuaciones se pueden obtener en forma directa usando la ecuación (6) más que la (5) en los puntos interiores.

Paso 2: *Iteraciones.* Se comienza haciendo una aproximación inicial para los valores de x_1, x_2, x_3 y x_4. Si fuera un sistema de ecuaciones lineales y no supiéramos nada sobre la solución, podríamos iniciar con $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Pero puesto que la solución de (10) representa aproximaciones a una solución de un problema con valores en la frontera, parecería razonable utilizar como valores aproximados para los valores de $x_1 = u_{11}$, $x_2 = u_{21}$, $x_3 = u_{12}$ y $x_4 = u_{22}$ el promedio de todas las condiciones en la frontera. En este caso, el promedio de los números de los ocho puntos frontera que se muestran en la figura 15.1.3 es aproximadamente 0.4. Por tanto, nuestra estimación inicial será $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.4$ y $x_4 = 0.4$. En las iteraciones con el método de Gauss-Seidel se usan los valores de x tan pronto como

se calculan. Observe que la primera ecuación en (10) sólo depende de x_2 y de x_3; por lo que al sustituir $x_2 = 0.4$ y $x_3 = 0.4$, se obtiene $x_1 = 0.2$. Puesto que la segunda y tercera ecuaciones dependen de x_1 y x_4, se usan los valores recién calculados $x_1 = 0.2$ y $x_4 = 0.4$ para obtener $x_2 = 0.3722$ y $x_3 = 0.3167$. La cuarta ecuación depende de x_2 y x_3, por lo que se usan los nuevos valores $x_2 = 0.3722$ y $x_3 = 0.3167$ para obtener $x_4 = 0.5611$. En resumen, con la primera iteración se han obtenido los valores

$$x_1 = 0.2, \qquad x_2 = 0.3722, \qquad x_3 = 0.3167, \qquad x_4 = 0.5611.$$

Observe lo cerca que están esos números de los valores reales que se mencionan al final del ejemplo 1.

La segunda iteración comienza sustituyendo $x_2 = 0.3722$ y $x_3 = 0.3167$ en la primera ecuación. El resultado es $x_1 = 0.1722$. A partir de $x_1 = 0.1722$ y del último valor calculado de x_4 (en particular, $x_4 = 0.5611$), los resultados para la segunda y la tercera ecuación son, respectivamente, $x_2 = 0.4055$ y $x_3 = 0.3500$. Utilizando estos dos valores, encontramos de la cuarta ecuación que $x_4 = 0.5678$. Al final de la segunda iteración tenemos que

$$x_1 = 0.1722, \qquad x_2 = 0.4055, \qquad x_3 = 0.3500, \qquad x_4 = 0.5678.$$

En la tabla 15.1 se pueden ver los resultados de la tercera a la séptima iteración.

TABLA 15.1

Iteración	3a.	4a.	5a.	6a.	7a.
x_1	0.1889	0.1931	0.1941	0.1944	0.1944
x_2	0.4139	0.4160	0.4165	0.4166	0.4166
x_3	0.3584	0.3605	0.3610	0.3611	0.3611
x_4	0.5820	0.5830	0.5833	0.5833	0.5833

■

NOTA Para aplicar la iteración de Gauss-Seidel a un sistema general de n ecuaciones lineales con n incógnitas, la variable x_i debe aparecer realmente en la i-ésima ecuación del sistema. Además, después de despejar x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ de cada ecuación, el sistema resultante tiene la forma $\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{B}$, donde todos los elementos de la diagonal principal de $\mathbf{A}$ son cero.

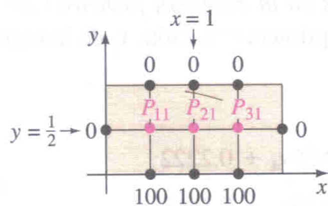


FIGURA 15.1.5 Región rectangular R.

COMENTARIOS

i) En los ejemplos presentados en esta sección se determinaron los valores de u_{ij} usando valores conocidos de u en los puntos frontera. ¿Pero qué se hace si la región es tal que los puntos frontera no coinciden con la frontera real C de la región R? En este caso, los valores buscados se pueden obtener por interpolación.

ii) En ocasiones es posible bajar la cantidad de ecuaciones a resolver usando simetrías. Consideremos la región rectangular $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$, que se muestra en la figura 15.1.5. Las condiciones en la frontera son $u = 0$ a lo largo de las fronteras $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$ y $u = 100$ a lo largo de $y = 0$. La región es simétrica respecto a las rectas $x = 1$ y $y = \frac{1}{2}$, y los puntos interiores P_{11} y P_{31} equidistan de los puntos frontera vecinos en los que son iguales los valores especificados de u. En consecuencia, suponemos que $u_{11} = u_{31}$, por lo que el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se reduce a dos ecuaciones con dos incógnitas. Véase el problema 2 de los ejercicios 15.1.

iii) En el contexto de la aproximación de una solución de la ecuación de Laplace, la técnica de iteración que se ilustra en el ejemplo 3 con frecuencia se conoce como el **método de Liebman**.

iv) Aunque en una computadora lo siguiente podría pasar inadvertido, puede ser que la convergencia de la iteración de Gauss-Seidel o método de Liebman no sea particularmente rápida. También, en un caso más general, puede ser que esa iteración no converja. Para condiciones que son suficientes para garantizar la convergencia de la iteración de Gauss-Seidel, se le pide que consulte libros de métodos numéricos.

EJERCICIOS 15.1 *Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-24.*

En los problemas 1 a 8 utilice una computadora como ayuda.

En los problemas 1 a 4 utilice la ecuación (5) para aproximar la solución de la ecuación de Laplace en los puntos interiores de la región dada. Cuando sea posible, considere simetría.

1. $u(0, y) = 0, \quad u(3, y) = y(2 - y), \quad 0 < y < 2$
$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = x(3 - x), \quad 0 < x < 3$
tamaño de malla: $h = 1$

2. $u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = 0, \quad 0 < y < 1$
$u(x, 0) = 100, \quad u(x, 1) = 0, \quad 0 < x < 2$
tamaño de malla: $h = \frac{1}{2}$

3. $u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0, \quad 0 < y < 1$
$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 < x < 1$
tamaño de malla: $h = \frac{1}{3}$

4. $u(0, y) = 108y^2(1 - y), \quad u(1, y) = 0, \quad 0 < y < 1$
$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0, \quad 0 < x < 1$
tamaño de malla: $h = \frac{1}{3}$

En los problemas 5 y 6 utilice la ecuación (6) y la iteración de Gauss-Seidel para aproximar la solución de la ecuación de Laplace en los puntos interiores de un cuadro unitario. Utilice el tamaño de malla $h = \frac{1}{4}$. En el problema 5, las condiciones en la frontera están dadas; en el problema 6 los valores de u en los puntos frontera se presentan en la figura 15.1.6.

5. $u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 100y, \quad 0 < y < 1$
$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 100x, \quad 0 < x < 1$

6.

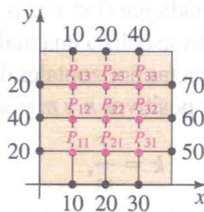


FIGURA 15.1.6 Región del problema 6.

7. a) En el problema 12 de los ejercicios 12.6 resolvió un problema de potencial usando una forma especial de la ecuación de Poisson $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$. Demuestre que la ecuación que la sustituye es

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = h^2 f(x, y).$$

b) Utilice el resultado del inciso a) para aproximar la solución de la ecuación de Poisson $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$ en los puntos interiores de la figura 15.1.7. El tamaño de malla es $h = \frac{1}{2}$, $u = 1$ en cada punto a lo largo de $ABCD$ y $u = 0$ en cada punto a lo largo de $DEFGA$. Utilice la simetría y, si es necesario, la iteración de Gauss-Seidel.

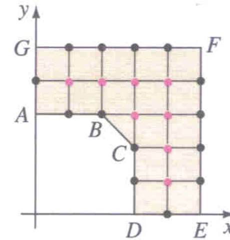


FIGURA 15.1.7 Región del problema 7.

8. Utilice el resultado del inciso a) del problema 7 para aproximar la solución de la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -64$$

en los puntos interiores de la región en la figura 15.1.8. El tamaño de malla es $h = \frac{1}{8}$ y $u = 0$ en todos los puntos de la frontera de la región. Si es necesario, utilice la iteración de Gauss-Seidel.

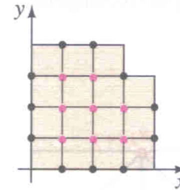


FIGURA 15.1.8 Región del problema 8.

15.2 ECUACIÓN DE CALOR

REPASO DE MATERIAL

- Secciones 9.5, 12.1, 12.2, 12.3 y 15.1.

INTRODUCCIÓN La idea básica en el análisis que se presenta a continuación es la misma que en la sección 15.1: Aproximamos una solución de la EDP, esta vez una EDP parabólica, sustituyendo la ecuación con una ecuación en diferencias finitas. Pero a diferencia de la sección anterior consideraremos *dos* métodos de aproximación para las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas: uno llamado *método explícito* y el otro llamado *método implícito*.

Con objeto de definirlos consideraremos sólo la ecuación unidimensional de transmisión de calor.

REEMPLAZO POR UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS Para aproximar una solución $u(x, t)$ de una ecuación unidimensional de transmisión de calor

$$c\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

nuevamente reemplazaremos cada derivada por un cociente de diferencias. Utilizando la aproximación por diferencias centrales (2) de la sección 15.1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)]$$

y la aproximación por diferencias hacia adelante (3) de la sección 9.5.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{h}[u(x, t + h) - u(x, t)]$$

la ecuación (1) se convierte en

$$\frac{c}{h^2}[u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)] = \frac{1}{k}[u(x, t + k) - u(x, t)]. \tag{2}$$

Si hacemos $\lambda = ck/h^2$ y

$$u(x, t) = u_{ij}, \quad u(x + h, t) = u_{i+1,\,j}, \quad u(x - h, t) = u_{i-1,\,j}, \quad u(x, t + k) = u_{i,\,j+1},$$

entonces, después de simplificar, la ecuación (2) es

$$u_{i,\,j+1} = \lambda u_{i+1,\,j} + (1 - 2\lambda)\,u_{ij} + \lambda u_{i-1,\,j}. \tag{3}$$

En el caso de la ecuación de calor (1), las condiciones en la frontera típicas son $u(0, t) = u_1$, $u(a, t) = u_2$, $t > 0$ y una condición inicial es $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < a$. La función f se puede interpretar como la distribución de temperatura inicial de temperaturas en una varilla homogénea que va de $x = 0$ a $x = a$; u_1 y u_2 se pueden interpretar como las temperaturas constantes en los puntos extremos de la varilla. Aunque no lo demostraremos, este problema con valores en la frontera que consiste en la ecuación (1), de estas dos condiciones en la frontera y de una condición inicial, tiene una solución única cuando f es continua en el intervalo cerrado $[0, a]$. Se supondrá esta última condición por lo que reemplazaremos la condición inicial por $u(x, 0) = f(x)$, $0 \le x \le a$. Además, en lugar de trabajar con la región semiinfinita en el plano xt definida por las desigualdades $0 \le x \le a$, $t \ge 0$, utilizaremos una región rectangular definida por $0 \le x \le a$, $0 \le t \le T$, donde T es un valor específico del tiempo. Sobre esta región se coloca una malla rectangular formada por rectas verticales distanciadas h unidades y rectas horizontales distanciadas k unidades. Véase la figura 15.2.1. Si se eligen dos enteros positivos n y m y se define

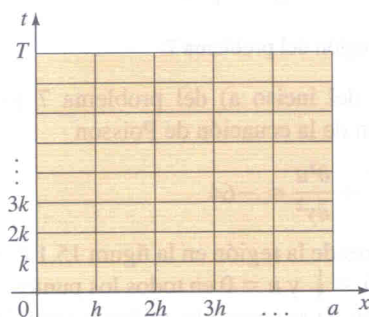


FIGURA 15.2.1 Región rectangular del plano xt.

$$h = \frac{a}{n} \qquad \text{y} \qquad k = \frac{T}{m},$$

entonces las rectas verticales y horizontales de la malla se definen por

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \qquad \text{y} \qquad t_j = jk, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

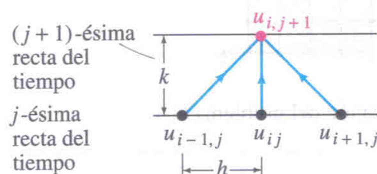


FIGURA 15.2.2 u en $t = j + 1$ se determina de los tres valores de u en $t = j$.

Como se muestra en la figura 15.2.2, la idea aquí es utilizar la fórmula (3) para estimar los valores de la solución $u(x, t)$ en los puntos de la recta del $(j + 1)$-ésimo tiempo usando sólo los valores de la recta del j-ésimo tiempo. Por ejemplo, los valores en la primera recta de tiempo $(j = 1)$ dependen de la condición inicial $u_{i,0} = u(x_i, 0) = f(x_i)$ que están en la recta del tiempo cero $(j = 0)$. A esta clase de procedimiento numérico se le llama **método explícito de diferencias finitas**.

EJEMPLO 1 Uso del método de diferencias finitas

Considere el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.5$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \le t \le 0.5$$

$$u(x, 0) = \text{sen}\, \pi x, \quad 0 \le x \le 1.$$

Primero identificamos $c = 1$, $a = 1$ y $T = 0.5$. Si elegimos, por ejemplo $n = 5$ y $m = 50$, entonces $h = 1/5 = 0.2$, $k = 0.5/50 = 0.01$, $\lambda = 0.25$,

$$x_i = i\frac{1}{5}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \qquad t_j = j\frac{1}{100}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, 50.$$

Por lo que la ecuación (3) se convierte en

$$u_{i,j+1} = 0.25(u_{i+1,j} + 2u_{ij} + u_{i-1,j}).$$

Haciendo $j = 0$ en esta fórmula, se obtiene una fórmula de las aproximaciones a la temperatura u en la primera recta del tiempo:

$$u_{i,1} = 0.25(u_{i+1,0} + 2u_{i,0} + u_{i-1,0}).$$

Entonces, si hacemos $i = 1, \ldots, 4$ en la última ecuación, se obtienen, respectivamente,

$$u_{11} = 0.25(u_{20} + 2u_{10} + u_{00})$$
$$u_{21} = 0.25(u_{30} + 2u_{20} + u_{10})$$
$$u_{31} = 0.25(u_{40} + 2u_{30} + u_{20})$$
$$u_{41} = 0.25(u_{50} + 2u_{40} + u_{30}).$$

La primera ecuación de esta lista se interpreta como

$$u_{11} = 0.25(u(x_2, 0) + 2u(x_1, 0) + u(0, 0))$$
$$= 0.25(u(0.4, 0) + 2u(0.2, 0) + u(0, 0)).$$

De la condición inicial $u(x, 0) = \text{sen}\,\pi x$ la última ecuación se convierte en

$$u_{11} = 0.25(0.951056516 + 2(0.587785252) + 0) = 0.531656755.$$

Este número representa una aproximación a la temperatura $u(0.2, 0.01)$.

Puesto que se requiere una larga tabla de más de 200 elementos para resumir todas las aproximaciones sobre una malla rectangular determinada por h y k, en la tabla 15.2 sólo presentamos algunos valores seleccionados.

TABLA 15.2 Aproximación explícita de la ecuación en diferencias con $h = 0.2$, $k = 0.001$, $\lambda = 0.025$.

Tiempo	$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$
0.00	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878
0.10	0.2154	0.3486	0.3486	0.2154
0.20	0.0790	0.1278	0.1278	0.0790
0.30	0.0289	0.0468	0.0468	0.0289
0.40	0.0106	0.0172	0.0172	0.0106
0.50	0.0039	0.0063	0.0063	0.0039

■

Debe comprobar, utilizando los métodos del capítulo 12, que la solución exacta del problema con valores en la frontera del ejemplo 1 está dada por $u(x, t) = e^{-\pi^2 t}\,\text{sen}\,\pi x$. Usando esta solución, comparamos en la tabla 15.3 una muestra de los valores reales con sus correspondientes aproximaciones.

TABLA 15.3

Real	Aproximado
$u(0.4, 0.05) = 0.5806$	$u_{25} = 0.5758$
$u(0.6, 0.06) = 0.5261$	$u_{36} = 0.5208$
$u(0.2, 0.10) = 0.2191$	$u_{1,10} = 0.2154$
$u(0.8, 0.14) = 0.1476$	$u_{4,14} = 0.1442$

ESTABILIDAD Estas aproximaciones son comparables con los valores exactos y tienen la precisión suficiente como para usarse en algunos casos. Pero este método tiene una dificultad. Recuerde que un método numérico es **inestable** si los errores de redondeo o de cualquier otra clase crecen con demasiada rapidez conforme avanzan los cálculos. El procedimiento numérico que se muestra en el ejemplo 1 puede presentar esta clase de comportamiento. Se puede demostrar que el procedimiento es estable si λ es menor o igual a 0.5 pero es inestable en cualquier otro caso. Para obtener $\lambda = 0.25 \leq 0.5$ en el ejemplo 1 tuvimos que elegir el valor de $k = 0.01$. La necesidad de

utilizar tamaños de paso muy pequeños en la dirección del tiempo es la falla principal de este método. Le sugerimos que trabaje con el problema 12 de los ejercicios 15.2 y verifique la inestabilidad predecible cuando $\lambda = 1$.

MÉTODO DE CRANK-NICHOLSON Hay **métodos implícitos de diferencias finitas** para resolver ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. Esos métodos requieren que se resuelva un sistema de ecuaciones para determinar los valores aproximados de u en la recta del $(j + 1)$-ésimo tiempo. Sin embargo, los métodos implícitos no tienen problemas de inestabilidad.

El algoritmo que introdujeron J. Crank y P. Nicholson en 1947, se usa más que nada para resolver la ecuación de calor. El algoritmo consiste en reemplazar la segunda derivada parcial en $c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ por un promedio de los cocientes en diferencias centrales, uno se evalúa en t y el otro en $t + k$:

$$\frac{c}{2}\left[\frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + \frac{u(x+h,t+k) - 2u(x,t+k) + u(x-h,t+k)}{h^2}\right] = \frac{1}{k}[u(x,t+k) - u(x,t)]. \tag{4}$$

Si de nuevo definimos a $\lambda = ck/h^2$, entonces, después de reordenar los términos, la ecuación (4) se puede escribir como

$$-u_{i-1,j+1} + \alpha u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i+1,j} - \beta u_{ij} + u_{i-1,j}, \tag{5}$$

donde $\alpha = 2(1 + 1/\lambda)$ y $\beta = 2(1 - 1/\lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, m - 1$, e $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Para cada elección de j la ecuación de diferencias (5) para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ da $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas $u_{i,j+1}$. Debido a las condiciones indicadas en la frontera, se conocen los valores de $u_{i,j+1}$ para $i = 0$ y para $i = n$. Por ejemplo, en el caso $n = 4$, el sistema de ecuaciones para determinar los valores aproximados de u en la recta del $(j + 1)$-ésimo tiempo es

$$\begin{aligned}
-u_{0,j+1} + \alpha u_{1,j+1} - u_{2,j+1} &= u_{2,j} - \beta u_{1,j} + u_{0,j}\\
-u_{1,j+1} + \alpha u_{2,j+1} - u_{3,j+1} &= u_{3,j} - \beta u_{2,j} + u_{1,j}\\
-u_{2,j+1} + \alpha u_{3,j+1} - u_{4,j+1} &= u_{4,j} - \beta u_{3,j} + u_{2,j}
\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}
\alpha u_{1,j+1} - u_{2,j+1} \qquad\qquad &= b_1\\
-u_{1,j+1} + \alpha u_{2,j+1} - u_{3,j+1} &= b_2\\
- u_{2,j+1} + \alpha u_{3,j+1} &= b_3,
\end{aligned} \tag{6}$$

donde

$$\begin{aligned}
b_1 &= u_{2,j} - \beta u_{1,j} + u_{0,j} + u_{0,j+1}\\
b_2 &= u_{3,j} - \beta u_{2,j} + u_{1,j}\\
b_3 &= u_{4,j} - \beta u_{3,j} + u_{2,j} + u_{4,j+1}.
\end{aligned}$$

En general, si usamos la ecuación en diferencias (5) para determinar valores de u en la recta del $(j + 1)$-ésimo tiempo, necesitamos resolver un sistema lineal $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es una **matriz tridiagonal**,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
\alpha & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0\\
-1 & \alpha & -1 & 0 & 0 & & & 0\\
0 & -1 & \alpha & -1 & 0 & & & 0\\
0 & 0 & -1 & \alpha & -1 & & & 0\\
\vdots & & & & & \ddots & & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \alpha & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \alpha
\end{pmatrix},$$

y los elementos de la matriz columna **B** son

$$b_1 = u_{2,j} - \beta u_{1,j} + u_{0,j} + u_{0,j+1}$$
$$b_2 = u_{3,j} - \beta u_{2,j} + u_{1,j}$$
$$b_3 = u_{4,j} - \beta u_{3,j} + u_{2,j}$$
$$\vdots$$
$$b_{n-1} = u_{n,j} - \beta u_{n-1,j} + u_{n-2,j} + u_{n,j+1}.$$

EJEMPLO 2 Uso del método de Crank-Nicholson

Utilice el método de Crank-Nicholson para aproximar la solución del problema con valores en la frontera

$$0.25\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 2, \quad 0 < t < 0.3$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, \quad 0 \le t \le 0.3$$
$$u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \le x \le 2,$$

utilizando $n = 8$ y $m = 30$.

SOLUCIÓN Identificando $a = 2$, $T = 0.3$, $h = \frac{1}{4} = 0.25$, $k = \frac{1}{100} = 0.01$, y $c = 0.25$ se obtiene $\lambda = 0.04$. Con ayuda de una computadora se obtienen los resultados de la tabla 15.4. Como ejemplo, los elementos de esta tabla representan una cantidad seleccionada de las 210 aproximaciones sobre la malla rectangular determinada por h y k.

TABLA 15.4 Método de Crank-Nicholson con $h = 0.025$, $k = 0.01$ y $\lambda = 0.25$.

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.00	0.7071	1.0000	0.7071	0.0000	−0.7071	−1.0000	−0.7071
0.05	0.6289	0.8894	0.6289	0.0000	−0.6289	−0.8894	−0.6289
0.10	0.5594	0.7911	0.5594	0.0000	−0.5594	−0.7911	−0.5594
0.15	0.4975	0.7036	0.4975	0.0000	−0.4975	−0.7036	−0.4975
0.20	0.4425	0.6258	0.4425	0.0000	−0.4425	−0.6258	−0.4425
0.25	0.3936	0.5567	0.3936	0.0000	−0.3936	−0.5567	−0.3936
0.30	0.3501	0.4951	0.3501	0.0000	−0.3501	−0.4951	−0.3501

■

TABLA 15.5

Real	Aproximado
$u(0.75, 0.05) = 0.6250$	$u_{35} = 0.6289$
$u(0.50, 0.20) = 0.6105$	$u_{2,20} = 0.6259$
$u(0.25, 0.10) = 0.5525$	$u_{1,10} = 0.5594$

Al igual que en el ejemplo 1, el problema con valores en la frontera del ejemplo 2 tiene una solución exacta dada por $u(x, t) = e^{-\pi^2 t/4} \operatorname{sen} \pi x$. Las comparaciones de la muestra se listan en la tabla 15.5 donde se ve que los errores absolutos son del orden 10^{-2} o 10^{-3}. Se pueden obtener errores más pequeños disminuyendo ya sea h o k.

EJERCICIOS 15.2 *Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-25.*

En los problemas 1 a 12 utilice una computadora como ayuda.

1. Utilice la ecuación en diferencias (3) para aproximar la solución del problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 2, \quad 0 < t < 1$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, \quad 0 \le t \le 1$$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Utilice $n = 8$ y $m = 40$.

2. Utilizando la solución en serie de Fourier que se obtuvo en el problema 1 de los ejercicios 12.3, con $L = 2$, se pueden sumar los 20 primeros términos para estimar los valores de $u(0.25, 0.1)$, $u(1, 0.5)$ y $u(1.5, 0.8)$, de la solución $u(x, t)$ del problema 1 anterior. Un alumno escribió un programa de cómputo para hacer esto y obtuvo los resultados $u(0.25, 0.1) = 0.3794$, $u(1, 0.5) = 0.1854$ y $u(1.5, 0.8) = 0.0623$. Suponga que estos valores son precisos con todos los decimales dados. Compare estos valores con las aproximaciones obtenidas en el problema 1 anterior. Encuentre los errores absolutos en cada caso.

3. Resuelva el problema 1 con el método de Crank-Nicholson con $n = 8$ y $m = 40$. Utilice los valores de $u(0.25, 0.1)$,

$u(1, 0.5)$ y $u(1.5, 0.8)$ que se dieron en el problema 2 para calcular los errores absolutos.

4. Repita el problema 1 usando $n = 8$ y $m = 20$. Utilice los valores de $u(0.25, 0.1)$, $u(1, 0.5)$ y $u(1.5, 0.8)$ mencionados en el problema 2 para calcular los errores absolutos. ¿Por qué son tan imprecisas las aproximaciones en este caso?

5. Resuelva el problema 1 con el método de Crank-Nicholson con $n = 8$ y $m = 20$. Utilice los valores de $u(0.25, 0.1)$, $u(1, 0.5)$ y $u(1.5, 0.8)$ dados en el problema 2 para calcular los errores absolutos. Compare estos errores con los obtenidos en el problema 4.

6. En la sección 12.2 se mostró que si una varilla de longitud L es de un material con conductividad térmica K, calor específico γ y densidad ρ, la temperatura $u(x, t)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{K}{\gamma\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < L.$$

Considere el problema con valores en la frontera consistente en la ecuación anterior y en las siguientes condiciones:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad 0 \le t \le 10$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \le x \le L.$$

Utilice la ecuación en diferencias (3) en esta sección, con $n = 10$ y $m = 10$, para aproximar la solución del problema con valores en la frontera cuando

a) $L = 20, K = 0.15, \rho = 8.0, \gamma = 0.11, f(x) = 30$

b) $L = 50, K = 0.15, \rho = 8.0, \gamma = 0.11, f(x) = 30$

c) $L = 20,\ K = 1.10,\ \rho = 2.7,\ \gamma = 0.22,$ $f(x) = 0.5x(20 - x)$

d) $L = 100, K = 1.04, \rho = 10.6, \gamma = 0.06,$

$$f(x) = \begin{cases} 0.8x, & 0 \le x \le 50 \\ 0.8(100 - x), & 50 < x \le 100 \end{cases}$$

7. Resuelva el problema 6 con el método de Crank-Nicholson con $n = 10$ y $m = 10$.

8. Repita el problema 6 para el caso en el que las temperaturas en los extremos son $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 20$, $0 \le t \le 10$.

9. Resuelva el problema 8 con el método de Crank-Nicholson.

10. Examine el problema con valores en la frontera del ejemplo 2. Suponga que $n = 4$.

a) Encuentre el nuevo valor de λ.

b) Utilice la ecuación en diferencias (5) de Crank-Nicholson para encontrar el sistema de ecuaciones para u_{11}, u_{21} y u_{31}, esto es, los valores aproximados de u en la primera recta de tiempo. [*Sugerencia*: Iguale $j = 0$ en la ecuación (5) y haga que i tome los valores 1, 2, 3.]

c) Resuelva el sistema de tres ecuaciones sin computadora. Compare sus resultados con los elementos correspondientes de la tabla 15.4.

11. Considere una varilla cuya longitud es $L = 20$ para la que $K = 1.05$, $\rho = 10.6$ y $\gamma = 0.056$. Suponga que

$$u(0, t) = 20, \qquad u(20, t) = 30$$

$$u(x, 0) = 50.$$

a) Utilice el método explicado en la sección 12.6 para encontrar la solución de estado estable $\psi(x)$.

b) Utilice el método de Crank-Nicholson para aproximar las temperaturas $u(x, t)$ para $0 \le t \le T_{\text{máx}}$. Seleccione un $T_{\text{máx}}$ lo suficientemente grande para permitir que las temperaturas se aproximen a sus valores de estado estable. Compare las aproximaciones para $t = T_{\text{máx}}$ con los valores de $\psi(x)$ que se encontraron en el inciso a).

12. Utilice la ecuación en diferencias (3) para aproximar la solución del problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \le t \le 1$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \le x \le 1.$$

Utilice $n = 5$ y $m = 25$.

15.3 ECUACIÓN DE ONDA

REPASO DE MATERIAL

- Secciones 9.5, 12.1, 12.2, 12.4 y 15.2.

INTRODUCCIÓN En esta sección aproximaremos una solución de la ecuación de onda unidimensional usando el método de diferencias finitas que hemos utilizado en las dos secciones anteriores. La ecuación de onda unidimensional es el modelo de una ecuación diferencial parcial hiperbólica.

REEMPLAZO POR UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS Suponga que $u(x, t)$ representa una solución de la ecuación de onda unidimensional

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Utilizando dos diferencias centrales,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{1}{k^2}[u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)],$$

sustituyendo la ecuación (1) por

$$\frac{c^2}{h^2}[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)] = \frac{1}{k^2}[u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)]. \quad (2)$$

Resolviendo la ecuación (2), se encuentra $u(x, t + k)$, que es $u_{i,j+1}$. Si $\lambda = ck/h$, entonces se puede expresar la ecuación (2) como

$$u_{i,j+1} = \lambda^2 u_{i+1,j} + 2(1-\lambda^2)u_{ij} + \lambda^2 u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \quad (3)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ y $j = 1, 2, \ldots, m - 1$.

En este caso, en el que la ecuación de onda (1) es un modelo para los desplazamientos verticales $u(x, t)$ de una cuerda vibrando, las condiciones en la frontera típicas son $u(0, t) = 0$, $u(a, t) = 0$, $t > 0$ y las condiciones iniciales son $u(x, 0) = f(x)$, $\partial u/\partial t|_{t=0} = g(x)$, $0 < x < a$. Las funciones f y g se pueden interpretar como la posición inicial y la velocidad inicial de la cuerda. El método numérico basado en la ecuación (3), al igual que el primer método explicado en la sección 15.2, es un método explícito de diferencias finitas. Como antes, usaremos la ecuación en diferencias para aproximar la solución $u(x, t)$ de (1), utilizando las condiciones frontera e iniciales, sobre una región rectangular en el plano xt definido por las desigualdades $0 \le x \le a$, $0 \le t \le T$, donde T es algún valor específico del tiempo. Si n y m son enteros positivos y

$$h = \frac{a}{n} \qquad \text{y} \qquad k = \frac{T}{m},$$

las rectas de la malla horizontales y verticales en esta región están definidas como

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \qquad \text{y} \qquad t_j = jk, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Como se muestra en la figura 15.3.1, la ecuación (3) nos permite obtener la aproximación $u_{i,j+1}$ en la recta del $(j + 1)$-ésimo tiempo a partir de los valores indicados en las rectas del j-ésimo y del $(j - 1)$-ésimo tiempos. Además, usaremos

$$u_{0,j} = u(0, jk) = 0, \qquad u_{n,j} = u(a, jk) = 0 \qquad \leftarrow \text{condición de frontera}$$

$$\text{y} \qquad u_{i,0} = u(x_i, 0) = f(x_i). \qquad \leftarrow \text{condiciones iniciales}$$

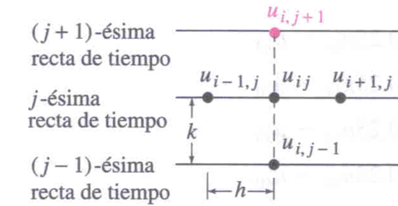


FIGURA 15.3.1 u en $t = j + 1$ se determina a partir de los tres valores de u en $t = j$ y un valor en $t = j - 1$.

Hay un pequeño problema para comenzar. En la ecuación (3) se puede ver que para $j = 1$ es necesario conocer los valores de $u_{i,1}$ (es decir, las estimaciones de u en la primer recta de tiempo) para determinar $u_{i,2}$. Pero en la figura 15.3.1, con $j = 0$, se ve que los valores de $u_{i,1}$ en la primer recta de tiempo dependen de los valores de $u_{i,0}$, en la recta cero de tiempo y de los valores de $u_{i,-1}$. Para calcular estos últimos valores, se utiliza la condición de la velocidad inicial $u_t(x, 0) = g(x)$. En $t = 0$ se tiene de la ecuación (5) de la sección 9.5 que

$$g(x_i) = u_t(x_i, 0) \approx \frac{u(x_i, k) - u(x_i, -k)}{2k}. \quad (4)$$

Para que tenga sentido el término $u(x_i, -k) = u_{i,-1}$ en la ecuación (4) tenemos que imaginar que $u(x, t)$ se prolonga hacia atrás en el tiempo. De la ecuación (4) se tiene que

$$u(x_i, -k) \approx u(x_i, k) - 2kg(x_i).$$

Este último resultado sugiere que se defina

$$u_{i,-1} = u_{i,1} - 2kg(x_i) \quad (5)$$

en la iteración de la ecuación (3). Sustituyendo la ecuación (5) en la ecuación (3), obtenemos el caso especial

$$u_{i,1} = \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) + (1-\lambda^2)u_{i,0} + kg(x_i). \quad (6)$$

EJEMPLO 1 Uso del método de diferencias finitas

Aproxime la solución del problema con valores en la frontera

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \le t \le 1$$

$$u(x, 0) = \text{sen}\, \pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1,$$

utilizando la ecuación (3) con $n = 5$ y $m = 20$.

SOLUCIÓN Identificando $c = 2$, $a = 1$ y $T = 1$. Con $n = 5$ y $m = 20$ se obtiene $h = \frac{1}{5} = 0.2$, $k = \frac{1}{20} = 0.05$, y $\lambda = 0.5$. Por lo que, con $g(x) = 0$, las ecuaciones (6) y (3) se convierten, respectivamente en

$$u_{i,1} = 0.125(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) + 0.75u_{i,0} \tag{7}$$

$$u_{i,j+1} = 0.25u_{i+1,j} + 1.5u_{ij} + 0.25u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \tag{8}$$

Para $i = 1, 2, 3, 4$, la ecuación (7) produce los siguientes valores de las $u_{i,1}$ en la primera recta del tiempo:

$$\begin{aligned} u_{11} &= 0.125(u_{20} + u_{00}) + 0.75u_{10} = 0.55972100 \\ u_{21} &= 0.125(u_{30} + u_{10}) + 0.75u_{20} = 0.90564761 \\ u_{31} &= 0.125(u_{40} + u_{20}) + 0.75u_{30} = 0.90564761 \\ u_{41} &= 0.125(u_{50} + u_{30}) + 0.75u_{40} = 0.55972100. \end{aligned} \tag{9}$$

Observe que los resultados dados en (9) se obtuvieron a partir de la condición inicial $u(x, 0) = \text{sen}\, \pi x$. Por ejemplo, $u_{20} = \text{sen}(0.2\pi)$, etcétera. Ahora haciendo $j = 1$ en la ecuación (8) se obtiene

$$u_{i,2} = 0.25u_{i+1,1} + 1.5u_{i,1} + 0.25u_{i-1,1} - u_{i,0},$$

por lo que para $i = 1, 2, 3, 4$, se obtienen

$$\begin{aligned} u_{12} &= 0.25u_{21} + 1.5u_{11} + 0.25u_{01} - u_{10} \\ u_{22} &= 0.25u_{31} + 1.5u_{21} + 0.25u_{11} - u_{20} \\ u_{32} &= 0.25u_{41} + 1.5u_{31} + 0.25u_{21} - u_{30} \\ u_{42} &= 0.25u_{51} + 1.5u_{41} + 0.25u_{31} - u_{40}. \end{aligned}$$

Utilizando las condiciones en la frontera, las condiciones iniciales y los datos obtenidos en (9), obtenemos de esas ecuaciones las aproximaciones de u para la segunda recta de tiempo. En la tabla 15.6 se presentan estos resultados y una síntesis de los cálculos restantes.

TABLA 15.6 Aproximación explícita por medio de la ecuación en diferencias con $h = 0.2$, $k = 0.05$, $\lambda = 0.5$.

Tiempo	$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$
0.00	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878
0.10	0.4782	0.7738	0.7738	0.4782
0.20	0.1903	0.3080	0.3080	0.1903
0.30	−0.1685	−0.2727	−0.2727	−0.1685
0.40	−0.4645	−0.7516	−0.7516	−0.4645
0.50	−0.5873	−0.9503	−0.9503	−0.5873
0.60	−0.4912	−0.7947	−0.7947	−0.4912
0.70	−0.2119	−0.3428	−0.3428	−0.2119
0.80	0.1464	0.2369	0.2369	0.1464
0.90	0.4501	0.7283	0.7283	0.4501
1.00	0.5860	0.9482	0.9482	0.5860

■

Con facilidad se comprueba que la solución exacta del problema en el ejemplo 1 es $u(x, t) = \operatorname{sen} \pi x \cos 2\pi t$. Con esta función podemos comparar los valores reales con las aproximaciones. Por ejemplo, en la tabla 15.7 se presentan algunas comparaciones seleccionadas. Como se puede ver en la tabla las aproximaciones están en la misma "zona" que los valores reales, pero la exactitud no es particularmente impresionante. Sin embargo, se pueden obtener resultados más exactos. La exactitud de este algoritmo depende de la elección de λ. Por supuesto, λ está determinada por la elección de los enteros n y m, que a su vez determinan los valores de los tamaños de paso h y k. Se puede demostrar que la mejor exactitud se obtiene siempre con este método cuando la proporción $\lambda = kc/h$ es igual a uno, en otras palabras, cuando el paso en la dirección del tiempo es $k = h/c$. Por ejemplo, si se eligen $n = 8$ y $m = 16$ se obtiene $h = \frac{1}{8}$, $k = \frac{1}{16}$, y $\lambda = 1$. Los valores que se presentan en la tabla 15.8 muestran con claridad la mejora en la exactitud.

TABLA 15.7

Real	Aproximado
$u(0.4, 0.25) = 0$	$u_{25} = 0.0185$
$u(0.6, 0.3) = -0.2939$	$u_{36} = -0.2727$
$u(0.2, 0.5) = -0.5878$	$u_{1,10} = -0.5873$
$u(0.8, 0.7) = -0.1816$	$u_{4,14} = -0.2119$

TABLA 15.8

Real	Aproximado
$u(0.25, 0.3125) = -0.2706$	$u_{25} = -0.2706$
$u(0.375, 0.375) = -0.6533$	$u_{36} = -0.6533$
$u(0.125, 0.625) = -0.2706$	$u_{1,10} = -0.2706$

ESTABILIDAD En conclusión, observamos que este método explícito de diferencias finitas para la ecuación de onda es estable cuando $\lambda \leq 1$ e inestable cuando $\lambda > 1$.

EJERCICIOS 15.3

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-28.

En los problemas 1, 3, 5 y 6 utilice una computadora como ayuda.

1. Utilice la ecuación en diferencias (3) para aproximar la solución del problema con valores en la frontera

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t < T$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq a$$

cuando

a) $c = 1, a = 1, T = 1, f(x) = x(1 - x); n = 4$ y $m = 10$

b) $c = 1, \quad a = 2, \quad T = 1, \quad f(x) = e^{-16(x-1)^2}; \quad n = 5$ y $m = 10$

c) $c = \sqrt{2}, a = 1, T = 1,$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 0.5, & 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

$n = 10$ y $m = 25$.

2. Considere el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.5$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 0.5$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

a) Utilice los métodos del capítulo 12 para comprobar que la solución del problema es $u(x, t) = \operatorname{sen} \pi x \cos \pi t$.

b) Utilice el método de esta sección para aproximar la solución del problema sin ayuda de un programa de cómputo. Utilice $n = 4$ y $m = 5$.

c) Calcule el error absoluto en cada punto interior de la malla.

3. Aproxime la solución del problema con valores en la frontera en el problema 2 por medio de un programa de cómputo con

a) $n = 5, m = 10$ **b)** $n = 5, m = 20$.

4. Para el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$u(x, 0) = x(1 - x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

utilice $h = k = \frac{1}{5}$ en la ecuación (6) para calcular a mano los valores de $u_{i,1}$.

5. Como se demostró en la sección 12.2 la ecuación de una cuerda vibrando es

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde T es la magnitud constante de la tensión en la cuerda y ρ es su masa por unidad de longitud. Suponga que una cuerda de 60 centímetros de largo se ancla en sus extremos al eje x y se suelta a partir del reposo desde su desplazamiento inicial

$$f(x) = \begin{cases} 0.01x, & 0 \le x \le 30 \\ 0.30 - \dfrac{x - 30}{100}, & 30 < x \le 60. \end{cases}$$

Utilice la ecuación en diferencias (3) en esta sección para aproximar la solución del problema con valores en la frontera cuando $h = 10$, $k = 5\sqrt{\rho/T}$ y donde $\rho = 0.0225$ g/cm, $T = 1.4 \times 10^7$ dinas. Utilice $m = 50$.

6. Repita el problema 5 usando

$$f(x) = \begin{cases} 0.2x, & 0 \le x \le 15 \\ 0.30 - \dfrac{x - 15}{150}, & 15 < x \le 60 \end{cases}$$

y $h = 10$, $k = 2.5\sqrt{\rho/T}$. Utilice $m = 50$.

REPASO DEL CAPÍTULO 15

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-29.

1. Considere el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = 50, \quad 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0, \quad 0 < x < 2.$$

Aproxime la solución de la ecuación diferencial en los puntos interiores de la región, con tamaño de malla $h = \frac{1}{2}$. Utilice la eliminación de Gauss o la iteración de Gauss-Seidel.

2. Resuelva el problema 1 usando un tamaño de malla de $h = \frac{1}{4}$. Utilice la iteración de Gauss-Seidel.

3. Se tiene el siguiente problema con valores en la frontera:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.05$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad 0 < x < 1.$$

a) Observe que la temperatura inicial $u(x, 0) = x$ indica que la temperatura en la frontera derecha $x = 1$ debe ser $u(1, 0) = 1$, mientras que las condiciones de frontera implican que $u(1, 0) = 0$. Escriba un programa de cómputo para el método explícito de diferencias finitas, de tal modo que las condiciones en la frontera prevalezcan para todos los tiempos que se consideren, incluyendo $t = 0$. Utilice el programa para completar la tabla 15.9.

b) Modifique su programa de cómputo para que la condición inicial prevalezca en las fronteras en $t = 0$. Utilice este programa para completar la tabla 15.10.

c) ¿Están relacionadas de alguna manera las tablas 15.9 y 15.10? Si es necesario, utilice un intervalo mayor de tiempo.

TABLA 15.9

Tiempo	$x = 0.00$	$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$	$x = 1.00$
0.00	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.0000
0.01	0.0000					0.0000
0.02	0.0000					0.0000
0.03	0.0000					0.0000
0.04	0.0000					0.0000
0.05	0.0000					0.0000

TABLA 15.10

Tiempo	$x = 0.00$	$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$	$x = 1.00$
0.00	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
0.01	0.0000					0.0000
0.02	0.0000					0.0000
0.03	0.0000					0.0000
0.04	0.0000					0.0000
0.05	0.0000					0.0000

APÉNDICE I

FUNCIÓN GAMMA

La definición integral de Euler de la **función gamma** es

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt. \tag{1}$$

La convergencia de la integral requiere que $x - 1 > -1$ o $x > 0$. La relación de recurrencia

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), \tag{2}$$

como vimos en la sección 6.3, se puede obtener de (1) al integrar por partes. Ahora cuando $x = 1$, $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$, y por tanto de la ecuación (2) se obtiene

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1\\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1\\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Así de esta manera vemos que cuando n es un entero positivo, $\Gamma(n + 1) = n!$. Por esto a la función gamma se le llama con frecuencia **función factorial generalizada**.

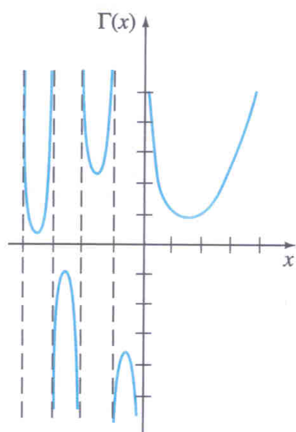


FIGURA I.1 Gráfica de $\Gamma(x)$ para x distinto de cero y que no sea un entero negativo.

Aunque la forma integral (1) no converge cuando $x < 0$, se puede demostrar por medio de definiciones alternativas, que la función gamma está definida para todos los números reales y complejos, *excepto* $x = -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Como una consecuencia, la ecuación (2) sólo es válida para $x \neq -n$. La gráfica de $\Gamma(x)$, considerada como una función de una variable real x, se presenta en la figura 1.1. Observe que los enteros no positivos corresponden a las asíntotas verticales de la gráfica.

En los problemas 31 y 32 de los ejercicios 6.3 hemos usado el hecho de que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Este resultado se puede deducir a partir de (1) y haciendo $x = \frac{1}{2}$:

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\, dt. \tag{3}$$

Cuando se hace $t = u^2$, la ecuación (3) se puede escribir como $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du$. Pero $\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \int_0^\infty e^{-v^2}\, dv$, por lo que

$$\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^2 = \left(2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du\right)\left(2\int_0^\infty e^{-v^2}\, dv\right) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv.$$

El cambiar a coordenadas polares, $u = r\cos\theta$, $v = r\,\text{sen}\,\theta$ nos permite evaluar la integral doble:

$$4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv = 4\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta = \pi.$$

Por tanto $$\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi \quad \text{o} \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{4}$$

EJEMPLO 1 Valor de $\Gamma(-\frac{1}{2})$

Evalúe $\Gamma(-\frac{1}{2})$.

SOLUCIÓN Usando las ecuaciones (2) y (4), con $x = -\frac{1}{2}$,

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2}\Gamma(-\tfrac{1}{2}).$$

Por tanto $$\Gamma(-\tfrac{1}{2}) = -2\Gamma(\tfrac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}.$$ ■

EJERCICIOS PARA EL APÉNDICE I

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-29.

1. Evalúe.
   a) $\Gamma(5)$
   b) $\Gamma(7)$
   c) $\Gamma(-\frac{3}{2})$
   d) $\Gamma(-\frac{5}{2})$

2. Utilice la ecuación (1) y el hecho de que $\Gamma(\frac{6}{5}) = 0.92$ para evaluar $\int_0^\infty x^5 e^{-x^5}\,dx$. [*Sugerencia*: Haga $t = x^5$.]

3. Utilice la ecuación (1) y el hecho de que $\Gamma(\frac{5}{3}) = 0.89$ para evaluar $\int_0^\infty x^4 e^{-x^3}\,dx$.

4. Evalúe $\int_0^1 x^3\left(\ln\frac{1}{x}\right)^3 dx$ [*Sugerencia*: Haga $t = -\ln x$.]

5. Utilice el hecho de que $\Gamma(x) > \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ para demostrar que $\Gamma(x)$ no está acotada cuando $x \to 0^+$.

6. Utilice (1) para deducir (2) cuando $x > 0$.

APÉNDICE II

MATRICES

II.1 DEFINICIONES BÁSICAS Y TEORÍA

DEFINICIÓN II.1 Matriz

Una **matriz A** es cualquier arreglo rectangular de números o funciones:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Si una matriz tiene m renglones y n columnas, se dice que su **tamaño** es m por n (se escribe como $m \times n$). Una matriz $n \times n$ se llama **matriz cuadrada** de orden n.

El elemento, o entrada del i-ésimo renglón y la j-ésima columna de una matriz $\mathbf{A}$ $m \times n$ se representa por a_{ij}. Una matriz $\mathbf{A}$ $m \times n$ se representa en la forma $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ o simplemente $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Una matriz 1×1 es sólo una constante o función.

DEFINICIÓN II.2 Igualdad de matrices

Dos matrices $m \times n$ $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son iguales si $a_{ij} = b_{ij}$ para toda i y j.

DEFINICIÓN II.3 Matriz columna

Una **matriz columna X** es cualquier matriz que tenga n renglones y una columna:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = (b_{i1})_{n \times 1}.$$

Una **matriz columna** también se llama **vector columna** o simplemente **vector**.

DEFINICIÓN II.4 Múltiplos de matrices

Un **múltiplo** de una matriz **A** se define como

$$k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} = (ka_{ij})_{m \times n},$$

donde k es una constante o una función.

EJEMPLO 1 Múltiplos de matrices

a) $5\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \\ \frac{1}{5} & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 20 & -5 \\ 1 & 30 \end{pmatrix}$ b) $e^t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ -2e^t \\ 4e^t \end{pmatrix}$ ■

Observamos que para toda matriz **A** el producto $k\mathbf{A}$ es igual al producto $\mathbf{A}k$. Por ejemplo,

$$e^{-3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-3t} \\ 5e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}e^{-3t}.$$

DEFINICIÓN II.5 Suma de matrices

La **suma** de dos matrices **A** y **B** $m \times n$ se define como la matriz

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}.$$

En otras palabras, cuando se suman dos matrices del mismo tamaño se suman los elementos correspondientes.

EJEMPLO 2 Suma de matrices

La suma de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ -6 & 10 & -5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -8 \\ 9 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2+4 & -1+7 & 3+(-8) \\ 0+9 & 4+3 & 6+5 \\ -6+1 & 10+(-1) & -5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -5 \\ 9 & 7 & 11 \\ -5 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$ ■

EJEMPLO 3 Una matriz escrita como una suma de matrices columna

La matriz sola $\begin{pmatrix} 3t^2 - 2e^t \\ t^2 + 7t \\ 5t \end{pmatrix}$ se puede escribir como la suma de tres vectores columna:

$$\begin{pmatrix} 3t^2 - 2e^t \\ t^2 + 7t \\ 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 7t \\ 5t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}t^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^t.$$ ■

La **diferencia** de dos matrices $m \times n$ se define en la forma usual: $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$, donde $-\mathbf{B} = (-1)\mathbf{B}$.

DEFINICIÓN II.6 Multiplicación de matrices

Sea **A** una matriz con m renglones y n columnas y **B** una matriz con n renglones y p columnas. El **producto AB** se define como la matriz $m \times p$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & \cdots & a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \cdots + a_{2n}b_{np} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \right)_{m \times p}.$$

Observe con cuidado en la definición II.6, que el producto $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ está definido sólo cuando el número de columnas en la matriz **A** es igual al número de renglones en **B**. El tamaño del producto se determina de

$$\mathbf{A}_{m \times n}\mathbf{B}_{n \times p} = \mathbf{C}_{m \times p}.$$

También reconocerá que los elementos en, digamos, el i-ésimo renglón de la matriz producto **AB** se forman aplicando la definición en componentes del producto interior, o punto, del i-ésimo renglón de **A** con cada una de las columnas de **B**.

EJEMPLO 4 Multiplicación de matrices

a) Para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 9 + 7 \cdot 6 & 4 \cdot (-2) + 7 \cdot 8 \\ 3 \cdot 9 + 5 \cdot 6 & 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & 48 \\ 57 & 34 \end{pmatrix}.$$

b) Para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-4) + 8 \cdot 2 & 5 \cdot (-3) + 8 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-4) + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-4) + 7 \cdot 2 & 2 \cdot (-3) + 7 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -15 \\ -4 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

En general, *la multiplicación de matrices no es conmutativa*; es decir, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Observe en el inciso a) del ejemplo 4, que $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 30 & 53 \\ 48 & 82 \end{pmatrix}$, mientras que en el inciso b) el producto **BA** no está definido, porque en la definición II.6 se requiere que la primera matriz, en este caso **B**, tenga el mismo número de columnas como renglones tenga la segunda.

Nos interesa en particular el producto de una matriz cuadrada por un vector columna.

DEFINICIÓN II.6 Multiplicación de matrices

Sea **A** una matriz con m renglones y n columnas y **B** una matriz con n renglones y p columnas. El **producto AB** se define como la matriz $m \times p$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & \cdots & a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \cdots + a_{2n}b_{np} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \right)_{m \times p}.$$

Observe con cuidado en la definición II.6, que el producto **AB** = **C** está definido sólo cuando el número de columnas en la matriz **A** es igual al número de renglones en **B**. El tamaño del producto se determina de

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times p} = \mathbf{C}_{m\times p}.$$

También reconocerá que los elementos en, digamos, el i-ésimo renglón de la matriz producto **AB** se forman aplicando la definición en componentes del producto interior, o punto, del i-ésimo renglón de **A** con cada una de las columnas de **B**.

EJEMPLO 4 Multiplicación de matrices

a) Para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 4\cdot 9 + 7\cdot 6 & 4\cdot(-2) + 7\cdot 8 \\ 3\cdot 9 + 5\cdot 6 & 3\cdot(-2) + 5\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & 48 \\ 57 & 34 \end{pmatrix}.$$

b) Para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 5\cdot(-4) + 8\cdot 2 & 5\cdot(-3) + 8\cdot 0 \\ 1\cdot(-4) + 0\cdot 2 & 1\cdot(-3) + 0\cdot 0 \\ 2\cdot(-4) + 7\cdot 2 & 2\cdot(-3) + 7\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -15 \\ -4 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

■

En general, *la multiplicación de matrices no es conmutativa*; es decir, **AB** ≠ **BA**. Observe en el inciso a) del ejemplo 4, que $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 30 & 53 \\ 48 & 82 \end{pmatrix}$, mientras que en el inciso b) el producto **BA** no está definido, porque en la definición II.6 se requiere que la primera matriz, en este caso **B**, tenga el mismo número de columnas como renglones tenga la segunda.

Nos interesa en particular el producto de una matriz cuadrada por un vector columna.

EJEMPLO 5 Multiplicación de matrices

a) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-3) + (-1)\cdot 6 + 3\cdot 4 \\ 0\cdot(-3) + 4\cdot 6 + 5\cdot 4 \\ 1\cdot(-3) + (-7)\cdot 6 + 9\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 44 \\ -9 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x + 2y \\ 3x + 8y \end{pmatrix}$$ ■

IDENTIDAD MULTIPLICATIVA Para un entero positivo n, la matriz $n \times n$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

se llama **matriz de identidad multiplicativa**. Por la definición II.6, para toda matriz $\mathbf{A}$ $n \times n$.

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}.$$

También se comprueba con facilidad que si $\mathbf{X}$ es una matriz columna $n \times 1$, entonces $\mathbf{IX} = \mathbf{X}$.

MATRIZ CERO Una matriz formada sólo por elementos cero se conoce como **matriz cero** y se representa por $\mathbf{0}$. Por ejemplo,

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y así sucesivamente. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{0}$ son matrices $m \times n$, entonces

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

LEY ASOCIATIVA Aunque no lo demostraremos, la multiplicación de matrices es **asociativa**. Si $\mathbf{A}$ es una matriz $m \times p$, $\mathbf{B}$ una matriz $p \times r$ y $\mathbf{C}$ una matriz $r \times n$, entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

es una matriz $m \times n$.

LEY DISTRIBUTIVA Si todos los productos están definidos, la multiplicación es distributiva respecto de la suma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}.$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ Asociado a toda matriz *cuadrada* $\mathbf{A}$ de constantes hay un número llamado **determinante de la matriz**, que se denota por det $\mathbf{A}$.

EJEMPLO 6 Determinante de una matriz cuadrada

Para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ desarrollamos det $\mathbf{A}$ por cofactores del primer renglón:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(20 - 2) - 6(8 + 1) + 2(4 + 5) = 18.$$ ■

Se puede demostrar que un determinante, det **A** se puede desarrollar por cofactores usando cualquier renglón o cualquier columna. Si det **A** tiene un renglón (o una columna) con muchos elementos cero, el sentido común aconseja desarrollar el determinante por ese renglón (o columna).

DEFINICIÓN II.7 Transpuesta de una matriz

La **transpuesta** de la matriz (1) $m \times n$ es la matriz $\mathbf{A}^T$ de $n \times m$ dada por

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Es decir, los renglones de una matriz **A** se convierten en las columnas de su transpuesta $\mathbf{A}^T$.

EJEMPLO 7 Transpuesta de una matriz

a) La transpuesta de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ es $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Si $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{X}^T = (5 \quad 0 \quad 3)$. ■

DEFINICIÓN II.8 Inversa multiplicativa de una matriz

Sea **A** una matriz $n \times n$. Si existe una matriz **B** $n \times n$ tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I},$$

en donde **I** es la identidad multiplicativa, se dice que **B** es la **inversa multiplicativa de A** y se denota por $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

DEFINICIÓN II.9 Matrices no singular/singular

Sea **A** una matriz $n \times n$. Si det $\mathbf{A} \neq 0$, entonces se dice que **A** es **no singular**. Si det $\mathbf{A} = 0$, entonces **A** es **singular**.

El siguiente teorema especifica una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa multiplicativa.

TEOREMA II.1 La no singularidad implica que A tiene una inversa

Una matriz **A** $n \times n$ tiene una inversa multiplicativa $\mathbf{A}^{-1}$ si y sólo si **A** es no singular.

El siguiente teorema describe un método para determinar la inversa multiplicativa de una matriz no singular.

TEOREMA II.2 Una fórmula para la inversa de una matriz

Sea **A** una matriz no singular $n \times n$ y sea $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, donde M_{ij} es el determinante de la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ obtenido al eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de **A**, entonces

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (C_{ij})^T. \tag{2}$$

Cada C_{ij} en el teorema II.2 es simplemente el cofactor (el menor con signo) del elemento a_{ij} en **A**. Observe que en la fórmula (2) se utiliza la transpuesta.

Para futuras referencias observe que en el caso de una matriz no singular 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

que $C_{11} = a_{22}$, $C_{12} = -a_{21}$, $C_{21} = -a_{12}$, y $C_{22} = a_{11}$. Por tanto

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Para una matriz no singular 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

y así sucesivamente. Al realizar la transposición se obtiene

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

EJEMPLO 8 Inversa de una matriz 2 × 2

Encuentre la inversa multiplicativa de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN Puesto que $\det \mathbf{A} = 10 - 8 = 2 \neq 0$, **A** es no singular. De acuerdo con el teorema II.1, $\mathbf{A}^{-1}$ existe. Utilizando la ecuación (3) encontramos que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

■

No toda matriz cuadrada tiene inversa multiplicativa. La matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ es singular, porque $\det \mathbf{A} = 0$. Por tanto, $\mathbf{A}^{-1}$ no existe.

EJEMPLO 9 Inversa de una matriz 3 × 3

Encuentre la inversa multiplicativa de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN Puesto que det $\mathbf{A} = 12 \neq 0$, la matriz dada es no singular. Los cofactores correspondientes a los elementos de cada renglón de det $\mathbf{A}$ son

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad C_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Utilizando la ecuación (4) se tiene que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Le pedimos que compruebe que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. ■

La fórmula (2) presenta dificultades obvias cuando las matrices no singulares son mayores de 3×3. Por ejemplo, para aplicarla a una matriz 4×4 necesitaríamos calcular *dieciséis* determinantes 3×3.* Para una matriz grande, hay métodos más eficientes para calcular $\mathbf{A}^{-1}$. El lector interesado puede consultar cualquier libro de álgebra lineal.

Puesto que nuestra meta es aplicar el concepto de una matriz a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, necesitaremos las definiciones siguientes:

DEFINICIÓN II.10 Derivada de una matriz de funciones

Si $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))_{m \times n}$ es una matriz cuyos elementos son funciones derivables en un intervalo común, entonces

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}a_{ij}\right)_{m\times n}.$$

DEFINICIÓN II.11 Integral de una matriz de funciones

Si $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))_{m \times n}$ es una matriz cuyos elementos son funciones continuas en un intervalo que contiene a t y t_0, entonces

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(s)\,ds = \left(\int_{t_0}^{t} a_{ij}(s)\,ds\right)_{m\times n}.$$

Para derivar o integrar una matriz de funciones, sólo se deriva o integra cada uno de sus elementos. La derivada de una matriz también se denota por $\mathbf{A}'(t)$.

EJEMPLO 10 Derivada/integral de una matriz

Si $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ e^{3t} \\ 8t - 1 \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dt}\operatorname{sen} 2t \\ \dfrac{d}{dt}e^{3t} \\ \dfrac{d}{dt}(8t - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ 3e^{3t} \\ 8 \end{pmatrix}$

*Estrictamente hablando, un determinante es un número, pero a veces conviene manejarlo como si fuera un arreglo.

$$\text{y} \qquad \int_0^t \mathbf{X}(s)\,ds = \begin{pmatrix} \int_0^t \operatorname{sen} 2s\,ds \\ \int_0^t e^{3s}\,ds \\ \int_0^t (8s-1)\,ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{3} \\ 4t^2 - t \end{pmatrix}.$$

■

II.2 ELIMINACIÓN DE GAUSS Y DE GAUSS-JORDAN

Las matrices son una ayuda insustituible para resolver sistemas algebraicos de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Si $\mathbf{A}$ denota a la matriz de los coeficientes en (5), sabemos que es posible usar la regla de Cramer para resolver el sistema, siempre que det $\mathbf{A} \neq$ O. Sin embargo, para seguir esa regla se necesita realizar un gran trabajo si $\mathbf{A}$ es mayor de 3×3. El procedimiento que describiremos a continuación tiene la particular ventaja de no sólo ser un método eficiente para manejar sistemas grandes, sino también una forma de resolver sistemas consistentes (5), en los que det $\mathbf{A} = 0$ y para resolver m ecuaciones lineales con n incógnitas.

DEFINICIÓN II.12 Matriz aumentada

La **matriz aumentada** del sistema (5) es la matriz $n \times (n + 1)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

Si $\mathbf{B}$ es la matriz columna de las b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, la matriz aumentada de (5) se denota por $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$.

OPERACIONES ELEMENTALES DE RENGLÓN Recuerde de álgebra que podemos transformar un sistema algebraico de ecuaciones en un sistema equivalente (es decir, un sistema que tenga la misma solución) multiplicando una ecuación por una constante distinta de cero, intercambiando el orden de dos ecuaciones cualesquiera del sistema y sumando un múltiplo constante de una ecuación a otra. A estas operaciones, sobre un sistema de ecuaciones, se les define como **operaciones elementales de renglón** en una matriz aumentada:

i) Multiplicar un renglón por una constante distinta de cero.

ii) Intercambiar dos renglones cualesquiera.

iii) Sumar un múltiplo constante, distinto de cero, de un renglón a cualquier otro renglón.

MÉTODOS DE ELIMINACIÓN Para resolver un sistema como el (5), con una matriz aumentada, se emplea la **eliminación de Gauss** o el **método de eliminación de Gauss-Jordan**. En el primero de los métodos se realiza una secuencia de operaciones elementales de renglón hasta llegar a una matriz aumentada que tenga la **forma renglón escalón**.

i) El primer elemento distinto de cero en un renglón distinto de cero es 1.

ii) En los renglones consecutivos distintos de cero el primer elemento 1, en el renglón inferior, aparece a la derecha del primer 1 en el renglón superior.

iii) Los renglones formados únicamente con ceros están en la parte inferior de la matriz.

En el método de Gauss-Jordan se continúa con las operaciones de renglón hasta obtener una matriz aumentada que esté en la **forma escalonada reducida**. Una matriz escalonada reducida presenta las mismas tres propiedades de arriba, además de la siguiente:

iv) Una columna que contiene un primer elemento 1 tiene ceros en todos sus demás lugares.

EJEMPLO 11 Formas escalonada/escalonada reducida

a) Las matrices aumentadas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

están en su forma escalonada. Debe comprobar que se satisfacen los tres criterios.

b) Las matrices aumentadas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

están en su forma escalonada reducida. Observe que los elementos restantes en las columnas contienen un 1 como entrada principal y que los elementos son iguales a 0. ■

Observe en la eliminación de Gauss que nos detenemos una vez obtenida *una* matriz aumentada en su forma escalonada. En otras palabras, al usar operaciones consecutivas de renglón llegaremos a formas escalonadas distintas. Este método requiere entonces del uso de sustitución regresiva. En la eliminación de Gauss-Jordan nos detenemos cuando se ha llegado a la matriz aumentada en su forma escalonada reducida. Cualquier orden de operaciones de renglón conduce a la misma matriz aumentada en su forma escalonada reducida. Este método no necesita sustitución regresiva; la solución del sistema se conocerá examinando la matriz final. En términos de las ecuaciones del sistema original, nuestra meta con ambos métodos es simplemente hacer el coeficiente de x_1 en la primera ecuación* igual a 1 y después utilizar múltiplos de esa ecuación para eliminar x_1 de las otras ecuaciones. El proceso se repite con las otras variables.

Para mantener el registro de las operaciones de renglón, que se llevaron a cabo en una matriz aumentada, se utilizará la siguiente notación:

Símbolo	Significado
R_{ij}	Intercambio de los renglones i y j
cR_i	Multiplicación del i-ésimo renglón por la constante c, distinta de cero
$cR_i + R_j$	Multiplicación del i-ésimo renglón por c y suma del resultado al j-ésimo renglón

EJEMPLO 12 Solución por eliminación

Resuelva

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

utilizando **a)** eliminación de Gauss y **b)** eliminación de Gauss-Jordan.

*Siempre se pueden intercambiar ecuaciones de tal forma que la primera ecuación contenga a la variable x_1.

SOLUCIÓN **a)** Usando operaciones de renglón en la matriz aumentada del sistema, obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & -4 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & -4 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[-5R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{3R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{55}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{2}{11}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

La última matriz está en la forma renglón-escalón y representa al sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \quad x_3 &= -1 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{9}{2} \\ x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Sustituyendo $x_3 = 5$ en la segunda ecuación se obtiene $x_2 = -3$. Sustituyendo ambos valores en la primera ecuación finalmente se obtiene $x_1 = 10$.

b) Comenzamos con la última de las matrices anteriores. Como los primeros elementos en el segundo y tercer renglones son 1, debemos hacer que los elementos restantes en las columnas dos y tres sean iguales a 0:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{3}{2}R_3+R_2]{4R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

La última matriz ya se encuentra en su forma escalonada reducida. Debido al significado de esta matriz, en términos de las ecuaciones que representa, se ve que la solución del sistema es $x_1 = 10$, $x_2 = -3$, $x_3 = 5$. ■

EJEMPLO 13 Eliminación de Gauss-Jordan

Resuelva

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= -7 \\ 4x + \quad y + 3z &= 5 \\ 2x - 5y + 7z &= 19. \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Resolveremos este sistema con la eliminación Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 7 & 19 \end{array}\right) \xrightarrow[-2R_1+R_3]{-4R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -11 & 11 & 33 \\ 0 & -11 & 11 & 33 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{11}R_3]{-\frac{1}{11}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[-R_2+R_3]{-3R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

En este caso, la última matriz, en su forma escalonada reducida, implica que el sistema original de tres ecuaciones con tres incógnitas es equivalente, en realidad, a dos ecuaciones con tres incógnitas. Puesto que sólo z es común a ambas ecuaciones (los renglones distintos de cero), le podemos asignar valores arbitrarios. Si hacemos $z = t$, donde t representa cualquier número real, veremos que el sistema tiene una cantidad infinita

de soluciones: $x = 2 - t$, $y = -3 + t$, $z = t$. Geométricamente, esas ecuaciones son las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos $x + 0y + z = 2$ y $0x + y - z = 3$. ■

USO DE OPERACIONES DE RENGLÓN PARA ENCONTRAR UNA INVERSA

Debido a la cantidad de determinantes que hay que evaluar, casi no se usa la fórmula (2) del teorema II.2 para determinar la inversa cuando la matriz **A** es grande. En el caso de matrices de 3 × 3 o mayores, el método que se describe en el siguiente teorema es particularmente eficiente para determinar $\mathbf{A}^{-1}$.

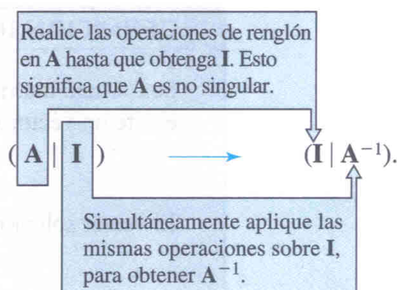
TEOREMA II.3 Determinación de $\mathbf{A}^{-1}$ usando las operaciones elementales de renglón

Si una matriz **A** $n \times n$ se puede transformar en la matriz identidad **I** $n \times n$ con una secuencia de operaciones elementales de renglón, entonces **A** es no singular. La misma secuencia de operaciones que transforma a **A** en la identidad **I** también transforma a **I** en $\mathbf{A}^{-1}$.

Es conveniente realizar estas operaciones de renglón en forma simultánea en **A** y en **I**, mediante una matriz $n \times 2n$ obtenida aumentando **A** con la identidad **I**, como aquí se muestra:

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

En el diagrama siguiente se indica el procedimiento para encontrar $\mathbf{A}^{-1}$:



EJEMPLO 14 Inversa por operaciones elementales de renglón

Determine la inversa multiplicativa de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN Usaremos la misma notación que cuando redujimos una matriz aumentada a la forma renglón escalón:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[5R_1 + R_3]{2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & \frac{17}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{5}R_3]{\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{17}{10} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{-R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{30R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{5}{3}R_3 + R_2]{-\frac{1}{3}R_3 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 17 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 & 6 \end{array}\right).$$

Puesto que **I** se presenta a la izquierda de la recta vertical, concluimos que la matriz a la derecha de la recta es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -8 & 17 & -10 \\ 5 & -10 & 6 \end{pmatrix}.$$ ■

Si la reducción de renglones $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$ conduce a la situación

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}) \xrightarrow[\text{renglones}]{\text{Operaciones entre}} (\mathbf{B} \mid \mathbf{C}),$$

donde la matriz **B** contiene un renglón de ceros, entonces **A** es necesariamente singular. Como una reducción adicional de **B** siempre produce otra matriz con un renglón de ceros, nunca se transformará **A** en **I**.

II.3 EL PROBLEMA DE EIGENVALORES

La eliminación Gauss-Jordan se puede emplear para determinar los eigenvectores (vectores propios) de una matriz cuadrada.

DEFINICIÓN II.13 Eigenvalores y eigenvectores

Sea **A** una matriz $n \times n$. Se dice que un número λ es un **eigenvalor** de **A** si existe un vector solución **K** distinto de cero del sistema lineal

$$\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}. \tag{6}$$

El vector solución **K** es un **eigenvector** que corresponde al eigenvalor propio λ.

La palabra *eigenvalor* es una combinación de alemán y español adaptada de la palabra alemana *eigenwert* que, traducida literalmente, es "valor propio". A los eigenvalores y eigenvectores se les llama también **valores característicos** y **vectores característicos**, respectivamente.

EJEMPLO 15 Eigenvector de una matriz

Compruebe que $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un eigenvector de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN Al realizar la multiplicación **AK** vemos que

$$\mathbf{AK} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{\text{eigenvalor}}{(-2)}\mathbf{K}.$$

Vemos de la definición II.3 y del renglón anterior que $\lambda = -2$ es un eigenvalor de **A**. ■

Usando las propiedades del álgebra matricial, podemos expresar la ecuación (6) en la forma alternativa

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}, \tag{7}$$

donde **I** es la identidad multiplicativa. Si hacemos

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

entonces (7) es igual que

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)k_1 + \quad a_{12}k_2 + \cdots + \quad a_{1n}k_n &= 0 \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - \lambda)k_2 + \cdots + \quad a_{2n}k_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \ \ \vdots \\ a_{n1}k_1 + \quad a_{n2}k_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)k_n &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Aunque una solución obvia de la ecuación (8) es $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_n = 0$, sólo nos interesan las soluciones no triviales. Se sabe que un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas (esto es, $b_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n$ en la ecuación (5)) tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante de la matriz de coeficientes es igual a cero. Por tanto, para determinar una solución **K** distinta de cero de la ecuación (7) se debe tener que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{9}$$

Examinando la ecuación (8) se ve que el desarrollo del $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ por cofactores da como resultado un polinomio en λ de grado n. La ecuación (9) se llama **ecuación característica** de **A**. Por lo que, *los eigenvalores de* **A** *son las raíces de la ecuación característica*. Para encontrar un vector propio que corresponde a un eigenvalor λ, sólo se resuelve el sistema de ecuaciones $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ aplicando la eliminación Gauss-Jordan a la matriz aumentada $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|\mathbf{0})$.

EJEMPLO 16 Eigenvalores/eigenvectores

Determinar los eigenvalores y los eigenvectores de **A** $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN Para desarrollar el determinante y formar la ecuación característica usaremos los cofactores del segundo renglón:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = 0.$$

Puesto que $-\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = -\lambda(\lambda + 4)(\lambda - 3) = 0$ vemos que los valores propios son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$ y $\lambda_3 = 3$. Para determinar los eigenvectores debemos reducir tres veces $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|\mathbf{0})$, que corresponden a los tres diferentes eigenvalores.

Para $\lambda_1 = 0$ tenemos

$$(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}\,|\,\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 + R_3]{-6R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{13}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por lo que vemos que $k_1 = -\frac{1}{13}k_3$ y $k_2 = -\frac{6}{13}k_3$. Eligiendo $k_3 = -13$, obtenemos el eigenvector*

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = -4$,

$$(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}\,|\,\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_{31}]{-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-5R_1 + R_3]{-6R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{8}R_3]{-\frac{1}{9}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-R_2 + R_3]{-2R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

lo que implica que $k_1 = -k_3$ y $k_2 = 2k_3$. Eligiendo $k_3 = 1$ se obtiene el segundo eigenvector

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para $\lambda_3 = 3$ con la eliminación de Gauss se obtiene

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}\,|\,\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{entre renglones}]{\text{operación}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

por lo que $k_1 = -k_3$ y $k_2 = -\frac{3}{2}k_3$. La elección de $k_3 = -2$ conduce al tercer eigenvector:

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

■

Cuando una matriz $\mathbf{A}$ $n \times n$ tiene n eigenvalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, se puede demostrar que es posible determinar un conjunto de n eigenvectores linealmente independientes† $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$. Sin embargo, cuando la ecuación característica tiene raíces repetidas, tal vez no se puedan determinar n eigenvectores de $\mathbf{A}$ linealmente independientes.

---

*Por supuesto k_3 pudo ser cualquier número distinto de cero. En otras palabras, un múltiplo constante distinto de cero de un eigenvector también es un eigenvector.

†La independencia lineal de los vectores columna se define igual que la de las funciones.

EJEMPLO 17 Eigenvalores/eigenvectores

Determine los eigenvalores y los eigenvectores de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN De la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)^2 = 0$$

vemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ es un eigenvalor de multiplicidad dos. En el caso de una matriz de 2×2 no se necesita usar la eliminación Gauss-Jordan. Para determinar los eigenvectores que corresponden a $\lambda_1 = 5$, recurriremos al sistema $(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}|\mathbf{0})$ en su forma equivalente

$$\begin{aligned} -2k_1 + 4k_2 &= 0 \\ -k_1 + 2k_2 &= 0. \end{aligned}$$

En este sistema se ve que $k_1 = 2k_2$. Por lo que si elegimos $k_2 = 1$, encontraremos un solo eigenvector:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

■

EJEMPLO 18 Eigenvalores/eigenvectores

Determine los eigenvalores y eigenvectores de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN La ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 9-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 11)(\lambda - 8)^2 = 0$$

muestra que $\lambda_1 = 11$ y que $\lambda_2 = \lambda_3 = 8$ es un eigenvalor de multiplicidad dos.

Para $\lambda_1 = 11$, usando la eliminación Gauss-Jordan se obtiene

$$(\mathbf{A} - 11\mathbf{I}\,|\,\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{operaciones entre renglones}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por tanto, $k_1 = k_2$ y $k_2 = k_3$. Si $k_3 = 1$, entonces

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora para $\lambda_2 = 8$ tenemos que

$$(\mathbf{A} - 8\mathbf{I}\,|\,\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{operaciones entre renglones}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

En la ecuación $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ seleccionamos libremente dos de las variables. Eligiendo, por un lado que $k_2 = 1, k_3 = 0$ y, por otro, $k_2 = 0, k_3 = 1$, obtendremos dos eigenvectores linealmente independientes:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS DEL APÉNDICE II

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-29.

II.1 DEFINICIONES BÁSICAS Y TEORÍA

1. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$, determine

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ **b)** $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ **c)** $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$

2. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, determine

a) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ **b)** $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ **c)** $2(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

3. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, determine

a) $\mathbf{AB}$ **b)** $\mathbf{BA}$ **c)** $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$ **d)** $\mathbf{B}^2 = \mathbf{BB}$

4. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, determine

a) $\mathbf{AB}$ **b)** $\mathbf{BA}$

5. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, determine

a) $\mathbf{BC}$ **b)** $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ **c)** $\mathbf{C}(\mathbf{BA})$ **d)** $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$

6. Si $\mathbf{A} = (5 \quad -6 \quad 7)$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, y

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine

a) $\mathbf{AB}$ **b)** $\mathbf{BA}$ **c)** $(\mathbf{BA})\mathbf{C}$ **d)** $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$

7. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = (2 \quad 4 \quad 5)$, determine

a) $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ **b)** $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ **c)** $\mathbf{A} + \mathbf{B}^T$

8. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, determine

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}^T$ **b)** $2\mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T$ **c)** $\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - \mathbf{B})$

9. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$, determine

a) $(\mathbf{AB})^T$ **b)** $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

10. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 11 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$, determine

a) $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ **b)** $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T$

En los problemas 11 a 14 escriba la suma en forma de una sola matriz columna:

11. $4\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

12. $3t\begin{pmatrix} 2 \\ t \\ -1 \end{pmatrix} + (t-1)\begin{pmatrix} -1 \\ -t \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3t \\ 4 \\ -5t \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 2t-1 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

En los problemas 15 a 22 determine si la matriz dada es singular o no singular. Si es no singular, determine $\mathbf{A}^{-1}$ usando el teorema II.2:

15. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

17. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

18. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

19. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

20. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

21. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

22. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

En los problemas 23 y 24 demuestre que la matriz dada es no singular para todo valor real de t. Encuentre $\mathbf{A}^{-1}(t)$ con el teorema II.2:

23. $\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & e^{4t} \\ 4e^{-t} & 3e^{4t} \end{pmatrix}$

24. $\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{t}\operatorname{sen} t & -2e^{t}\cos t \\ e^{t}\cos t & e^{t}\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

En los problemas 25 a 28 determine $d\mathbf{X}/dt$.

25. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ -7e^{-t} \end{pmatrix}$

26. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - 4\cos 2t \\ -3\operatorname{sen} 2t + 5\cos 2t \end{pmatrix}$

27. $\mathbf{X} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t}$

28. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5te^{2t} \\ t\operatorname{sen} 3t \end{pmatrix}$

29. Sea $\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} & \cos \pi t \\ 2t & 3t^2 - 1 \end{pmatrix}$. Determine

a) $\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}$ b) $\displaystyle\int_0^2 \mathbf{A}(t)\,dt$ c) $\displaystyle\int_0^t \mathbf{A}(s)\,ds$

30. Sea $\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2+1} & 3t \\ t^2 & t \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 6t & 2 \\ 1/t & 4t \end{pmatrix}$. Determine

a) $\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}$ b) $\dfrac{d\mathbf{B}}{dt}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \mathbf{A}(t)\,dt$ d) $\displaystyle\int_1^2 \mathbf{B}(t)\,dt$

e) $\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)$ f) $\dfrac{d}{dt}\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)$

g) $\displaystyle\int_1^t \mathbf{A}(s)\mathbf{B}(s)\,ds$

II.2 ELIMINACIÓN DE GAUSS Y DE GAUSS-JORDAN

En los problemas 31 a 38 resuelva el correspondiente sistema de ecuaciones, por eliminación de Gauss o por eliminación de Gauss-Jordan.

31. $\begin{aligned} x + y - 2z &= 14 \\ 2x - y + z &= 0 \\ 6x + 3y + 4z &= 1 \end{aligned}$

32. $\begin{aligned} 5x - 2y + 4z &= 10 \\ x + y + z &= 9 \\ 4x - 3y + 3z &= 1 \end{aligned}$

33. $\begin{aligned} y + z &= -5 \\ 5x + 4y - 16z &= -10 \\ x - y - 5z &= 7 \end{aligned}$

34. $\begin{aligned} 3x + y + z &= 4 \\ 4x + 2y - z &= 7 \\ x + y - 3z &= 6 \end{aligned}$

35. $\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ 10x - 2y + 2z &= -1 \\ 6x - 2y + 4z &= 8 \end{aligned}$

36. $\begin{aligned} x + 2z &= 8 \\ x + 2y - 2z &= 4 \\ 2x + 5y - 6z &= 6 \end{aligned}$

37. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

38. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

En los problemas 39 y 40 utilice la eliminación de Gauss-Jordan para demostrar que el sistema dado de ecuaciones no tiene solución.

39. $\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 2 \\ 2x + 4y + 3z &= 1 \\ x + 2y - z &= 7 \end{aligned}$

40. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_2 - x_3 - 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 6 \\ 4x_1 + 7x_2 - 7x_3 &= 9 \end{aligned}$

En los problemas 41 a 46 aplique el teorema II.3 para determinar $\mathbf{A}^{-1}$ para la matriz dada o demuestre que no existe la inversa.

41. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

42. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 8 & 10 & -6 \end{pmatrix}$

43. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

44. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

45. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

46. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

II.3 EL PROBLEMA DE LOS EIGENVALORES

En los problemas 47 a 54 encuentre los eigenvalores y los eigenvectores de la matriz dada.

47. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

48. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

49. $\begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$

50. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$

51. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 9 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

52. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

53. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

54. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

En los problemas 55 y 56 demuestre que cada matriz tiene eigenvalores complejos. Encuentre los eigenvectores respectivos de la matriz:

55. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ **56.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Problemas diversos

57. Si $\mathbf{A}(t)$ es una matriz de 2×2 de funciones derivables y $\mathbf{X}(t)$ es una matriz columna de 2×1 de funciones derivables, demuestre la regla de la derivada de un producto

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)] = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}'(t) + \mathbf{A}'(t)\mathbf{X}(t).$$

58. Demuestre la fórmula (3). [*Sugerencia*: Encuentre una matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

para la que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$. Despeje b_{11}, b_{12}, b_{21} y b_{22}. Después demuestre que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$].

59. Si $\mathbf{A}$ es no singular y $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, demuestre que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

60. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son no singulares, demuestre que $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

61. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices $n \times n$. En general, ¿es

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2?$$

62. Se dice que una matriz cuadrada es una **matriz diagonal** si todos sus elementos fuera de la diagonal principal son cero, esto es, $a_{ij} = 0$, $i \neq j$. Los elementos a_{ii} en la diagonal principal pueden ser cero o no. La matriz identidad multiplicativa $\mathbf{I}$ es un ejemplo de matriz diagonal.

a) Determine la inversa de la matriz diagonal de 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

cuando $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$.

b) Encuentre la inversa de una matriz diagonal $\mathbf{A}$ 3×3 cuyos elementos a_{ii} en la diagonal principal son todos distintos de cero.

c) En general, ¿cuál es la inversa de una matriz diagonal $\mathbf{A}$ $n \times n$ cuyos elementos de la diagonal principal a_{ii} son distintos de cero?

APÉNDICE III

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
1. 1	$\dfrac{1}{s}$
2. t	$\dfrac{1}{s^2}$
3. t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, n un entero positivo
4. $t^{-1/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$
5. $t^{1/2}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
6. t^{α}	$\dfrac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}$, $\alpha > -1$
7. $\operatorname{sen} kt$	$\dfrac{k}{s^2 + k^2}$
8. $\cos kt$	$\dfrac{s}{s^2 + k^2}$
9. $\operatorname{sen}^2 kt$	$\dfrac{2k^2}{s(s^2 + 4k^2)}$
10. $\cos^2 kt$	$\dfrac{s^2 + 2k^2}{s(s^2 + 4k^2)}$
11. e^{at}	$\dfrac{1}{s - a}$
12. $\operatorname{senh} kt$	$\dfrac{k}{s^2 - k^2}$
13. $\cosh kt$	$\dfrac{s}{s^2 - k^2}$
14. $\operatorname{senh}^2 kt$	$\dfrac{2k^2}{s(s^2 - 4k^2)}$
15. $\cosh^2 kt$	$\dfrac{s^2 - 2k^2}{s(s^2 - 4k^2)}$
16. te^{at}	$\dfrac{1}{(s - a)^2}$
17. $t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s - a)^{n+1}}$, n un entero positivo

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
18. $e^{at}\,\text{sen}\,kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$
19. $e^{at}\cos kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
20. $e^{at}\,\text{senh}\,kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2-k^2}$
21. $e^{at}\cosh kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-k^2}$
22. $t\,\text{sen}\,kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$
23. $t\cos kt$	$\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$
24. $\text{sen}\,kt + kt\cos kt$	$\dfrac{2ks^2}{(s^2+k^2)^2}$
25. $\text{sen}\,kt - kt\cos kt$	$\dfrac{2k^3}{(s^2+k^2)^2}$
26. $t\,\text{senh}\,kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$
27. $t\cosh kt$	$\dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$
28. $\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$
29. $\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$
30. $1-\cos kt$	$\dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)}$
31. $kt-\text{sen}\,kt$	$\dfrac{k^3}{s^2(s^2+k^2)}$
32. $\dfrac{a\,\text{sen}\,bt-b\,\text{sen}\,at}{ab(a^2-b^2)}$	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
33. $\dfrac{\cos bt-\cos at}{a^2-b^2}$	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
34. $\text{sen}\,kt\,\text{senh}\,kt$	$\dfrac{2k^2s}{s^4+4k^4}$
35. $\text{sen}\,kt\cosh kt$	$\dfrac{k(s^2+2k^2)}{s^4+4k^4}$
36. $\cos kt\,\text{senh}\,kt$	$\dfrac{k(s^2-2k^2)}{s^4+4k^4}$
37. $\cos kt\cosh kt$	$\dfrac{s^3}{s^4+4k^4}$

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
38. $J_0(kt)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2 + k^2}}$
39. $\dfrac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$\ln \dfrac{s - a}{s - b}$
40. $\dfrac{2(1 - \cos kt)}{t}$	$\ln \dfrac{s^2 + k^2}{s^2}$
41. $\dfrac{2(1 - \cosh kt)}{t}$	$\ln \dfrac{s^2 - k^2}{s^2}$
42. $\dfrac{\operatorname{sen} at}{t}$	$\arctan\left(\dfrac{a}{s}\right)$
43. $\dfrac{\operatorname{sen} at \cos bt}{t}$	$\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{a + b}{s} + \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{a - b}{s}$
44. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$
45. $\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$
46. $\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$
47. $2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\, e^{-a^2/4t} - a \operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$
48. $e^{ab} e^{b^2 t} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + b)}$
49. $-e^{ab} e^{b^2 t} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{b e^{-a\sqrt{s}}}{s(\sqrt{s} + b)}$
50. $e^{at} f(t)$	$F(s - a)$
51. $\mathscr{U}(t - a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
52. $f(t - a)\mathscr{U}(t - a)$	$e^{-as}F(s)$
53. $g(t)\mathscr{U}(t - a)$	$e^{-as}\mathscr{L}\{g(t + a)\}$
54. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
55. $t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} F(s)$
56. $\displaystyle\int_0^t f(\tau) g(t - \tau)\, d\tau$	$F(s)G(s)$
57. $\delta(t)$	1
58. $\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS SELECCIONADOS CON NUMERACIÓN IMPAR

EJERCICIOS 1.1 (PÁGINA 10)

1. lineal, segundo orden **3.** lineal, cuarto orden
5. no lineal, segundo orden **7.** lineal, tercer orden
9. lineal en x pero no lineal en y
15. el dominio de la función es $[-2, \infty)$; el intervalo más grande de definición para la solución es $(-2, \infty)$
17. el dominio de la función es el conjunto de números reales excepto en $x = 2$ y $x = -2$; los intervalos de definición más grandes para la solución son $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ o $(2, \infty)$
19. $X = \dfrac{e^t - 1}{e^t - 2}$ definida en $(-\infty, \ln 2)$ o en $(\ln 2, \infty)$
27. $m = -2$ **29.** $m = 2, m = 3$ **31.** $m = 0, m = -1$
33. $y = 2$ **35.** ninguna solución es constante

EJERCICIOS 1.2 (PÁGINA 17)

1. $y = 1/(1 - 4e^{-x})$
3. $y = 1/(x^2 - 1)$; $(1, \infty)$
5. $y = 1/(x^2 + 1)$; $(-\infty, \infty)$
7. $x = -\cos t + 8 \operatorname{sen} t$
9. $x = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} t$ **11.** $y = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$
13. $y = 5e^{-x-1}$ **15.** $y = 0, y = x^3$
17. semiplanos definidos por $y > 0$ o $y < 0$
19. semiplanos definidos por $x > 0$ o $x < 0$
21. las regiones definidas por $y > 2$, $y < -2$, o $-2 < y < 2$
23. cualquier región que no contenga $(0, 0)$
25. sí
27. no
29. **a)** $y = cx$
b) cualquier región rectangular que no toque el eje y
c) No, la función no es derivable en $x = 0$.
31. **b)** $y = 1/(1 - x)$ en $(-\infty, 1)$; $y = -1/(x + 1)$ en $(-1, \infty)$;
c) $y = 0$ en $(-\infty, \infty)$

EJERCICIOS 1.3 (PÁGINA 27)

1. $\dfrac{dP}{dt} = kP + r$; $\dfrac{dP}{dt} = kP - r$
3. $\dfrac{dP}{dt} = k_1P - k_2P^2$
7. $\dfrac{dx}{dt} = kx(1000 - x)$
9. $\dfrac{dA}{dt} + \dfrac{1}{100}A = 0$; $A(0) = 50$
11. $\dfrac{dA}{dt} + \dfrac{7}{600 - t}A = 6$ **13.** $\dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{c\pi}{450}\sqrt{h}$
15. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E(t)$ **17.** $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv^2$
19. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$ **21.** $\dfrac{d^2r}{dt^2} + \dfrac{gR^2}{r^2} = 0$
23. $\dfrac{dA}{dt} = k(M - A), k > 0$ **25.** $\dfrac{dx}{dt} + kx = r, k > 0$
27. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$

REPASO DEL CAPÍTULO 1 (PÁGINA 32)

1. $\dfrac{dy}{dx} = 10y$ **3.** $y'' + k^2y = 0$
5. $y'' - 2y' + y = 0$ **7.** **a), d)**
9. **b)** **11.** **b)**
13. $y = c_1$ y $y = c_2e^x$, c_1 y c_2 constantes
15. $y' = x^2 + y^2$
17. **a)** El dominio es el conjunto de todos los números reales.
b) ya sea $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$
19. Para $x_0 = -1$ el intervalo es $(-\infty, 0)$ y para $x_0 = 2$ el intervalo es $(0, \infty)$.
21. **c)** $y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ **23.** $(-\infty, \infty)$
25. $(0, \infty)$ **27.** $y = \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-x} - 2x$
29. $y = \frac{3}{2}e^{3x-3} + \frac{9}{2}e^{-x+1} - 2x$.
31. $y_0 = -3, y_1 = 0$
33. $\dfrac{dP}{dt} = k(P - 200 + 10t)$

EJERCICIOS 2.1 (PÁGINA 41)

21. 0 es asintóticamente estable (atractor); 3 es inestable (repulsor).
23. 2 es semiestable.
25. -2 es inestable (repulsor); 0 es semiestable; 2 es asintóticamente estable (atractor).
27. -1 es asintóticamente estable (atractor); 0 es inestable (repulsor).
39. $0 < P_0 < h/k$
41. $\sqrt{mg/k}$

EJERCICIOS 2.2 (PÁGINA 50)

1. $y = -\frac{1}{5}\cos 5x + c$ **3.** $y = \frac{1}{3}e^{-3x} + c$
5. $y = cx^4$ **7.** $-3e^{-2y} = 2e^{3x} + c$
9. $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 = \frac{1}{2}y^2 + 2y + \ln|y| + c$

11. $4\cos y = 2x + \operatorname{sen} 2x + c$

13. $(e^x + 1)^{-2} + 2(e^y + 1)^{-1} = c$

15. $S = ce^{kr}$ **17.** $P = \dfrac{ce^t}{1 + ce^t}$

19. $(y + 3)^5 e^x = c(x + 4)^5 e^y$ **21.** $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)$

23. $x = \tan\left(4t - \frac{3}{4}\pi\right)$ **25.** $y = \dfrac{e^{-(1+1/x)}}{x}$

27. $y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - x^2}$ **29.** $y = e^{\int_4^x e^{t^2}dt}$

31. a) $y = 2, y = -2, y = 2\dfrac{3 - e^{4x-1}}{3 + e^{4x-1}}$

33. $y = -1$ y $y = 1$ son soluciones singulares del problema 21; $y = 0$ del problema 22

35. $y = 1$

37. $y = 1 + \frac{1}{10}\tan\left(\frac{1}{10}x\right)$

41. a) $y = -\sqrt{x^2 + x - 1}$ **c)** $\left(-\infty, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$

49. $y(x) = (4h/L^2)x^2 + a$

EJERCICIOS 2.3 (PÁGINA 60)

1. $y = ce^{5x}, (-\infty, \infty)$

3. $y = \frac{1}{4}e^{3x} + ce^{-x}, (-\infty, \infty)$; ce^{-x} es transitoria

5. $y = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}, (-\infty, \infty)$; ce^{-x^3} es transitoria

7. $y = x^{-1}\ln x + cx^{-1}, (0, \infty)$; la solución es transitoria

9. $y = cx - x\cos x, (0, \infty)$

11. $y = \frac{1}{7}x^3 - \frac{1}{5}x + cx^{-4}, (0, \infty)$; cx^{-4} es transitoria

13. $y = \frac{1}{2}x^{-2}e^x + cx^{-2}e^{-x}, (0, \infty)$; $cx^{-2}e^{-x}$ es transitoria

15. $x = 2y^6 + cy^4, (0, \infty)$

17. $y = \operatorname{sen} x + c\cos x, (-\pi/2, \pi/2)$

19. $(x + 1)e^x y = x^2 + c, (-1, \infty)$; la solución es transitoria

21. $(\sec\theta + \tan\theta)r = \theta - \cos\theta + c, (-\pi/2, \pi/2)$

23. $y = e^{-3x} + cx^{-1}e^{-3x}, (0, \infty)$; la solución es transitoria

25. $y = x^{-1}e^x + (2 - e)x^{-1}, (0, \infty)$

27. $i = \dfrac{E}{R} + \left(i_0 - \dfrac{E}{R}\right)e^{-Rt/L}, (-\infty, \infty)$

29. $(x + 1)y = x\ln x - x + 21, (0, \infty)$

31. $y = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}), & 0 \le x \le 3 \\ \frac{1}{2}(e^6 - 1)e^{-2x}, & x > 3 \end{cases}$

33. $y = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}, & 0 \le x < 1 \\ \left(\frac{1}{2}e + \frac{3}{2}\right)e^{-x^2}, & x \ge 1 \end{cases}$

35. $y = \begin{cases} 2x - 1 + 4e^{-2x}, & 0 \le x \le 1 \\ 4x^2\ln x + (1 + 4e^{-2})x^2, & x > 1 \end{cases}$

37. $y = e^{x^2-1} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{x^2}(\operatorname{erf}(x) - \operatorname{erf}(1))$

47. $E(t) = E_0 e^{-(t-4)/RC}$

EJERCICIOS 2.4 (PÁGINA 68)

1. $x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y = c$ **3.** $\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = c$

5. $x^2y^2 - 3x + 4y = c$ **7.** no exacta

9. $xy^3 + y^2\cos x - \frac{1}{2}x^2 = c$

11. no exacta

13. $xy - 2xe^x + 2e^x - 2x^3 = c$

15. $x^3y^3 - \tan^{-1}3x = c$

17. $-\ln|\cos x| + \cos x \operatorname{sen} y = c$

19. $t^4y - 5t^3 - ty + y^3 = c$

21. $\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y = \frac{4}{3}$

23. $4ty + t^2 - 5t + 3y^2 - y = 8$

25. $y^2\operatorname{sen} x - x^3y - x^2 + y\ln y - y = 0$

27. $k = 10$ **29.** $x^2y^2\cos x = c$

31. $x^2y^2 + x^3 = c$ **33.** $3x^2y^3 + y^4 = c$

35. $-2ye^{3x} + \frac{10}{3}e^{3x} + x = c$

37. $e^{y^2}(x^2 + 4) = 20$

39. c) $y_1(x) = -x^2 - \sqrt{x^4 - x^3 + 4}$

$y_2(x) = -x^2 + \sqrt{x^4 - x^3 + 4}$

45. a) $v(x) = 8\sqrt{\dfrac{x}{3} - \dfrac{9}{x^2}}$ **b)** 12.7 pies/s

EJERCICIOS 2.5 (PÁGINA 74)

1. $y + x\ln|x| = cx$

3. $(x - y)\ln|x - y| = y + c(x - y)$

5. $x + y\ln|x| = cy$

7. $\ln(x^2 + y^2) + 2\tan^{-1}(y/x) = c$

9. $4x = y(\ln|y| - c)^2$ **11.** $y^3 + 3x^3\ln|x| = 8x^3$

13. $\ln|x| = e^{y/x} - 1$ **15.** $y^3 = 1 + cx^{-3}$

17. $y^{-3} = x + \frac{1}{3} + ce^{3x}$ **19.** $e^{t/y} = ct$

21. $y^{-3} = -\frac{9}{5}x^{-1} + \frac{49}{5}x^{-6}$

23. $y = -x - 1 + \tan(x + c)$

25. $2y - 2x + \operatorname{sen} 2(x + y) = c$

27. $4(y - 2x + 3) = (x + c)^2$

29. $-\cot(x + y) + \csc(x + y) = x + \sqrt{2} - 1$

35. b) $y = \dfrac{2}{x} + \left(-\frac{1}{4}x + cx^{-3}\right)^{-1}$

EJERCICIOS 2.6 (PÁGINA 79)

1. $y_2 = 2.9800$, $y_4 = 3.1151$

3. $y_{10} = 2.5937$, $y_{20} = 2.6533$; $y = e^x$

5. $y_5 = 0.4198$, $y_{10} = 0.4124$

7. $y_5 = 0.5639$, $y_{10} = 0.5565$

9. $y_5 = 1.2194$, $y_{10} = 1.2696$

13. Euler: $y_{10} = 3.8191$, $y_{20} = 5.9363$

RK4: $y_{10} = 42.9931$, $y_{20} = 84.0132$

REPASO DEL CAPÍTULO 2 (PÁGINA 80)

1. $-A/k$, un repulsor para $k > 0$, un repulsor para $k < 0$
3. verdadero
5. $\dfrac{dy}{dx} = (y-1)^2(y-3)^3$
7. semiestable para n par e inestable para n impar; semiestable para n par y asintóticamente estable para n impar.
11. $2x + \operatorname{sen} 2x = 2\ln(y^2+1) + c$
13. $(6x+1)y^3 = -3x^3 + c$
15. $Q = ct^{-1} + \frac{1}{25}t^4(-1 + 5\ln t)$
17. $y = \frac{1}{4} + c(x^2+4)^{-4}$
19. $y = \csc x$, $(\pi, 2\pi)$
21. b) $y = \frac{1}{4}(x + 2\sqrt{y_0} - x_0)^2$, $(x_0 - 2\sqrt{y_0}, \infty)$

EJERCICIOS 3.1 (PÁGINA 89)

1. 7.9 años; 10 años
3. 760; aproximadamente 11 personas/año
5. 11 h
7. 136.5 h
9. $I(15) = 0.00098I_0$ o aproximadamente 0.1% de I_0
11. 15 600 años
13. $T(1) = 36.67°$ F; aproximadamente 3.06 min
15. aproximadamente 82.1 s; aproximadamente 145.7 s
17. 390°
19. aproximadamente 1.6 horas antes de descubierto el cuerpo
21. $A(t) = 200 - 170e^{-t/50}$
23. $A(t) = 1000 - 1000e^{-t/100}$
25. $A(t) = 1000 - 10t - \frac{1}{10}(100-t)^2$; 100 min
27. 64.38 lb
29. $i(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-500t}$; $i \to \frac{3}{5}$ como $t \to \infty$
31. $q(t) = \frac{1}{100} - \frac{1}{100}e^{-50t}$; $i(t) = \frac{1}{2}e^{-50t}$
33. $i(t) = \begin{cases} 60 - 60e^{-t/10}, & 0 \le t \le 20 \\ 60(e^2-1)e^{-t/10}, & t > 20 \end{cases}$
35. a) $v(t) = \dfrac{mg}{k} + \left(v_0 - \dfrac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}$
    b) $v \to \dfrac{mg}{k}$ como $t \to \infty$
    c) $s(t) = \dfrac{mg}{k}t - \dfrac{m}{k}\left(v_0 - \dfrac{mg}{k}\right)e^{-kt/m} + \dfrac{m}{k}\left(v_0 - \dfrac{mg}{k}\right)$
39. a) $v(t) = \dfrac{\rho g}{4k}\left(\dfrac{k}{\rho}t + r_0\right) - \dfrac{\rho g r_0}{4k}\left(\dfrac{r_0}{\dfrac{k}{\rho}t + r_0}\right)^3$
    c) $33\frac{1}{3}$ segundos
41. a) $P(t) = P_0 e^{(k_1 - k_2)t}$
43. a) Como $t \to \infty$, $x(t) \to r/k$.
    b) $x(t) = r/k - (r/k)e^{-kt}$; $(\ln 2)/k$
47. c) 1.988 pies

EJERCICIOS 3.2 (PÁGINA 99)

1. a) $N = 2000$
   b) $N(t) = \dfrac{2000\,e^t}{1999 + e^t}$; $N(10) = 1834$
3. 1 000 000; 5.29 meses
5. b) $P(t) = \dfrac{4(P_0-1) - (P_0-4)e^{-3t}}{(P_0-1) - (P_0-4)e^{-3t}}$
   c) Para $0 < P_0 < 1$, el tiempo en que desaparecerá es $t = -\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{4(P_0-1)}{P_0-4}$.
7. $P(t) = \dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \tan^{-1}\left(\dfrac{2P_0-5}{\sqrt{3}}\right)\right]$; el tiempo en que desaparecerá es $t = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\dfrac{5}{\sqrt{3}} + \tan^{-1}\left(\dfrac{2P_0-5}{\sqrt{3}}\right)\right]$
9. 29.3 g; $X \to 60$ como $t \to \infty$; 0 g de A y 30 g de B
11. a) $h(t) = \left(\sqrt{H} - \dfrac{4A_h}{A_w}t\right)^2$; I es $0 \le t \le \sqrt{H}A_w/4A_h$
    b) $576\sqrt{10}$ s o 30.36 min
13. a) aproximadamente 858.65 s o 14.31 min
    b) 243 s o 4.05 min
15. a) $v(t) = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\dfrac{kg}{m}}t + c_1\right)$ donde $c_1 = \tanh^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{k}{mg}}v_0\right)$
    b) $\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$
    c) $s(t) = \dfrac{m}{k}\ln\cosh\left(\sqrt{\dfrac{kg}{m}}t + c_1\right) + c_2$, donde $c_2 = -(m/k)\ln\cosh c_1$
17. a) $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv^2 - \rho V$, donde ρ es la densidad del agua
    b) $v(t) = \sqrt{\dfrac{mg - \rho V}{k}}\tanh\left(\dfrac{\sqrt{kmg - k\rho V}}{m}t + c_1\right)$
    c) $\sqrt{\dfrac{mg - \rho V}{k}}$
19. a) $W = 0$ y $W = 2$
    b) $W(x) = 2\operatorname{sech}^2(x - c_1)$
    c) $W(x) = 2\operatorname{sech}^2 x$

EJERCICIOS 3.3 (PÁGINA 110)

1. $x(t) = x_0 e^{-\lambda_1 t}$

$$y(t) = \frac{x_0\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

$$z(t) = x_0\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{-\lambda_2 t}\right)$$

3. 5, 20, 147 días. El tiempo cuando $y(t)$ y $z(t)$ son iguales tiene sentido porque se ha ido la mayor parte de A y la mitad de B han desparecido así que se debe haber formado la mitad de C.

5. $\dfrac{dx_1}{dt} = 6 - \frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt} = \frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2$

7. a) $\dfrac{dx_1}{dt} = 3\dfrac{x_2}{100 - t} - 2\dfrac{x_1}{100 + t}$

$\dfrac{dx_2}{dt} = 2\dfrac{x_1}{100 + t} - 3\dfrac{x_2}{100 - t}$

b) $x_1(t) + x_2(t) = 150$; $x_2(30) \approx 47.4$ lb

13. $L_1\dfrac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2)i_2 + R_1 i_3 = E(t)$

$L_2\dfrac{di_3}{dt} + R_1 i_2 + (R_1 + R_3)i_3 = E(t)$

15. $i(0) = i_0$, $s(0) = n - i_0$, $r(0) = 0$

REPASO DEL CAPÍTULO 3 (PÁGINA 113)

1. $dP/dt = 0.15P$

3. $P(45) = 8.99$ miles de millones

5. $x = 10\ln\left(\dfrac{10 + \sqrt{100 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{100 - y^2}$

7. a) $\dfrac{BT_1 + T_2}{1 + B}, \dfrac{BT_1 + T_2}{1 + B}$

b) $T(t) = \dfrac{BT_1 + T_2}{1 + B} + \dfrac{T_1 - T_2}{1 + B}e^{k(1+B)t}$

9. $i(t) = \begin{cases} 4t - \frac{1}{5}t^2, & 0 \le t < 10 \\ 20, & t \ge 10 \end{cases}$

11. $x(t) = \dfrac{\alpha c_1 e^{\alpha k_1 t}}{1 + c_1 e^{\alpha k_1 t}}$, $y(t) = c_2(1 + c_1 e^{\alpha k_1 t})^{k_2/k_1}$

13. $x = -y + 1 + c_2 e^{-y}$

15. a) $p(x) = -\rho(x)g\left(y + \dfrac{1}{K}\displaystyle\int q(x)\,dx\right)$

b) El cociente está aumentando; el cociente es constante

d) $\rho(x) = -\dfrac{Kp}{g(Ky + \int q(x)\,dx)}$; $\rho(x) = \sqrt{\dfrac{Kp}{2(CKp - \beta gx)}}$

EJERCICIOS 4.1 (PÁGINA 128)

1. $y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

3. $y = 3x - 4x\ln x$

9. $(-\infty, 2)$

11. a) $y = \dfrac{e}{e^2 - 1}(e^x - e^{-x})$ **b)** $y = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{senh} 1}$

13. a) $y = e^x\cos x - e^x\operatorname{sen} x$

b) ninguna solución

c) $y = e^x\cos x + e^{-\pi/2}e^x\operatorname{sen} x$

d) $y = c_2 e^x\operatorname{sen} x$, donde c_2 es arbitraria

15. dependiente **17.** dependiente

19. dependiente **21.** independiente

23. Las funciones satisfacen la ED y son linealmente independientes en el intervalo ya que $W(e^{-3x}, e^{4x}) = 7e^x \neq 0$; $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{4x}$.

25. Las funciones satisfacen la ED y son linealmente independientes en el intervalo ya que $W(e^x\cos 2x, e^x\operatorname{sen} 2x) = 2e^{2x} \neq 0$; $y = c_1e^x\cos 2x + c_2e^x\operatorname{sen} 2x$.

27. Las funciones satisfacen la ED y son linealmente independientes en el intervalo ya que $W(x^3, x^4) = x^6 \neq 0$; $y = c_1x^3 + c_2x^4$.

29. Las funciones satisfacen la ED y son linealmente independientes en el intervalo ya que $W(x, x^{-2}, x^{-2}\ln x) = 9x^{-6} \neq 0$; $y = c_1x + c_2x^{-2} + c_3x^{-2}\ln x$.

35. b) $y_p = x^2 + 3x + 3e^{2x}$; $y_p = -2x^2 - 6x - \frac{1}{3}e^{2x}$

EJERCICIOS 4.2 (PÁGINA 132)

1. $y_2 = xe^{2x}$ **3.** $y_2 = \operatorname{sen} 4x$

5. $y_2 = \operatorname{senh} x$ **7.** $y_2 = xe^{2x/3}$

9. $y_2 = x^4\ln|x|$ **11.** $y_2 = 1$

13. $y_2 = x\cos(\ln x)$ **15.** $y_2 = x^2 + x + 2$

17. $y_2 = e^{2x}$, $y_p = -\frac{1}{2}$ **19.** $y_2 = e^{2x}$, $y_p = \frac{5}{2}e^{3x}$

EJERCICIOS 4.3 (PÁGINA 138)

1. $y = c_1 + c_2e^{-x/4}$ **3.** $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$

5. $y = c_1e^{-4x} + c_2xe^{-4x}$ **7.** $y = c_1e^{2x/3} + c_2e^{-x/4}$

9. $y = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x$

11. $y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x)$

13. $y = e^{-x/3}\left(c_1\cos\frac{1}{3}\sqrt{2}\,x + c_2\operatorname{sen}\frac{1}{3}\sqrt{2}\,x\right)$

15. $y = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{5x}$

17. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} + c_3xe^{3x}$

19. $u = c_1e^t + e^{-t}(c_2\cos t + c_3\operatorname{sen} t)$

21. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}$

23. $y = c_1 + c_2x + e^{-x/2}\left(c_3\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_4\operatorname{sen}\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)$

25. $y = c_1\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_3x\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_4x\operatorname{sen}\frac{1}{2}\sqrt{3}x$

27. $u = c_1e^r + c_2re^r + c_3e^{-r} + c_4re^{-r} + c_5e^{-5r}$

29. $y = 2\cos 4x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x$

31. $y = -\frac{1}{3}e^{-(t-1)} + \frac{1}{3}e^{5(t-1)}$

33. $y = 0$

35. $y = \frac{5}{36} - \frac{5}{36}e^{-6x} + \frac{1}{6}xe^{-6x}$
37. $y = e^{5x} - xe^{5x}$
39. $y = 0$
41. $y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{\sqrt{3}}\right)e^{-\sqrt{3}x} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right)e^{\sqrt{3}x}$;

$y = \cosh\sqrt{3}x + \frac{5}{\sqrt{3}}\,\text{senh}\,\sqrt{3}x$

EJERCICIOS 4.4 (PÁGINA 148)

1. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + 3$
3. $y = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x} + \frac{6}{5}x + \frac{3}{5}$
5. $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + x^2 - 4x + \frac{7}{2}$
7. $y = c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\,\text{sen}\,\sqrt{3}x + \left(-4x^2 + 4x - \frac{4}{3}\right)e^{3x}$
9. $y = c_1 + c_2e^x + 3x$
11. $y = c_1e^{x/2} + c_2xe^{x/2} + 12 + \frac{1}{2}x^2e^{x/2}$
13. $y = c_1\cos 2x + c_2\,\text{sen}\,2x - \frac{3}{4}x\cos 2x$
15. $y = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x - \frac{1}{2}x^2\cos x + \frac{1}{2}x\,\text{sen}\,x$
17. $y = c_1e^x\cos 2x + c_2e^x\,\text{sen}\,2x + \frac{1}{4}xe^x\,\text{sen}\,2x$
19. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} - \frac{1}{2}\cos x$
$\quad + \frac{12}{25}\,\text{sen}\,2x - \frac{9}{25}\cos 2x$
21. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{6x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{6}{37}\cos x + \frac{1}{37}\,\text{sen}\,x$
23. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x - x - 3 - \frac{2}{3}x^3e^x$
25. $y = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x + c_3x\cos x + c_4x\,\text{sen}\,x$
$\quad + x^2 - 2x - 3$
27. $y = \sqrt{2}\,\text{sen}\,2x - \frac{1}{2}$
29. $y = -200 + 200e^{-x/5} - 3x^2 + 30x$
31. $y = -10e^{-2x}\cos x + 9e^{-2x}\,\text{sen}\,x + 7e^{-4x}$
33. $x = \frac{F_0}{2\omega^2}\,\text{sen}\,\omega t - \frac{F_0}{2\omega}t\cos\omega t$
35. $y = 11 - 11e^x + 9xe^x + 2x - 12x^2e^x + \frac{1}{2}e^{5x}$
37. $y = 6\cos x - 6(\cot 1)\,\text{sen}\,x + x^2 - 1$
39. $y = \dfrac{-4\,\text{sen}\,\sqrt{3}x}{\text{sen}\,\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos\sqrt{3}} + 2x$
41. $y = \begin{cases}\cos 2x + \frac{5}{6}\,\text{sen}\,2x + \frac{1}{3}\,\text{sen}\,x, & 0 \le x \le \pi/2\\ \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{5}{6}\,\text{sen}\,2x, & x > \pi/2\end{cases}$

EJERCICIOS 4.5 (PÁGINA 156)

1. $(3D - 2)(3D + 2)y = \text{sen}\,x$
3. $(D - 6)(D + 2)y = x - 6$
5. $D(D + 5)^2y = e^x$
7. $(D - 1)(D - 2)(D + 5)y = xe^{-x}$
9. $D(D + 2)(D^2 - 2D + 4)y = 4$
15. D^4
17. $D(D - 2)$
19. $D^2 + 4$
21. $D^3(D^2 + 16)$
23. $(D + 1)(D - 1)^3$
25. $D(D^2 - 2D + 5)$
27. $1, x, x^2, x^3, x^4$
29. $e^{6x}, e^{-3x/2}$
31. $\cos\sqrt{5}x$, $\text{sen}\,\sqrt{5}x$
33. $1, e^{5x}, xe^{5x}$
35. $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{3x} - 6$
37. $y = c_1 + c_2e^{-x} + 3x$
39. $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + \frac{1}{2}x + 1$
41. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + \frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 8x^2$
43. $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{4x} + \frac{1}{7}xe^{4x}$
45. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - e^x + 3$
47. $y = c_1\cos 5x + c_2\,\text{sen}\,5x + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,x$
49. $y = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x} - \frac{1}{49}xe^{4x} + \frac{2}{343}e^{4x}$
51. $y = c_1e^{-x} + c_2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x - \frac{1}{4}x^2e^x + \frac{1}{4}xe^x - 5$
53. $y = e^x(c_1\cos 2x + c_2\,\text{sen}\,2x) + \frac{1}{3}e^x\,\text{sen}\,x$
55. $y = c_1\cos 5x + c_2\,\text{sen}\,5x - 2x\cos 5x$
57. $y = e^{-x/2}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\,\text{sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$
$\quad + \text{sen}\,x + 2\cos x - x\cos x$
59. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-8x} + \frac{11}{256}x^2 + \frac{7}{32}x^3 - \frac{1}{16}x^4$
61. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x + x - 13$
63. $y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{2}x^2$
65. $y = \frac{5}{8}e^{-8x} + \frac{5}{8}e^{8x} - \frac{1}{4}$
67. $y = -\frac{41}{125} + \frac{41}{125}e^{5x} - \frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x$
69. $y = -\pi\cos x - \frac{11}{3}\,\text{sen}\,x - \frac{8}{3}\cos 2x + 2x\cos x$
71. $y = 2e^{2x}\cos 2x - \frac{3}{64}e^{2x}\,\text{sen}\,2x + \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{32}x$

EJERCICIOS 4.6 (PÁGINA 161)

1. $y = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x + x\,\text{sen}\,x + \cos x\ln|\cos x|$
3. $y = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x - \frac{1}{2}x\cos x$
5. $y = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2x$
7. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}x\,\text{senh}\,x$
9. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{4}\left(e^{2x}\ln|x| - e^{-2x}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{4t}}{t}\,dt\right)$,
$x_0 > 0$
11. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(1 + e^x)$
13. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} - e^{-2x}\,\text{sen}\,e^x$
15. $y = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t}\ln t - \frac{3}{4}t^2e^{-t}$
17. $y = c_1e^x\,\text{sen}\,x + c_2e^x\cos x + \frac{1}{3}xe^x\,\text{sen}\,x$
$\quad + \frac{1}{3}e^x\cos x\ln|\cos x|$
19. $y = \frac{1}{4}e^{-x/2} + \frac{3}{4}e^{x/2} + \frac{1}{8}x^2e^{x/2} - \frac{1}{4}xe^{x/2}$
21. $y = \frac{4}{9}e^{-4x} + \frac{25}{36}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{9}e^{-x}$
23. $y = c_1x^{-1/2}\cos x + c_2x^{-1/2}\,\text{sen}\,x + x^{-1/2}$
25. $y = c_1 + c_2\cos x + c_3\,\text{sen}\,x - \ln|\cos x|$
$\quad - \text{sen}\,x\ln|\sec x + \tan x|$

EJERCICIOS 4.7 (PÁGINA 168)

1. $y = c_1x^{-1} + c_2x^2$
3. $y = c_1 + c_2\ln x$
5. $y = c_1\cos(2\ln x) + c_2\,\text{sen}(2\ln x)$

7. $y = c_1x^{(2-\sqrt{6})} + c_2x^{(2+\sqrt{6})}$

9. $y = c_1 \cos\left(\frac{1}{5}\ln x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{5}\ln x\right)$

11. $y = c_1x^{-2} + c_2x^{-2}\ln x$

13. $y = x^{-1/2}\left[c_1 \cos\left(\frac{1}{6}\sqrt{3}\ln x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\sqrt{3}\ln x\right)\right]$

15. $y = c_1x^3 + c_2\cos\left(\sqrt{2}\ln x\right) + c_3\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\ln x\right)$

17. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^{-3}$

19. $y = c_1 + c_2x^5 + \frac{1}{5}x^5\ln x$

21. $y = c_1x + c_2x\ln x + x(\ln x)^2$

23. $y = c_1x^{-1} + c_2x - \ln x$

25. $y = 2 - 2x^{-2}$ 27. $y = \cos(\ln x) + 2\operatorname{sen}(\ln x)$

29. $y = \frac{3}{4} - \ln x + \frac{1}{4}x^2$ 31. $y = c_1x^{-10} + c_2x^2$

33. $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-8} + \frac{1}{30}x^2$

35. $y = x^2[c_1\cos(3\ln x) + c_2\operatorname{sen}(3\ln x)] + \frac{4}{13} + \frac{3}{10}x$

37. $y = 2(-x)^{1/2} - 5(-x)^{1/2}\ln(-x), x < 0$

EJERCICIOS 4.8 (PÁGINA 172)

1. $x = c_1e^t + c_2te^t$
   $y = (c_1 - c_2)e^t + c_2te^t$

3. $x = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t + t + 1$
   $y = c_1\operatorname{sen} t - c_2\cos t + t - 1$

5. $x = \frac{1}{2}c_1\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}c_2\cos t - 2c_3\operatorname{sen}\sqrt{6}t - 2c_4\cos\sqrt{6}t$
   $y = c_1\operatorname{sen} t + c_2\cos t + c_3\operatorname{sen}\sqrt{6}t + c_4\cos\sqrt{6}t$

7. $x = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3\operatorname{sen} 2t + c_4\cos 2t + \frac{1}{5}e^t$
   $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - c_3\operatorname{sen} 2t - c_4\cos 2t - \frac{1}{5}e^t$

9. $x = c_1 - c_2\cos t + c_3\operatorname{sen} t + \frac{17}{15}e^{3t}$
   $y = c_1 + c_2\operatorname{sen} t + c_3\cos t - \frac{4}{15}e^{3t}$

11. $x = c_1e^t + c_2e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t + c_3e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\sqrt{3}t$
    $y = \left(-\frac{3}{2}c_2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}c_3\right)e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t$
    $+ \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}c_2 - \frac{3}{2}c_3\right)e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\sqrt{3}t$

13. $x = c_1e^{4t} + \frac{4}{3}e^t$
    $y = -\frac{3}{4}c_1e^{4t} + c_2 + 5e^t$

15. $x = c_1 + c_2t + c_3e^t + c_4e^{-t} - \frac{1}{2}t^2$
    $y = (c_1 - c_2 + 2) + (c_2 + 1)t + c_4e^{-t} - \frac{1}{2}t^2$

17. $x = c_1e^t + c_2e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\sqrt{3}t + c_3e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t$
    $y = c_1e^t + \left(-\frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}c_3\right)e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\sqrt{3}t$
    $+ \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}c_2 - \frac{1}{2}c_3\right)e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t$
    $z = c_1e^t + \left(-\frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}c_3\right)e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\sqrt{3}t$
    $+ \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}c_2 - \frac{1}{2}c_3\right)e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t$

19. $x = -6c_1e^{-t} - 3c_2e^{-2t} + 2c_3e^{3t}$
    $y = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t}$
    $z = 5c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t}$

21. $x = e^{-3t+3} - te^{-3t+3}$
    $y = -e^{-3t+3} + 2te^{-3t+3}$

23. $mx'' = 0$
    $my'' = -mg;$
    $x = c_1t + c_2$
    $y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_3t + c_4$

EJERCICIOS 4.9 (PÁGINA 177)

3. $y = \ln|\cos(c_1 - x)| + c_2$

5. $y = \dfrac{1}{c_1^2}\ln|c_1x + 1| - \dfrac{1}{c_1}x + c_2$

7. $\frac{1}{3}y^3 - c_1y = x + c_2$

9. $y = \tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right), -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

11. $y = -\dfrac{1}{c_1}\sqrt{1 - c_1^2x^2} + c_2$

13. $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \cdots$

15. $y = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{60}x^5 + \cdots$

17. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

REPASO DEL CAPÍTULO 4 (PÁGINA 178)

1. $y = 0$
3. falso
5. $(-\infty, 0); (0, \infty)$
7. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-5x} + c_3xe^{-5x} + c_4e^x + c_5xe^x + c_6x^2e^x;$
   $y = c_1x^3 + c_2x^{-5} + c_3x^{-5}\ln x + c_4x + c_5x\ln x + c_6x(\ln x)^2$

9. $y = c_1e^{(1+\sqrt{3})x} + c_2e^{(1-\sqrt{3})x}$

11. $y = c_1 + c_2e^{-5x} + c_3xe^{-5x}$

13. $y = c_1e^{-x/3} + e^{-3x/2}\left(c_2\cos\frac{1}{2}\sqrt{7}x + c_3\operatorname{sen}\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right)$

15. $y = e^{3x/2}\left(c_2\cos\frac{1}{2}\sqrt{11}x + c_3\operatorname{sen}\frac{1}{2}\sqrt{11}x\right) + \frac{4}{5}x^3 + \frac{36}{25}x^2$
    $+ \frac{46}{125}x - \frac{222}{625}$

17. $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + \frac{1}{5}\operatorname{sen} x - \frac{1}{5}\cos x + \frac{4}{3}x$

19. $y = e^x(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x) - e^x\cos x\ln|\sec x + \tan x|$

21. $y = c_1x^{-1/3} + c_2x^{1/2}$

23. $y = c_1x^2 + c_2x^3 + x^4 - x^2\ln x$

25. **a)** $y = c_1\cos\omega x + c_2\operatorname{sen}\omega x + A\cos\alpha x$
    $+ B\operatorname{sen}\alpha x, \quad \omega \neq \alpha;$
    $y = c_1\cos\omega x + c_2\operatorname{sen}\omega x + Ax\cos\omega x$
    $+ Bx\operatorname{sen}\omega x, \quad \omega = \alpha$

b) $y = c_1e^{-\omega x} + c_2e^{\omega x} + Ae^{\alpha x}$, $\omega \neq \alpha$;
$y = c_1e^{-\omega x} + c_2e^{\omega x} + Axe^{\omega x}$, $\omega = \alpha$

27. a) $y = c_1\cosh x + c_2\operatorname{senh} x + c_3x\cosh x + c_4x\operatorname{senh} x$

b) $y_p = Ax^2\cosh x + Bx^2\operatorname{senh} x$

29. $y = e^{x-\pi}\cos x$

31. $y = \frac{13}{4}e^x - \frac{5}{4}e^{-x} - x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$

33. $y = x^2 + 4$

37. $x = -c_1e^t - \frac{3}{2}c_2e^{2t} + \frac{5}{2}$
$y = c_1e^t + c_2e^{2t} - 3$

39. $x = c_1e^t + c_2e^{5t} + te^t$
$y = -c_1e^t + 3c_2e^{5t} - te^t + 2e^t$

EJERCICIOS 5.1 (PÁGINA 194)

1. $\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{8}$

3. $x(t) = -\frac{1}{4}\cos 4\sqrt{6}t$

5. a) $x\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = -\dfrac{1}{4}$; $x\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = -\dfrac{1}{2}$; $x\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{4}$;
$x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$; $x\left(\dfrac{9\pi}{32}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

b) 4 pies/s; hacia abajo

c) $t = \dfrac{(2n+1)\pi}{16}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

7. a) la masa de 20 kg

b) la masa de 20 kg; la masa de 50 kg

c) $t = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; en la posición de equilibrio; la masa de 50 kg se está moviendo hacia arriba mientras que la masa de 20 kg se está moviendo hacia arriba cuando n es par y hacia abajo cuando n es impar.

9. $x(t) = \dfrac{1}{2}\cos 2t + \dfrac{3}{4}\operatorname{sen} 2t = \dfrac{\sqrt{13}}{4}\operatorname{sen}(2t + 0.5880)$

11. a) $x(t) = -\frac{2}{3}\cos 10t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 10t$
$= \frac{5}{6}\operatorname{sen}(10t - 0.927)$

b) $\dfrac{5}{6}$ pies; $\dfrac{\pi}{5}$

c) 15 ciclos

d) 0.721 s

e) $\dfrac{(2n+1)\pi}{20} + 0.0927$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

f) $x(3) = -0.597$ pies **g)** $x'(3) = -5.814$ pies/s

h) $x''(3) = 59.702$ pies/s^2 **i)** $\pm 8\frac{1}{3}$ pies/s

j) $0.1451 + \dfrac{n\pi}{5}$; $0.3545 + \dfrac{n\pi}{5}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

k) $0.3545 + \dfrac{n\pi}{5}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

13. 120 lb/pies; $x(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{sen} 8\sqrt{3}\,t$

17. a) arriba **b)** apuntando hacia arriba

19. a) abajo **b)** apuntando hacia arriba

21. $\frac{1}{4}$ s; $\frac{1}{2}$ s, $x\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-2}$; esto es, la pesa está aproximadamente 0.14 pies debajo de la posición de equilibrio.

23. a) $x(t) = \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-8t}$

b) $x(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-8t}$

25. a) $x(t) = e^{-2t}\left(-\cos 4t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t\right)$

b) $x(t) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}e^{-2t}\operatorname{sen}(4t + 4.249)$

c) $t = 1.294$ s

27. a) $\beta > \frac{5}{2}$ **b)** $\beta = \frac{5}{2}$ **c)** $0 < \beta < \frac{5}{2}$

29. $x(t) = e^{-t/2}\left(-\dfrac{4}{3}\cos\dfrac{\sqrt{47}}{2}t - \dfrac{64}{3\sqrt{47}}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{47}}{2}t\right)$
$+ \dfrac{10}{3}(\cos 3t + \operatorname{sen} 3t)$

31. $x(t) = \frac{1}{4}e^{-4t} + te^{-4t} - \frac{1}{4}\cos 4t$

33. $x(t) = -\frac{1}{2}\cos 4t + \frac{9}{4}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t$
$- 2e^{-2t}\operatorname{sen} 4t$

35. a) $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k(x-h) - \beta\dfrac{dx}{dt}$ o
$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{dx}{dt} + \omega^2x = \omega^2h(t)$,
donde $2\lambda = \beta/m$ y $\omega^2 = k/m$

b) $x(t) = e^{-2t}\left(-\frac{56}{13}\cos 2t - \frac{72}{13}\operatorname{sen} 2t\right) + \frac{56}{13}\cos t$
$+ \frac{32}{13}\operatorname{sen} t$

37. $x(t) = -\cos 2t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2t + \frac{3}{4}t\operatorname{sen} 2t + \frac{5}{4}t\cos 2t$

39. b) $\dfrac{F_0}{2\omega}t\operatorname{sen}\omega t$

45. 4.568 C; 0.0509 s

47. $q(t) = 10 - 10e^{-3t}(\cos 3t + \operatorname{sen} 3t)$
$i(t) = 60e^{-3t}\operatorname{sen} 3t$; 10.432 C

49. $q_p = \frac{100}{13}\operatorname{sen} t + \frac{150}{13}\cos t$
$i_p = \frac{100}{13}\cos t - \frac{150}{13}\operatorname{sen} t$

53. $q(t) = -\frac{1}{2}e^{-10t}(\cos 10t + \operatorname{sen} 10t) + \frac{3}{2}$; $\frac{3}{2}$ C

57. $q(t) = \left(q_0 - \dfrac{E_0C}{1-\gamma^2LC}\right)\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$
$+ \sqrt{LC}\,i_0\operatorname{sen}\dfrac{t}{\sqrt{LC}} + \dfrac{E_0C}{1-\gamma^2LC}\cos\gamma t$

$i(t) = i_0\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}} - \dfrac{1}{\sqrt{LC}}\left(q_0 - \dfrac{E_0C}{1-\gamma^2LC}\right)\operatorname{sen}\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$
$- \dfrac{E_0C\gamma}{1-\gamma^2LC}\operatorname{sen}\gamma t$

EJERCICIOS 5.2 (PÁGINA 204)

1. a) $y(x) = \dfrac{w_0}{24EI}(6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4)$

3. a) $y(x) = \dfrac{w_0}{48EI}(3L^2x^2 - 5Lx^3 + 2x^4)$

5. a) $y(x) = \dfrac{w_0}{360EI}(7L^4x - 10L^2x^3 + 3x^5)$

c) $x \approx 0.51933,\ y_{\text{máx}} \approx 0.234799$

7. $$y(x) = -\frac{w_0EI}{P^2}\cosh\sqrt{\frac{P}{EI}}x + \left(\frac{w_0EI}{P^2}\operatorname{senh}\sqrt{\frac{P}{EI}}L - \frac{w_0L\sqrt{EI}}{P\sqrt{P}}\right)\frac{\operatorname{senh}\sqrt{\frac{P}{EI}}x}{\cosh\sqrt{\frac{P}{EI}}L} + \frac{w_0}{2P}x^2 + \frac{w_0EI}{P^2}$$

9. $\lambda_n = n^2,\ n = 1, 2, 3, \ldots;\quad y = \operatorname{sen} nx$

11. $\lambda_n = \dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots;$
$y = \cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2L}$

13. $\lambda_n = n^2,\ n = 0, 1, 2, \ldots;\quad y = \cos nx$

15. $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{25},\ n = 1, 2, 3, \ldots;\quad y = e^{-x}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{5}$

17. $\lambda_n = n^2,\ n = 1, 2, 3, \ldots;\quad y = \operatorname{sen}(n \ln x)$

19. $\lambda_n = n^4\pi^4,\quad n = 1, 2, 3, \ldots;\quad y = \operatorname{sen} n\pi x$

21. $x = L/4,\ x = L/2,\ x = 3L/4$

25. $\omega_n = \dfrac{n\pi\sqrt{T}}{L\sqrt{\rho}},\ n = 1, 2, 3, \ldots;\quad y = \operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}$

27. $u(r) = \left(\dfrac{u_0 - u_1}{b - a}\right)\dfrac{ab}{r} + \dfrac{u_1b - u_0a}{b - a}$

EJERCICIOS 5.3 (PÁGINA 213)

7. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0$

15. a) 5 pies **b)** $4\sqrt{10}$ pies/s **c)** $0 \le t \le \frac{3}{8}\sqrt{10}$; 7.5 pies

17. a) $xy'' = r\sqrt{1 + (y')^2}$.
Cuando $t = 0,\ x = a,\ y = 0,\ dy/dx = 0$.

b) Cuando $r \neq 1$,
$$y(x) = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{1+r}\left(\frac{x}{a}\right)^{1+r} - \frac{1}{1-r}\left(\frac{x}{a}\right)^{1-r}\right] + \frac{ar}{1-r^2}$$

Cuando $r = 1$,
$$y(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2a}(x^2 - a^2) + \frac{1}{a}\ln\frac{a}{x}\right]$$

c) Las trayectorias se intersecan cuando $r < 1$.

REPASO DEL CAPÍTULO 5 (PÁGINA 216)

1. 8 pies
3. $\frac{5}{4}$m
5. Falso; podría existir una fuerza aplicada que impulsa al sistema.
7. sobreamortiguado
9. $y = 0$ puesto que $\lambda = 8$ no es un eigenvalor
11. 14.4 lb
13. $x(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$
15. $0 < m \le 2$
17. $\gamma = \frac{8}{3}\sqrt{3}$
19. $x(t) = e^{-4t}\left(\frac{26}{17}\cos 2\sqrt{2}t + \frac{28}{17}\sqrt{2}\operatorname{sen} 2\sqrt{2}t\right) + \frac{8}{17}e^{-t}$
21. a) $q(t) = -\frac{1}{150}\operatorname{sen} 100t + \frac{1}{75}\operatorname{sen} 50t$

b) $i(t) = -\frac{2}{3}\cos 100t + \frac{2}{3}\cos 50t$

c) $t = \dfrac{n\pi}{50},\ n = 0, 1, 2, \ldots$

25. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

EJERCICIOS 6.1 (PÁGINA 230)

1. $R = \frac{1}{2},\ \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

3. $R = 10,\ (-5, 15)$

5. $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{4}{315}x^7 + \cdots$

7. $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \cdots,\ (-\pi/2, \pi/2)$

9. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}(k-2)c_{k-2}x^k$

11. $\displaystyle 2c_1 + \sum_{k=1}^{\infty}[2(k+1)c_{k+1} + 6c_{k-1}]x^k$

15. 5; 4

17. $$y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^6 + \frac{1}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^9 + \cdots\right]$$
$$y_2(x) = c_1\left[x + \frac{1}{4\cdot 3}x^4 + \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 + \frac{1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^{10} + \cdots\right]$$

19. $$y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{21}{6!}x^6 - \cdots\right]$$
$$y_2(x) = c_1\left[x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{5}{5!}x^5 + \frac{45}{7!}x^7 + \cdots\right]$$

21. $y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4^2}{6!}x^6 - \frac{7^2 \cdot 4^2}{9!}x^9 + \cdots\right]$

$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{2^2}{4!}x^4 + \frac{5^2 \cdot 2^2}{7!}x^7 - \frac{8^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2}{10!}x^{10} + \cdots\right]$

23. $y_1(x) = c_0;\ y_2(x) = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n$

25. $y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots\right]$

$y_2(x) = c_1\left[x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots\right]$

27. $y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{4 \cdot 4!}x^4 + \frac{23 \cdot 7}{8 \cdot 6!}x^6 - \cdots\right]$

$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{14}{2 \cdot 5!}x^5 - \frac{34 \cdot 14}{4 \cdot 7!}x^7 - \cdots\right]$

29. $y(x) = -2\left[1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right] + 6x$

$= 8x - 2e^x$

31. $y(x) = 3 - 12x^2 + 4x^4$

33. $y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right]$

$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots\right]$

EJERCICIOS 6.2 (PÁGINA 239)

1. $x = 0$, punto singular irregular

3. $x = -3$, punto singular regular; $x = 3$, punto singular irregular

5. $x = 0, 2i, -2i$, puntos singulares regulares

7. $x = -3, 2$, puntos singulares regulares

9. $x = 0$, punto singular irregular; $x = -5, 5, 2$, puntos singulares regulares

11. para $x = 1$: $p(x) = 5$, $q(x) = \frac{x(x-1)^2}{x+1}$

para $x = -1$: $p(x) = \frac{5(x+1)}{x-1}$, $q(x) = x^2 + x$

13. $r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = -1$

15. $r_1 = \frac{3}{2}, r_2 = 0$

$y(x) = C_1x^{3/2}\left[1 - \frac{2}{5}x + \frac{2^2}{7 \cdot 5 \cdot 2}x^2 - \frac{2^3}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3!}x^3 + \cdots\right]$

$+ C_2\left[1 + 2x - 2x^2 + \frac{2^3}{3 \cdot 3!}x^3 - \cdots\right]$

17. $r_1 = \frac{7}{8}, r_2 = 0$

$y(x) = c_1x^{7/8}\left[1 - \frac{2}{15}x + \frac{2^2}{23 \cdot 15 \cdot 2}x^2 - \frac{2^3}{31 \cdot 23 \cdot 15 \cdot 3!}x^3 + \cdots\right]$

$+ c_2\left[1 - 2x + \frac{2^2}{9 \cdot 2}x^2 - \frac{2^3}{17 \cdot 9 \cdot 3!}x^3 + \cdots\right]$

19. $r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = 0$

$y(x) = C_1x^{1/3}\left[1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3^2 \cdot 2}x^2 + \frac{1}{3^3 \cdot 3!}x^3 + \cdots\right]$

$+ C_2\left[1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5 \cdot 2}x^2 + \frac{1}{8 \cdot 5 \cdot 2}x^3 + \cdots\right]$

21. $r_1 = \frac{5}{2}, r_2 = 0$

$y(x) = C_1x^{5/2}\left[1 + \frac{2 \cdot 2}{7}x + \frac{2^2 \cdot 3}{9 \cdot 7}x^2 + \frac{2^3 \cdot 4}{11 \cdot 9 \cdot 7}x^3 + \cdots\right]$

$+ C_2\left[1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \cdots\right]$

23. $r_1 = \frac{2}{3}, r_2 = \frac{1}{3}$

$y(x) = C_1x^{2/3}\left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{28}x^2 - \frac{1}{21}x^3 + \cdots\right]$

$+ C_2x^{1/3}\left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{120}x^3 + \cdots\right]$

25. $r_1 = 0, r_2 = -1$

$y(x) = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n} + C_2x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$

$= C_1x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + C_2x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$

$= \frac{1}{x}[C_1 \operatorname{senh} x + C_2 \cosh x]$

27. $r_1 = 1, r_2 = 0$

$y(x) = C_1x + C_2\left[x \ln x - 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{72}x^4 + \cdots\right]$

29. $r_1 = r_2 = 0$

$y(x) = C_1y(x) + C_2\left[y_1(x) \ln x + y_1(x)\left(-x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3 \cdot 3!}x^3 + \frac{1}{4 \cdot 4!}x^4 - \cdots\right)\right]$

donde $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = e^x$

33. b) $y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\sqrt{\lambda}\,t)^{2n} = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\,t)}{\sqrt{\lambda}\,t}$

$y_2(t) = t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{\lambda}\,t)^{2n} = \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\,t)}{t}$

c) $y = C_1 x \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{x}\right) + C_2 x \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{x}\right)$

EJERCICIOS 6.3 (PÁGINA 250)

1. $y = c_1 J_{1/3}(x) + c_2 J_{-1/3}(x)$
3. $y = c_1 J_{5/2}(x) + c_2 J_{-5/2}(x)$
5. $y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$
7. $y = c_1 J_2(3x) + c_2 Y_2(3x)$
9. $y = c_1 J_{2/3}(5x) + c_2 J_{-2/3}(5x)$
11. $y = c_1 x^{-1/2} J_{1/2}(\alpha x) + c_2 x^{-1/2} J_{-1/2}(\alpha x)$
13. $y = x^{-1/2}[c_1 J_1(4x^{1/2}) + c_2 Y_1(4x^{1/2})]$
15. $y = x[c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x)]$
17. $y = x^{1/2}[c_1 J_{3/2}(x) + c_2 Y_{3/2}(x)]$
19. $y = x^{-1}[c_1 J_{1/2}(\frac{1}{2}x^2) + c_2 J_{-1/2}(\frac{1}{2}x^2)]$
23. $y = x^{1/2}[c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)]$
$= C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$
25. $y = x^{-1/2}[c_1 J_{1/2}(\frac{1}{8}x^2) + c_2 J_{-1/2}(\frac{1}{8}x^2)]$
$= C_1 x^{-3/2}\operatorname{sen}(\frac{1}{8}x^2) + C_2 x^{-3/2}\cos(\frac{1}{8}x^2)$
35. $y = c_1 x^{1/2} J_{1/3}(\frac{2}{3}\alpha x^{3/2}) + c_2 x^{1/2} J_{-1/3}(\frac{2}{3}\alpha x^{3/2})$
45. $P_2(x), P_3(x), P_4(x)$ y $P_5(x)$ están dados en el texto,
$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$,
$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
47. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 12, \lambda_3 = 30$

REPASO DEL CAPÍTULO 6 (PÁGINA 253)

1. Falso
3. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
7. $x^2(x-1)y'' + y' + y = 0$
9. $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = 0$
$y_1(x) = C_1 x^{1/2}[1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{630}x^3 + \cdots]$
$y_2(x) = C_2[1 - x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{90}x^3 + \cdots]$
11. $y_1(x) = c_0[1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{8}x^4 + \cdots]$
$y_2(x) = c_1[x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots]$
13. $r_1 = 3, r_2 = 0$
$y_1(x) = C_1 x^3[1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{120}x^3 + \cdots]$
$y_2(x) = C_2[1 + x + \frac{1}{2}x^2]$
15. $y(x) = 3[1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{15}x^6 + \cdots]$
$- 2[x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{48}x^7 + \cdots]$
17. $\frac{1}{6}\pi$
19. $x = 0$ es un punto ordinario

21. $y(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3^2 \cdot 2!}x^6 - \frac{1}{3^3 \cdot 3!}x^9 + \cdots\right]$
$+ c_1\left[x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4 \cdot 7}x^7 - \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10}x^{10} + \cdots\right] + \left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3^2 \cdot 2!}x^6 - \frac{1}{3^3 \cdot 3!}x^9 + \cdots\right]$

EJERCICIOS 7.1 (PÁGINA 261)

1. $\frac{2}{s}e^{-s} - \frac{1}{s}$
3. $\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s}$
5. $\frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$
7. $\frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-s}$
9. $\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}e^{-s}$
11. $\frac{e^7}{s-1}$
13. $\frac{1}{(s-4)^2}$
15. $\frac{1}{s^2 + 2s + 2}$
17. $\frac{s^2 - 1}{(s^2+1)^2}$
19. $\frac{48}{s^5}$
21. $\frac{4}{s^2} - \frac{10}{s}$
23. $\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} - \frac{3}{s}$
25. $\frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{1}{s}$
27. $\frac{1}{s} + \frac{1}{s-4}$
29. $\frac{1}{s} + \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s-4}$
31. $\frac{8}{s^3} - \frac{15}{s^2 + 9}$
33. Utilice $\operatorname{senh} kt = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$ para mostrar que
$$\mathscr{L}\{\operatorname{senh} kt\} = \frac{k}{s^2 - k^2}.$$
35. $\frac{1}{2(s-2)} - \frac{1}{2s}$
37. $\frac{2}{s^2 + 16}$
39. $\frac{4\cos 5 + (\operatorname{sen} 5)s}{s^2 + 16}$

EJERCICIOS 7.2 (PÁGINA 269)

1. $\frac{1}{2}t^2$
3. $t - 2t^4$
5. $1 + 3t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$
7. $t - 1 + e^{2t}$
9. $\frac{1}{4}e^{-t/4}$
11. $\frac{5}{7}\operatorname{sen} 7t$
13. $\cos\frac{t}{2}$
15. $2\cos 3t - 2\operatorname{sen} 3t$
17. $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$
19. $\frac{3}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{t}$
21. $0.3e^{0.1t} + 0.6e^{-0.2t}$
23. $\frac{1}{2}e^{2t} - e^{3t} + \frac{1}{2}e^{6t}$
25. $\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\cos\sqrt{5}t$
27. $-4 + 3e^{-t} + \cos t + 3\operatorname{sen} t$
29. $\frac{1}{3}\operatorname{sen} t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t$
31. $y = -1 + e^{t}$
33. $y = \frac{1}{10}e^{4t} + \frac{19}{10}e^{-6t}$
35. $y = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}$

37. $y = 10\cos t + 2\,\text{sen}\,t - \sqrt{2}\,\text{sen}\sqrt{2}\,t$

39. $y = -\frac{8}{9}e^{-t/2} + \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{5}{18}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}$

41. $y = \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}\cos 2t + \frac{1}{4}e^{-3t}\text{sen}\,2t$

EJERCICIOS 7.3 (PÁGINA 278)

1. $\dfrac{1}{(s-10)^2}$

3. $\dfrac{6}{(s+2)^4}$

5. $\dfrac{1}{(s-2)^2} + \dfrac{2}{(s-3)^2} + \dfrac{1}{(s-4)^2}$

7. $\dfrac{3}{(s-1)^2+9}$

9. $\dfrac{s}{s^2+25} - \dfrac{s-1}{(s-1)^2+25} + 3\dfrac{s+4}{(s+4)^2+25}$

11. $\frac{1}{2}t^2e^{-2t}$

13. $e^{3t}\,\text{sen}\,t$

15. $e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\,\text{sen}\,t$

17. $e^{-t} - te^{-t}$

19. $5 - t - 5e^{-t} - 4te^{-t} - \frac{3}{2}t^2e^{-t}$

21. $y = te^{-4t} + 2e^{-4t}$

23. $y = e^{-t} + 2te^{-t}$

25. $y = \frac{1}{9}t + \frac{2}{27} - \frac{2}{27}e^{3t} + \frac{10}{9}te^{3t}$

27. $y = -\frac{3}{2}e^{3t}\text{sen}\,2t$

29. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{t}\cos t + \frac{1}{2}e^{t}\,\text{sen}\,t$

31. $y = (e+1)te^{-t} + (e-1)e^{-t}$

33. $x(t) = -\dfrac{3}{2}e^{-7t/2}\cos\dfrac{\sqrt{15}}{2}t - \dfrac{7\sqrt{15}}{10}e^{-7t/2}\,\text{sen}\dfrac{\sqrt{15}}{2}t$

37. $\dfrac{e^{-s}}{s^2}$

39. $\dfrac{e^{-2s}}{s^2} + 2\dfrac{e^{-2s}}{s}$

41. $\dfrac{s}{s^2+4}e^{-\pi s}$

43. $\frac{1}{2}(t-2)^2\,\mathscr{U}(t-2)$

45. $-\text{sen}\,t\,\mathscr{U}(t-\pi)$

47. $\mathscr{U}(t-1) - e^{-(t-1)}\,\mathscr{U}(t-1)$

49. c)

51. f)

53. a)

55. $f(t) = 2 - 4\mathscr{U}(t-3);\ \mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{2}{s} - \dfrac{4}{s}e^{-3s}$

57. $f(t) = t^2\,\mathscr{U}(t-1);\ \mathscr{L}\{f(t)\} = 2\dfrac{e^{-s}}{s^3} + 2\dfrac{e^{-s}}{s^2} + \dfrac{e^{-s}}{s}$

59. $f(t) = t - t\,\mathscr{U}(t-2);\ \mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{e^{-2s}}{s^2} - 2\dfrac{e^{-2s}}{s}$

61. $f(t) = \mathscr{U}(t-a) - \mathscr{U}(t-b);\ \mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{e^{-as}}{s} - \dfrac{e^{-bs}}{s}$

63. $y = [5 - 5e^{-(t-1)}]\,\mathscr{U}(t-1)$

65. $y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}\mathscr{U}(t-1)$
$\quad - \frac{1}{2}(t-1)\,\mathscr{U}(t-1) + \frac{1}{4}e^{-2(t-1)}\,\mathscr{U}(t-1)$

67. $y = \cos 2t - \frac{1}{6}\text{sen}\,2(t-2\pi)\,\mathscr{U}(t-2\pi)$
$\quad + \frac{1}{3}\text{sen}\,(t-2\pi)\,\mathscr{U}(t-2\pi)$

69. $y = \text{sen}\,t + [1 - \cos(t-\pi)]\mathscr{U}(t-\pi)$
$\quad - [1 - \cos(t-2\pi)]\,\mathscr{U}(t-2\pi)$

71. $x(t) = \frac{5}{4}t - \frac{5}{16}\text{sen}\,4t - \frac{5}{4}(t-5)\,\mathscr{U}(t-5)$
$\quad + \frac{5}{16}\text{sen}\,4(t-5)\,\mathscr{U}(t-5) - \frac{25}{4}\,\mathscr{U}(t-5)$
$\quad + \frac{25}{4}\cos 4(t-5)\,\mathscr{U}(t-5)$

73. $q(t) = \frac{2}{5}\,\mathscr{U}(t-3) - \frac{2}{5}e^{-5(t-3)}\,\mathscr{U}(t-3)$

75. a) $i(t) = \dfrac{1}{101}e^{-10t} - \dfrac{1}{101}\cos t + \dfrac{10}{101}\text{sen}\,t$
$$- \frac{10}{101}e^{-10(t-3\pi/2)}\,\mathscr{U}\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$+ \frac{10}{101}\cos\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)\mathscr{U}\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{101}\text{sen}\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)\mathscr{U}\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$$

b) $i_{\text{máx}} \approx 0.1$ en $t \approx 1.7$, $i_{\text{mín}} \approx -0.1$ en $t \approx 4.7$

77. $y(x) = \dfrac{w_0L^2}{16EI}x^2 - \dfrac{w_0L}{12EI}x^3 + \dfrac{w_0}{24EI}x^4$
$$- \frac{w_0}{24EI}\left(x - \frac{L}{2}\right)^4\mathscr{U}\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

79. $y(x) = \dfrac{w_0L^2}{48EI}x^2 - \dfrac{w_0L}{24EI}x^3$
$$+ \frac{w_0}{60EIL}\left[\frac{5L}{2}x^4 - x^5 + \left(x - \frac{L}{2}\right)^5\mathscr{U}\left(x - \frac{L}{2}\right)\right]$$

81. a) $\dfrac{dT}{dt} = k(T - 70 - 57.5t - (230 - 57.5t)\mathscr{U}(t-4))$

EJERCICIOS 7.4 (PÁGINA 289)

1. $\dfrac{1}{(s+10)^2}$

3. $\dfrac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$

5. $\dfrac{6s^2+2}{(s^2-1)^3}$

7. $\dfrac{12s-24}{[(s-2)^2+36]^2}$

9. $y = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}t\,\text{sen}\,t$

11. $y = 2\cos 3t + \frac{5}{3}\text{sen}\,3t + \frac{1}{6}t\,\text{sen}\,3t$

13. $y = \frac{1}{4}\text{sen}\,4t + \frac{1}{8}t\,\text{sen}\,4t$
$\quad - \frac{1}{8}(t-\pi)\,\text{sen}\,4(t-\pi)\mathscr{U}(t-\pi)$

17. $y = \frac{2}{3}t^3 + c_1t^2$

19. $\dfrac{6}{s^5}$

21. $\dfrac{s-1}{(s+1)[(s-1)^2+1]}$

23. $\dfrac{1}{s(s-1)}$

25. $\dfrac{s+1}{s[(s+1)^2+1]}$

27. $\dfrac{1}{s^2(s-1)}$

29. $\dfrac{3s^2+1}{s^2(s^2+1)^2}$

31. $e^{t} - 1$

33. $e^{t} - \frac{1}{2}t^2 - t - 1$

37. $f(t) = \text{sen}\,t$

39. $f(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{8}e^{t} + \frac{3}{4}te^{t} + \frac{1}{4}t^2e^{t}$

41. $f(t) = e^{-t}$

43. $f(t) = \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{1}{8}e^{-2t} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\text{sen}\,2t$

45. $y(t) = \operatorname{sen} t - \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t$

47. $i(t) = 100[e^{-10(t-1)} - e^{-20(t-1)}]\mathscr{U}(t-1)$
$\quad - 100[e^{-10(t-2)} - e^{-20(t-2)}]\mathscr{U}(t-2)$

49. $\dfrac{1 - e^{-as}}{s(1 + e^{-as})}$

51. $\dfrac{a}{s}\left(\dfrac{1}{bs} - \dfrac{1}{e^{bs} - 1}\right)$

53. $\dfrac{\coth(\pi s/2)}{s^2 + 1}$

55. $i(t) = \dfrac{1}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$
$\quad + \dfrac{2}{R}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1 - e^{-R(t-n)/L})\mathscr{U}(t-n)$

57. $x(t) = 2(1 - e^{-t}\cos 3t - \frac{1}{3}e^{-t}\operatorname{sen} 3t)$
$\quad + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[1 - e^{-(t-n\pi)}\cos 3(t - n\pi)\right.$
$\quad \left.- \frac{1}{3}e^{-(t-n\pi)}\operatorname{sen} 3(t - n\pi)\right]\mathscr{U}(t - n\pi)$

EJERCICIOS 7.5 (PÁGINA 295)

1. $y = e^{3(t-2)}\mathscr{U}(t-2)$

3. $y = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t\,\mathscr{U}(t - 2\pi)$

5. $y = -\cos t\,\mathscr{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos t\,\mathscr{U}\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$

7. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right]\mathscr{U}(t-1)$

9. $y = e^{-2(t-2\pi)}\operatorname{sen} t\,\mathscr{U}(t - 2\pi)$

11. $y = e^{-2t}\cos 3t + \frac{2}{3}e^{-2t}\operatorname{sen} 3t$
$\quad + \frac{1}{3}e^{-2(t-\pi)}\operatorname{sen} 3(t - \pi)\,\mathscr{U}(t - \pi)$
$\quad + \frac{1}{3}e^{-2(t-3\pi)}\operatorname{sen} 3(t - 3\pi)\,\mathscr{U}(t - 3\pi)$

13. $y(x) = \begin{cases} \dfrac{P_0}{EI}\left(\dfrac{L}{4}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3\right), & 0 \le x < \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{P_0L^2}{4EI}\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{L}{12}\right), & \dfrac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$

EJERCICIOS 7.6 (PÁGINA 299)

1. $x = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t}$
$\quad y = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{t}$

3. $x = -\cos 3t - \frac{5}{3}\operatorname{sen} 3t$
$\quad y = 2\cos 3t - \frac{7}{3}\operatorname{sen} 3t$

5. $x = -2e^{3t} + \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$
$\quad y = \frac{8}{3}e^{3t} - \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{6}$

7. $x = -\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t$
$\quad y = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{4}\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t$

9. $x = 8 + \dfrac{2}{3!}t^3 + \dfrac{1}{4!}t^4$
$\quad y = -\dfrac{2}{3!}t^3 + \dfrac{1}{4!}t^4$

11. $x = \frac{1}{2}t^2 + t + 1 - e^{-t}$
$\quad y = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t}$

13. $x_1 = \dfrac{1}{5}\operatorname{sen} t + \dfrac{2\sqrt{6}}{15}\operatorname{sen}\sqrt{6}\,t + \dfrac{2}{5}\cos t - \dfrac{2}{5}\cos\sqrt{6}\,t$
$\quad x_2 = \dfrac{2}{5}\operatorname{sen} t - \dfrac{\sqrt{6}}{15}\operatorname{sen}\sqrt{6}\,t + \dfrac{4}{5}\cos t + \dfrac{1}{5}\cos\sqrt{6}\,t$

15. **b)** $i_2 = \frac{100}{9} - \frac{100}{9}e^{-900t}$
$\quad i_3 = \frac{80}{9} - \frac{80}{9}e^{-900t}$
c) $i_1 = 20 - 20e^{-900t}$

17. $i_2 = -\frac{20}{13}e^{-2t} + \frac{375}{1469}e^{-15t} + \frac{145}{113}\cos t + \frac{85}{113}\operatorname{sen} t$
$\quad i_3 = \frac{30}{13}e^{-2t} + \frac{250}{1469}e^{-15t} - \frac{280}{113}\cos t + \frac{810}{113}\operatorname{sen} t$

19. $i_1 = \dfrac{6}{5} - \dfrac{6}{5}e^{-100t}\cosh 50\sqrt{2}\,t - \dfrac{9\sqrt{2}}{10}e^{-100t}\operatorname{senh} 50\sqrt{2}\,t$
$\quad i_2 = \dfrac{6}{5} - \dfrac{6}{5}e^{-100t}\cosh 50\sqrt{2}\,t - \dfrac{6\sqrt{2}}{5}e^{-100t}\operatorname{senh} 50\sqrt{2}\,t$

REPASO DEL CAPÍTULO 7 (PÁGINA 300)

1. $\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{2}{s^2}e^{-s}$

3. falso

5. verdadero

7. $\dfrac{1}{s+7}$

9. $\dfrac{2}{s^2+4}$

11. $\dfrac{4s}{(s^2+4)^2}$

13. $\frac{1}{6}t^5$

15. $\frac{1}{2}t^2e^{5t}$

17. $e^{5t}\cos 2t + \frac{5}{2}e^{5t}\operatorname{sen} 2t$

19. $\cos\pi(t-1)\mathscr{U}(t-1) + \operatorname{sen}\pi(t-1)\mathscr{U}(t-1)$

21. -5

23. $e^{-k(s-a)}F(s-a)$

25. $f(t)\mathscr{U}(t - t_0)$

27. $f(t - t_0)\mathscr{U}(t - t_0)$

29. $f(t) = t - (t-1)\mathscr{U}(t-1) - \mathscr{U}(t-4)$;
$\quad \mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^2}e^{-s} - \dfrac{1}{s}e^{-4s}$;
$\quad \mathscr{L}\{e^tf(t)\} = \dfrac{1}{(s-1)^2} - \dfrac{1}{(s-1)^2}e^{-(s-1)}$
$\quad - \dfrac{1}{s-1}e^{-4(s-1)}$

31. $f(t) = 2 + (t-2)\,\mathscr{U}(t-2)$;
$\quad \mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{s^2}e^{-2s}$;
$\quad \mathscr{L}\{e^tf(t)\} = \dfrac{2}{s-1} + \dfrac{1}{(s-1)^2}e^{-2(s-1)}$

33. $y = 5te^{t} + \frac{1}{2}t^2e^{t}$

35. $y = -\frac{6}{25} + \frac{1}{5}t + \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{13}{50}e^{-5t} - \frac{4}{25}\mathscr{U}(t-2)$
$\quad - \frac{1}{5}(t-2)\,\mathscr{U}(t-2) + \frac{1}{4}e^{-(t-2)}\,\mathscr{U}(t-2)$
$\quad - \frac{9}{100}e^{-5(t-2)}\,\mathscr{U}(t-2)$

37. $y = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$

39. $x = -\frac{1}{4} + \frac{9}{8}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{2t}$
$\quad y = t + \frac{9}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{2t}$

41. $i(t) = -9 + 2t + 9e^{-t/5}$

43. $$y(x) = \frac{w_0}{12EIL}\left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{L}{2}x^4 - \frac{L^2}{2}x^3 + \frac{L^3}{4}x^2 + \frac{1}{5}\left(x - \frac{L}{2}\right)^5 \mathcal{U}\left(x - \frac{L}{2}\right)\right]$$

45. a) $$\theta_1(t) = \frac{\theta_0 + \psi_0}{2}\cos\omega t + \frac{\theta_0 - \psi_0}{2}\cos\sqrt{\omega^2 + 2Kt}$$

$$\theta_2(t) = \frac{\theta_0 + \psi_0}{2}\cos\omega t - \frac{\theta_0 - \psi_0}{2}\cos\sqrt{\omega^2 + 2Kt}$$

EJERCICIOS 8.1 (PÁGINA 310)

1. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, donde $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -9 \\ 6 & -1 & 0 \\ 10 & 4 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, donde $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

donde $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

7. $\dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y + e^t$

$\dfrac{dy}{dt} = -x + 3y - e^t$

9. $\dfrac{dx}{dt} = x - y + 2z + e^{-t} - 3t$

$\dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y + z + 2e^{-t} + t$

$\dfrac{dz}{dt} = -2x + 5y + 6z + 2e^{-t} - t$

17. Si; $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = -2e^{-8t} \neq 0$ implica que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

19. No; $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = 0$ para toda t. Los vectores solución son linealmente dependientes en $(-\infty, \infty)$ Observe que $\mathbf{X}_3 = 2\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$.

EJERCICIOS 8.2 (PÁGINA 324)

1. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{5t} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}$

3. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}e^{t}$

5. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}e^{8t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}e^{-10t}$

7. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t}$

9. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}e^{3t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-2t}$

11. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}e^{-t/2} + c_3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t/2}$

13. $\mathbf{X} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t/2} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t/2}$

19. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\right]$

21. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t}\right]$

23. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$

25. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{5t} + c_3\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}te^{5t} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}e^{5t}\right]$

27. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{t}\right] + c_3\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2}e^{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}te^{t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^{t}\right]$

29. $\mathbf{X} = -7\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t} + 13\begin{pmatrix} 2t + 1 \\ t + 1 \end{pmatrix}e^{4t}$

31. Correspondiendo al eigenvalor $\lambda_1 = 2$ de multiplicidad 5, los eigenvectores son

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

33. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix}e^{4t} + c_2\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ 2\operatorname{sen} t - \cos t \end{pmatrix}e^{4t}$

35. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}e^{4t} + c_2\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}e^{4t}$

37. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ 4\cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} 3t \\ 4\operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}$

39. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-\cos t\\ \cos t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ -\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix}$

41. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ \cos t\\ \cos t\end{pmatrix}e^t + c_3\begin{pmatrix}\cos t\\ -\operatorname{sen} t\\ -\operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^t$

43. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}28\\-5\\25\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}4\cos 3t - 3\operatorname{sen} 3t\\ -5\cos 3t\\ 0\end{pmatrix}e^{-2t} + c_3\begin{pmatrix}3\cos 3t + 4\operatorname{sen} 3t\\ -5\operatorname{sen} 3t\\ 0\end{pmatrix}e^{-2t}$

45. $\mathbf{X} = -\begin{pmatrix}25\\-7\\6\end{pmatrix}e^t - \begin{pmatrix}\cos 5t - 5\operatorname{sen} 5t\\ \cos 5t\\ \cos 5t\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}5\cos 5t + \operatorname{sen} 5t\\ \operatorname{sen} 5t\\ \operatorname{sen} 5t\end{pmatrix}$

EJERCICIOS 8.3 (PÁGINA 332)

1. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{4t} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}t^2 + \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4}\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}-2\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$

5. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}e^{7t} + \begin{pmatrix}\frac{55}{36}\\ -\frac{19}{4}\end{pmatrix}e^t$

7. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}e^{5t} - \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{7}{2}\\ 2\end{pmatrix}e^{4t}$

9. $\mathbf{X} = 13\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^t + 2\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$

11. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}e^t - \begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}15\\10\end{pmatrix}$

13. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{t/2} + c_2\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}e^{3t/2} - \begin{pmatrix}\frac{13}{2}\\ \frac{13}{4}\end{pmatrix}te^{t/2} - \begin{pmatrix}\frac{15}{2}\\ \frac{9}{4}\end{pmatrix}e^{t/2}$

15. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}te^t$

17. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}e^{-3t} + \begin{pmatrix}-12\\0\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$

19. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}t\\ \frac{1}{2} - t\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -2\end{pmatrix}e^{-t}$

21. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ -\cos t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}-\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix}\ln|\cos t|$

23. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ -\cos t\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix}te^t$

25. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}-\operatorname{sen} t\\ \operatorname{sen} t \tan t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix}\ln|\cos t|$

27. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}2\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}2\cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}3\operatorname{sen} t\\ \frac{3}{2}\cos t\end{pmatrix}te^t + \begin{pmatrix}\cos t\\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^t\ln|\operatorname{sen} t| + \begin{pmatrix}2\cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{pmatrix}e^t\ln|\cos t|$

29. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}e^{3t} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}\\ -e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}\\ \frac{1}{2}t^2e^{3t}\end{pmatrix}$

31. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}te^{4t} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}e^{4t}$

33. $\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{-2t} + \frac{6}{29}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}e^{-12t} - \frac{4}{29}\begin{pmatrix}19\\42\end{pmatrix}\cos t + \frac{4}{29}\begin{pmatrix}83\\69\end{pmatrix}\operatorname{sen} t$

EJERCICIOS 8.4 (PÁGINA 336)

1. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{2t}\end{pmatrix}$; $\quad e^{-\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{pmatrix}$

3. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}t+1 & t & t\\ t & t+1 & t\\ -2t & -2t & -2t+1\end{pmatrix}$

5. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{2t}$

7. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}t+1\\ t\\ -2t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}t\\ t+1\\ -2t\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}t\\ t\\ -2t+1\end{pmatrix}$

9. $\mathbf{X} = c_3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{t} + c_4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}-3\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

11. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cosh t\\ \operatorname{senh} t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{senh} t\\ \cosh t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

13. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}t+1\\ t\\ -2t\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}t\\ t+1\\ -2t\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}t\\ t\\ -2t+1\end{pmatrix}$

15. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{3}{4}e^{-2t}\\ -e^{2t} + e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\end{pmatrix}$;

$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\\ -e^{2t} + e^{-2t}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\frac{3}{4}e^{2t} - \frac{3}{4}e^{-2t}\\ -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\end{pmatrix}$ o

$\mathbf{X} = c_3\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}e^{2t} + c_4\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-2t}$

17. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix}e^{2t} + 3te^{2t} & -9te^{2t}\\ te^{2t} & e^{2t} - 3te^{2t}\end{pmatrix}$;

$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1+3t\\ t\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}-9t\\ 1-3t\end{pmatrix}e^{2t}$

23. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{5t}\\ \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{3}{2}e^{5t}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{5t}\\ -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{3}{2}e^{5t}\end{pmatrix}$ o

$\mathbf{X} = c_3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t} + c_4\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{5t}$

REPASO DEL CAPÍTULO 8 (PÁGINA 337)

1. $k = \frac{1}{3}$

5. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}te^{t} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{t}\right]$

7. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos 2t\\ -\operatorname{sen} 2t\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\\ \cos 2t\end{pmatrix}e^{t}$

9. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{4t} + c_3\begin{pmatrix}7\\12\\-16\end{pmatrix}e^{-3t}$

11. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}e^{4t} + \begin{pmatrix}16\\-4\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}11\\-1\end{pmatrix}$

13. $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t - \operatorname{sen} t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ \operatorname{sen} t + \cos t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$+ \begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ \operatorname{sen} t + \cos t\end{pmatrix}\ln|\csc t - \cot t|$

15. b) $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{3t}$

EJERCICIOS 9.1 (PÁGINA 344)

1. para $h = 0.1$, $y_5 = 2.0801$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 2.0592$
3. para $h = 0.1$, $y_5 = 0.5470$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 0.5465$
5. para $h = 0.1$, $y_5 = 0.4053$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 0.4054$
7. para $h = 0.1$, $y_5 = 0.5503$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 0.5495$
9. para $h = 0.1$, $y_5 = 1.3260$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 1.3315$
11. para $h = 0.1$, $y_5 = 3.8254$; para $h = 0.05$, $y_{10} = 3.8840$; en $x = 0.5$ el valor real es $y(0.5) = 3.9082$

13. a) $y_1 = 1.2$

b) $y''(c)\dfrac{h^2}{2} = 4e^{2c}\dfrac{(0.1)^2}{2} = 0.02e^{2c} \le 0.02e^{0.2}$

$= 0.0244$

c) El valor real es $y(0.1) = 1.2214$. El error es 0.0214.
d) Si $h = 0.05$, $y_2 = 1.21$.
e) El error con $h = 0.1$ es 0.0214. El error con $h = 0.05$ es 0.0114.

15. a) $y_1 = 0.8$

b) $y''(c)\dfrac{h^2}{2} = 5e^{-2c}\dfrac{(0.1)^2}{2} = 0.025e^{-2c} \le 0.025$

para $0 \le c \le 0.1$.

c) El valor real es $y(0.1) = 0.8234$. El error es 0.0234.
d) Si $h = 0.05$, $y_2 = 0.8125$.
e) El error con $h = 0.1$ es 0.0234. El error con $h = 0.05$ es 0.0109.

17. a) El error con $19h^2e^{-3(c-1)}$.

b) $y''(c)\dfrac{h^2}{2} \le 19(0.1)^2(1) = 0.19$

c) Si $h = 0.1$, $y_5 = 1.8207$.
Si $h = 0.05$, $y_{10} = 1.9424$.
d) El error con $h = 0.1$ es 0.2325. El error con $h = 0.05$ es 0.1109.

19. a) El error es $\dfrac{1}{(c+1)^2}\dfrac{h^2}{2}$.

b) $\left|y''(c)\dfrac{h^2}{2}\right| \le (1)\dfrac{(0.1)^2}{2} = 0.005$

c) Si $h = 0.1$, $y_5 = 0.4198$. Si $h = 0.05$, $y_{10} = 0.4124$.
d) El error con $h = 0.1$ es 0.0143. El error con $h = 0.05$ es 0.0069.

EJERCICIOS 9.2 (PÁGINA 348)

1. $y_5 = 3.9078$; el valor real es $y(0.5) = 3.9082$
3. $y_5 = 2.0533$ **5.** $y_5 = 0.5463$
7. $y_5 = 0.4055$ **9.** $y_5 = 0.5493$
11. $y_5 = 1.3333$
13. a) 35.7130

c) $v(t) = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}\tanh\sqrt{\dfrac{kg}{m}}\,t$; $v(5) = 35.7678$

15. a) para $h = 0.1$, $y_4 = 903.0282$;
para $h = 0.05$, $y_8 = 1.1 \times 10^{15}$

17. a) $y_1 = 0.82341667$

b) $y^{(5)}(c)\dfrac{h^5}{5!} = 40e^{-2c}\dfrac{h^5}{5!} \le 40e^{2(0)}\dfrac{(0.1)^5}{5!}$
$= 3.333 \times 10^{-6}$

c) El valor real es $y(0.1) = 0.8234134413$. El error es $3.225 \times 10^{-6} \le 3.333 \times 10^{-6}$.

d) Si $h = 0.05$, $y_2 = 0.82341363$.

e) El error con $h = 0.1$ es 3.225×10^{-6}. El error con $h = 0.05$ es 1.854×10^{-7}.

19. a) $y^{(5)}(c)\dfrac{h^5}{5!} = \dfrac{24}{(c+1)^5}\dfrac{h^5}{5!}$

b) $\dfrac{24}{(c+1)^5}\dfrac{h^5}{5!} \le 24\dfrac{(0.1)^5}{5!} = 2.0000 \times 10^{-6}$

c) Del cálculo con $h = 0.1$, $y_5 = 0.40546517$.
Del cálculo con $h = 0.05$, $y_{10} = 0.40546511$.

EJERCICIOS 9.3 (PÁGINA 353)

1. $y(x) = -x + e^x$; los valores reales son $y(0.2) = 1.0214$, $y(0.4) = 1.0918$, $y(0.6) = 1.2221$, $y(0.8) = 1.4255$; las aproximaciones están dadas en el ejemplo 1.

3. $y_4 = 0.7232$

5. para $h = 0.2$, $y_5 = 1.5569$; para $h = 0.1$, $y_{10} = 1.5576$

7. para $h = 0.2$, $y_5 = 0.2385$; para $h = 0.1$, $y_{10} = 0.2384$

EJERCICIOS 9.4 (PÁGINA 357)

1. $y(x) = -2e^{2x} + 5xe^{2x}$; $y(0.2) = -1.4918$, $y_2 = -1.6800$

3. $y_1 = -1.4928$, $y_2 = -1.4919$

5. $y_1 = 1.4640$, $y_2 = 1.4640$

7. $x_1 = 8.3055$, $y_1 = 3.4199$;
$x_2 = 8.3055$, $y_2 = 3.4199$

9. $x_1 = -3.9123$, $y_1 = 4.2857$;
$x_2 = -3.9123$, $y_2 = 4.2857$

11. $x_1 = 0.4179$, $y_1 = -2.1824$;
$x_2 = 0.4173$, $y_2 = -2.1821$

EJERCICIOS 9.5 (PÁGINA 361)

1. $y_1 = -5.6774$, $y_2 = -2.5807$, $y_3 = 6.3226$

3. $y_1 = -0.2259$, $y_2 = -0.3356$, $y_3 = -0.3308$, $y_4 = -0.2167$

5. $y_1 = 3.3751$, $y_2 = 3.6306$, $y_3 = 3.6448$, $y_4 = 3.2355$, $y_5 = 2.1411$

7. $y_1 = 3.8842$, $y_2 = 2.9640$, $y_3 = 2.2064$, $y_4 = 1.5826$, $y_5 = 1.0681$, $y_6 = 0.6430$, $y_7 = 0.2913$

9. $y_1 = 0.2660$, $y_2 = 0.5097$, $y_3 = 0.7357$, $y_4 = 0.9471$, $y_5 = 1.1465$, $y_6 = 1.3353$, $y_7 = 1.5149$, $y_8 = 1.6855$, $y_9 = 1.8474$

11. $y_1 = 0.3492$, $y_2 = 0.7202$, $y_3 = 1.1363$, $y_4 = 1.6233$, $y_5 = 2.2118$, $y_6 = 2.9386$, $y_7 = 3.8490$

13. c) $y_0 = -2.2755$, $y_1 = -2.0755$, $y_2 = -1.8589$, $y_3 = -1.6126$, $y_4 = -1.3275$

REPASO DEL CAPÍTULO 9 (PÁGINA 362)

1. Comparación de los métodos numéricos con $h = 0.1$:

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4
1.10	2.1386	2.1549	2.1556
1.20	2.3097	2.3439	2.3454
1.30	2.5136	2.5672	2.5695
1.40	2.7504	2.8246	2.8278
1.50	3.0201	3.1157	3.1197

Comparación de los métodos numéricos con $h = 0.05$:

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4
1.10	2.1469	2.1554	2.1556
1.20	2.3272	2.3450	2.3454
1.30	2.5409	2.5689	2.5695
1.40	2.7883	2.8269	2.8278
1.50	3.0690	3.1187	3.1197

3. Comparación de los métodos numéricos con $h = 0.1$:

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4
0.60	0.6000	0.6048	0.6049
0.70	0.7095	0.7191	0.7194
0.80	0.8283	0.8427	0.8431
0.90	0.9559	0.9752	0.9757
1.00	1.0921	1.1163	1.1169

Comparación de los métodos numéricos con $h = 0.05$:

x_n	Euler	Euler mejorado	RK4
0.60	0.6024	0.6049	0.6049
0.70	0.7144	0.7193	0.7194
0.80	0.8356	0.8430	0.8431
0.90	0.9657	0.9755	0.9757
1.00	1.1044	1.1168	1.1169

5. $h = 0.2$: $y(0.2) \approx 3.2$; $h = 0.1$: $y(0.2) \approx 3.23$

7. $x(0.2) \approx 1.62$, $y(0.2) \approx 1.84$

EJERCICIOS 10.1 (PÁGINA 370)

1. $x' = y$
$y' = -9 \operatorname{sen} x$; puntos críticos en $(\pm n\pi, 0)$

3. $x' = y$
$y' = x^2 + y(x^3 - 1)$; punto crítico en $(0, 0)$

5. $x' = y$
$y' = \epsilon x^3 - x$;
punto crítico en $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, 0\right)$

7. $(0, 0)$ y $(-1, -1)$

9. $(0, 0)$ y $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

11. $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(0, 16)$, y $(4, 12)$

13. $(0, y)$, y arbitraria

15. $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$

17. a) $x = c_1e^{5t} - c_2e^{-t}$ **b)** $x = -2e^{-t}$
$y = 2c_1e^{5t} + c_2e^{-t}$ $y = 2e^{-t}$

19. a) $x = c_1(4 \cos 3t - 3 \operatorname{sen} 3t) + c_2(4 \operatorname{sen} 3t + 3 \cos 3t)$
$y = c_1(5 \cos 3t) + c_2(5 \operatorname{sen} 3t)$
b) $x = 4 \cos 3t - 3 \operatorname{sen} 3t$
$y = 5 \cos 3t$

21. a) $x = c_1(\operatorname{sen} t - \cos t)e^{4t} + c_2(-\operatorname{sen} t - \cos t)e^{4t}$
$y = 2c_1(\cos t)e^{4t} + 2c_2(\operatorname{sen} t)e^{4t}$
b) $x = (\operatorname{sen} t - \cos t)e^{4t}$
$y = 2(\cos t)e^{4t}$

23. $r = \frac{1}{\sqrt[4]{4t + c_1}}$, $\theta = t + c_2$; $r = 4\frac{1}{\sqrt[4]{1024t + 1}}$, $\theta = t$; la solución se acerca en espiral al origen cuando t aumenta.

25. $r = \frac{1}{\sqrt{1 + c_1e^{-2t}}}$, $\theta = t + c_2$; $r = 1$, $\theta = t$ (o $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$) es la solución que satisface $\mathbf{X}(0) = (1, 0)$;
$r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{-2t}}}$, $\theta = t$ es la solución que satisface $\mathbf{X}(0) = (2, 0)$. Esta solución se acerca en espiral hacia el círculo $r = 1$ cuando aumenta t.

27. No hay puntos críticos y en consecuencia no hay soluciones periódicas.

29. Parece haber una solución periódica que encierra el punto crítico $(0, 0)$.

EJERCICIOS 10.2 (PÁGINA 377)

1. a) Si $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ está en la recta $y = 2x$, entonces $\mathbf{X}(t)$ tiende a $(0, 0)$ a lo largo de esa recta. Para las demás condiciones iniciales, $\mathbf{X}(t)$ tiende a $(0, 0)$ desde la dirección determinada por la recta $y = -x/2$.

3. a) Todas las soluciones son espirales inestables que se vuelven no acotadas conforme t aumenta.

5. a) Todas las soluciones tienden a $(0, 0)$ desde la dirección especificada por la recta $y = x$.

7. a) Si $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ está en la recta $y = 3x$, entonces $\mathbf{X}(t)$ tiende a $(0, 0)$ a lo largo de esta recta. Para las demás condiciones iniciales, $\mathbf{X}(t)$ se vuelve no acotada y $y = x$ sirve como la asíntota.

9. punto de silla

11. punto de silla

13. nodo estable degenerado **15.** espiral estable

17. $|\mu| < 1$

19. $\mu < -1$ para un punto de silla; $-1 < \mu < 3$ para un punto inestable de espiral

23. a) $(-3, 4)$
b) nodo o punto de silla inestable
c) $(0, 0)$ es un punto de silla.

25. a) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$
b) punto inestable de espiral
c) $(0, 0)$ es un centro inestable de espiral.

EJERCICIOS 10.3 (PÁGINA 386)

1. $r = r_0e^{\alpha t}$

3. $x = 0$ es inestable; $x = n + 1$ es asintóticamente estable.

5. $T = T_0$ es inestable.

7. $x = \alpha$ es inestable; $x = \beta$ es asintóticamente estable.

9. $P = c$ es asintóticamente estable; $P = a/b$ es inestable.

11. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ es un punto estable de espiral.

13. $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$ son puntos de silla; $\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$ es un punto estable de espiral.

15. $(1, 1)$ es un nodo estable; $(1, -1)$ es un punto de silla; $(2, 2)$ es un punto de silla; $(2, -2)$ es un punto inestable de espiral.

17. $(0, -1)$ es un punto de silla; $(0, 0)$ no se puede clasificar; $(0, 1)$ es estable, pero no se puede clasificar más.

19. $(0, 0)$ es un nodo inestable; $(10, 0)$ es un punto de silla; $(0, 16)$ es un punto de silla; $(4, 12)$ es un nodo estable.

21. $\theta = 0$ es un punto de silla; no es posible clasificar ni $\theta = \pi/3$ o $\theta = -\pi/3$.

23. No se puede clasificar $x = 0$.

25. No se puede clasificar $x = 0$, pero $x = 1/\sqrt{\epsilon}$ y $x = -1/\sqrt{\epsilon}$ son cada uno puntos de silla.

29. a) $(0, 0)$ es un punto estable de espiral.

33. a) $(1, 0)$, $(-1, 0)$

35. $|v_0| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$

37. Si $\beta > 0$, $(0, 0)$ es el único punto crítico y es estable. Si $\beta < 0$, $(0,0)$, $(\hat{x}, 0)$, y $(-\hat{x}, 0)$, donde $\hat{x}^2 = -\alpha/\beta$, son puntos críticos. $(0, 0)$ es estable, mientras que $(\hat{x}, 0)$, y $(-\hat{x}, 0)$ son puntos de silla.

39. b) $(5\pi/6, 0)$ es un punto de silla.
c) $(\pi/6, 0)$ es un centro.

EJERCICIOS 10.4 (PÁGINA 393)

1. $|\omega_0| < \sqrt{3g/L}$

5. a) Primero demuestre que $y^2 = v_0^2 - g \ln\left(\frac{1 + x^2}{1 + x_0^2}\right)$.

9. a) El nuevo punto crítico es $(d/c - \epsilon_2/c, a/b + \epsilon_1/b)$.
b) sí

11. $(0, 0)$ es un nodo inestable, $(0, 100)$ es un nodo estable, $(50, 0)$ es un nodo estable y $(20, 40)$ es un punto de silla.

17. a) $(0, 0)$ es el único punto crítico.

REPASO DEL CAPÍTULO 10 (PÁGINA 395)

1. verdadero
3. un centro o un punto de silla
5. falso
7. falso
9. $\alpha = -1$
11. $r = 1/\sqrt[3]{3t+1}$, $\theta = t$. La curva solución describe una espiral hacia el origen.
13. **a)** centro
b) nodo estable degenerado
15. (0, 0) es un punto estable crítico para $\alpha \leq 0$.
17. $x = 1$ es inestable; $x = -1$ es asintóticamente estable.
19. El sistema está sobreamortiguado cuando $\beta^2 > 12\,kms^2$ y subamortiguado cuando $\beta^2 < 12\,kms^2$.

EJERCICIOS 11.1 (PÁGINA 402)

7. $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
9. $\sqrt{\pi/2}$
11. $\|1\| = \sqrt{p}$; $\|\cos(n\pi x/p)\| = \sqrt{p/2}$
21. **a)** $T = 1$ **b)** $T = \pi L/2$
c) $T = 2\pi$ **d)** $T = \pi$
e) $T = 2\pi$ **f)** $T = 2p$

EJERCICIOS 11.2 (PÁGINA 407)

1. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n}\operatorname{sen} nx$

3. $f(x) = \dfrac{3}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x - \dfrac{1}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi x\right\}$

5. $f(x) = \dfrac{\pi^2}{6} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx + \left(\dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \dfrac{2}{\pi n^3}[(-1)^n - 1]\right)\operatorname{sen} nx\right\}$

7. $f(x) = \pi + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} nx$

9. $f(x) = \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n + 1}{1-n^2}\cos nx$

11. $f(x) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}\cos\dfrac{n\pi}{2}x + \dfrac{3}{n}\left(1 - \cos\dfrac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}x\right\}$

13. $f(x) = \dfrac{9}{4} + 5\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos\dfrac{n\pi}{5}x + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{5}x\right\}$

15. $f(x) = \dfrac{2\operatorname{senh}\pi}{\pi}\left[\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n\operatorname{sen} nx)\right]$

19. Haga $x = \pi/2$.

EJERCICIOS 11.3 (PÁGINA 414)

1. impar
3. ni par ni impar
5. par
7. impar
9. ni par ni impar

11. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n}\operatorname{sen} nx$

13. $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx$

15. $f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$

17. $f(x) = \dfrac{2\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$

19. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n(1+\pi)}{n}\operatorname{sen} nx$

21. $f(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{2} - 1}{n^2}\cos\dfrac{n\pi}{2}x$

23. $f(x) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{1-n^2}\cos nx$

25. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}}{n}\cos n\pi x$

$f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - \cos\dfrac{n\pi}{2}}{n}\operatorname{sen} n\pi x$

27. $f(x) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos 2nx$

$f(x) = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{4n^2-1}\operatorname{sen} 2nx$

29. $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cos\dfrac{n\pi}{2} - (-1)^n - 1}{n^2}\cos nx$

$f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}}{n^2}\operatorname{sen} nx$

31. $f(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{2} - 1}{n^2}\cos\dfrac{n\pi}{2}x$

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2} - \dfrac{2}{n\pi}(-1)^n\right\}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}x$

33. $f(x) = \dfrac{5}{6} + \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3(-1)^n - 1}{n^2}\cos n\pi x$

$f(x) = 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \dfrac{(-1)^n - 1}{n^3\pi^3}\right\}\operatorname{sen} n\pi x$

35. $f(x) = \dfrac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{1}{n^2}\cos nx - \dfrac{\pi}{n}\operatorname{sen} nx\right\}$

37. $f(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\operatorname{sen} 2n\pi x$

39. $x_p(t) = \dfrac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n(10-n^2)}\operatorname{sen} nt$

41. $x_p(t) = \dfrac{\pi^2}{18} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(n^2-48)}\cos nt$

43. $x(t) = \dfrac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{10-n^2}\left[\dfrac{1}{n}\operatorname{sen} nt - \dfrac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{sen}\sqrt{10}t\right]$

45. b) $y_p(x) = \dfrac{2w_0L^4}{EI\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^5}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{L}x$

47. $y_p(x) = \dfrac{w_0}{2k} + \dfrac{2w_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n(EIn^4+k)}\cos nx$

EJERCICIOS 11.4 (PÁGINA 422)

1. $y = \cos\alpha_n x$; α definido por $\cot\alpha = \alpha$;
$\lambda_1 = 0.7402,\ \lambda_2 = 11.7349,$
$\lambda_3 = 41.4388,\ \lambda_4 = 90.8082$
$y_1 = \cos 0.8603x,\ y_2 = \cos 3.4256x,$
$y_3 = \cos 6.4373x,\ y_4 = \cos 9.5293x$

5. $\frac{1}{2}[1 + \operatorname{sen}^2\alpha_n]$

7. a) $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{\ln 5}\right)^2,\ y_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{\ln 5}\ln x\right),\ n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $\dfrac{d}{dx}[xy'] + \dfrac{\lambda}{x}y = 0$

c) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\ln 5}\ln x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ln 5}\ln x\right)dx = 0,\ m \neq n$

9. $\dfrac{d}{dx}[xe^{-x}y'] + ne^{-x}y = 0;$

$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}L_m(x)L_n(x)\,dx = 0,\ m \neq n$

11. a) $\lambda_n = 16n^2,\ y_n = \operatorname{sen}(4n\tan^{-1}x),\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\operatorname{sen}(4m\tan^{-1}x)\operatorname{sen}(4n\tan^{-1}x)\,dx = 0,\ m \neq n$

EJERCICIOS 11.5 (PÁGINA 429)

1. $\alpha_1 = 1.277,\ \alpha_2 = 2.339,\ \alpha_3 = 3.391,\ \alpha_4 = 4.441$

3. $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{\alpha_i J_1(2\alpha_i)}J_0(\alpha_i x)$

5. $f(x) = 4\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{\alpha_i J_1(2\alpha_i)}{(4\alpha_i^2+1)J_0^2(2\alpha_i)}J_0(\alpha_i x)$

7. $f(x) = 20\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{\alpha_i J_2(4\alpha_i)}{(2\alpha_i^2+1)J_1^2(4\alpha_i)}J_1(\alpha_i x)$

9. $f(x) = \dfrac{9}{2} - 4\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{J_2(3\alpha_i)}{\alpha_i^2 J_0^2(3\alpha_i)}J_0(\alpha_i x)$

15. $f(x) = \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) - \frac{3}{32}P_4(x) + \cdots$

21. $f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{5}{8}P_2(x) - \frac{3}{16}P_4(x) + \cdots,$
$f(x) = |x|$ en $(-1, 1)$

REPASO DEL CAPÍTULO 11 (PÁGINA 430)

1. verdadero **3.** coseno

5. falso **7.** 5.5, 1, 0

9. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 \le x \le 1,$

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_m(x)T_n(x)\,dx = 0,\ m \neq n$

13. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{1}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]\cos n\pi x + \dfrac{2}{n}(-1)^n\operatorname{sen} n\pi x\right\}$

15. a) $f(x) = 1 - e^{-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n e^{-1}}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x$

b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n\pi[1-(-1)^n e^{-1}]}{1+n^2\pi^2}\operatorname{sen} n\pi x$

19. $\lambda_n = \dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{36},\ n = 1, 2, 3, \ldots,$

$y_n = \cos\left(\dfrac{2n-1}{2}\pi\ln x\right)$

21. $f(x) = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{J_1(2\alpha_i)}{\alpha_i J_1^2(4\alpha_i)}J_0(\alpha_i x)$

EJERCICIOS 12.1 (PÁGINA 436)

1. Los casos posibles se pueden resumir en una forma $u = c_1e^{c_2(x+y)}$, donde c_1 y c_2 son constantes.

3. $u = c_1e^{y+c_2(x-y)}$

5. $u = c_1(xy)^{c_2}$

7. no separable

9. $u = e^{-t}(A_1e^{k\alpha^2t}\cosh\alpha x + B_1e^{k\alpha^2t}\operatorname{senh}\alpha x)$
$u = e^{-t}(A_2e^{-k\alpha^2t}\cos\alpha x + B_2e^{-k\alpha^2t}\operatorname{sen}\alpha x)$
$u = e^{-t}(A_3x + B_3)$

11. $u = (c_1\cosh\alpha x + c_2\operatorname{senh}\alpha x)(c_3\cosh\alpha at + c_4\operatorname{senh}\alpha at)$
$u = (c_5\cos\alpha x + c_6\operatorname{sen}\alpha x)(c_7\cos\alpha at + c_8\operatorname{sen}\alpha at)$
$u = (c_9x + c_{10})(c_{11}t + c_{12})$

13. $u = (c_1\cosh\alpha x + c_2\operatorname{senh}\alpha x)(c_3\cos\alpha y + c_4\operatorname{sen}\alpha y)$
$u = (c_5\cos\alpha x + c_6\operatorname{sen}\alpha x)(c_7\cosh\alpha y + c_8\operatorname{senh}\alpha y)$
$u = (c_9x + c_{10})(c_{11}y + c_{12})$

15. Para $\lambda = \alpha^2 > 0$ hay tres posibilidades:

i) Para $0 < \alpha^2 < 1$,

$$u = (c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x)(c_3 \cosh \sqrt{1-\alpha^2}y + c_4 \operatorname{senh} \sqrt{1-\alpha^2}y)$$

ii) Para $\alpha^2 > 1$,

$$u = (c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x)(c_3 \cos \sqrt{\alpha^2-1}y + c_4 \operatorname{sen} \sqrt{\alpha^2-1}y)$$

iii) Para $\alpha^2 = 1$,

$$u = (c_1 \cosh x + c_2 \operatorname{senh} x)(c_3 y + c_4)$$

Los resultados para el caso $\lambda = -\alpha^2$ son similares. Para $\lambda = 0$,

$$u = (c_1 x + c_2)(c_3 \cosh y + c_4 \operatorname{senh} y)$$

17. elíptica
19. parabólica
21. hiperbólica
23. parabólica
25. hiperbólica

EJERCICIOS 12.2 (PÁGINA 442)

1. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $0 < x < L, t > 0$

$u(0, t) = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, t > 0$

$u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < L$

3. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, 0 < x < L, t > 0$

$u(0, t) = 100$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = -hu(L, t), t > 0$

$u(x, 0) = f(x), 0 < x < L$

5. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, 0 < x < L, t > 0$

$u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, t > 0$

$u(x, 0) = x(L - x)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, 0 < x < L$

7. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, 0 < x < L, t > 0$

$u(0, t) = 0, u(L, t) = \operatorname{sen} \pi t, t > 0$

$u(x, 0) = f(x)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, 0 < x < L$

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 0 < x < 4, 0 < y < 2$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, u(4, y) = f(y), 0 < y < 2$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, u(x, 2) = 0, 0 < x < 4$

EJERCICIOS 12.3 (PÁGINA 445)

1. $$u(x, t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\cos\frac{n\pi}{2} + 1}{n}\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x$$

3. $$u(x, t) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

5. $$u(x, t) = e^{-ht}\left[\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\cos\frac{n\pi}{L}x\right]$$

EJERCICIOS 12.4 (PÁGINA 448)

1. $$u(x, t) = \frac{L^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\cos\frac{n\pi a}{L}t\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x$$

3. $$u(x, t) = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi a}{L}t\operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x - \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi a}{L}t\operatorname{sen}\frac{5\pi}{L}x + \frac{1}{7^2}\cos\frac{7\pi a}{L}t\operatorname{sen}\frac{7\pi}{L}x - \cdots\right)$$

5. $$u(x, t) = \frac{1}{a}\operatorname{sen} at \operatorname{sen} x$$

7. $$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\cos\frac{n\pi a}{L}t\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x$$

9. $$u(x, t) = e^{-\beta t}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left\{\cos q_n t + \frac{\beta}{q_n}\operatorname{sen} q_n t\right\}\operatorname{sen} nx,$$

donde $A_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$ y $q_n = \sqrt{n^2 - \beta^2}$

11. $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n^2\pi^2}{L^2}at + B_n\operatorname{sen}\frac{n^2\pi^2}{L^2}at\right)x\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x,$$

donde $$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$B_n = \frac{2L}{n^2\pi^2 a}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

15. $u(x, t) = \operatorname{sen} x \cos 2at + t$

17. $u(x, t) = \dfrac{1}{2a}\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2at$

EJERCICIOS 12.5 (PÁGINA 454)

1. $u(x, y) = \dfrac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\,dx\right)$
$\times \operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}y\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x$

3. $u(x, y) = \dfrac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\,dx\right)$
$\times \operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}(b-y)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x$

5. $u(x, y) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n^2\operatorname{senh}n\pi}\operatorname{senh}n\pi x\cos n\pi y$

7. $u(x, y) = \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{[1-(-1)^n]}{n}$
$\times \dfrac{n\cosh nx + \operatorname{senh}nx}{n\cosh n\pi + \operatorname{senh}n\pi}\operatorname{sen}ny$

9. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh n\pi y + B_n\operatorname{senh}n\pi y)\operatorname{sen}n\pi x,$

donde $A_n = 200\dfrac{[1-(-1)^n]}{n\pi}$

$B_n = 200\dfrac{[1-(-1)^n]}{n\pi}\dfrac{[2-\cosh n\pi]}{\operatorname{senh}n\pi}$

11. $u(x, y) = \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}f(x)\operatorname{sen}nx\,dx\right)e^{-ny}\operatorname{sen}nx$

13. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cosh\frac{n\pi}{a}y + B_n\operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}y\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x,$

donde $A_n = \dfrac{2}{a}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\,dx$

$B_n = \dfrac{1}{\operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}b}\left(\dfrac{2}{a}\int_0^a g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\,dx - A_n\cosh\frac{n\pi}{a}b\right)$

15. $u = u_1 + u_2$, donde

$u_1(x, y) = \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n\operatorname{senh}n\pi}\operatorname{senh}ny\operatorname{sen}nx$

$u_2(x, y) = \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{[1-(-1)^n]}{n}$
$\times \dfrac{\operatorname{senh}nx + \operatorname{senh}n(\pi - x)}{\operatorname{senh}n\pi}\operatorname{sen}ny$

EJERCICIOS 12.6 (PÁGINA 459)

1. $u(x, t) = 100 + \dfrac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n - 1}{n}e^{-kn^2\pi^2 t}\operatorname{sen}n\pi x$

3. $u(x, t) = u_0 - \dfrac{r}{2k}x(x-1) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{u_0}{n\pi} + \dfrac{r}{kn^3\pi^3}\right]$
$\times [(-1)^n - 1]e^{-kn^2\pi^2 t}\operatorname{sen}n\pi x$

5. $u(x, t) = \psi(x) + \sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-kn^2\pi^2 t}\operatorname{sen}n\pi x,$

donde $\psi(x) = \dfrac{A}{k\beta^2}[-e^{-\beta x} + (e^{-\beta} - 1)x + 1]$

y $A_n = 2\int_0^1 [f(x) - \psi(x)]\operatorname{sen}n\pi x\,dx$

7. $\psi(x) = u_0\left(1 - \dfrac{\operatorname{senh}\sqrt{h/k}\,x}{\operatorname{senh}\sqrt{h/k}}\right)$

9. $u(x, t) = \dfrac{A}{6a^2}(x - x^3)$
$+ \dfrac{2A}{a^2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}\cos n\pi at\operatorname{sen}n\pi x$

11. $u(x, y) = (u_0 - u_1)y + u_1$
$+ \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_0(-1)^n - u_1}{n}e^{-n\pi x}\operatorname{sen}n\pi y$

13. $u(x, t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n^2-3)}e^{-3t}\operatorname{sen}nx$
$+ 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n^2-3)}e^{-n^2 t}\operatorname{sen}nx$

15. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n\pi}\left[-\dfrac{1}{n^2\pi^2} + (-1)^n\dfrac{n^2\pi^2\cos t - \operatorname{sen}t}{n^4\pi^4 + 1}\right]\operatorname{sen}n\pi x$
$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{4 - 2(-1)^n}{n^3\pi^3}\right.$
$\left. - (-1)^n\dfrac{2n\pi}{n^4\pi^4 + 1}\right]e^{-n^2\pi^2 t}\operatorname{sen}n\pi x$

EJERCICIOS 12.7 (PÁGINA 465)

1. $u(x, t) = 2h\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha_n}{\alpha_n(h + \operatorname{sen}^2\alpha_n)}e^{-k\alpha_n^2 t}\cos\alpha_n x,$ donde las α_n son las raíces positivas consecutivas de $\cot\alpha = \alpha/h$

3. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\operatorname{senh}\alpha_n y\operatorname{sen}\alpha_n x,$ donde

$A_n = \dfrac{2h}{\operatorname{senh}\alpha_n b(ah + \cos^2\alpha_n a)}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\alpha_n x\,dx$

y las α_n son las raíces positivas consecutivas de $\tan\alpha a = -\alpha/h$

5. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-k(2n-1)^2\pi^2 t/4L^2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n-1}{2L}\right)\pi x,$ donde

$A_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n-1}{2L}\right)\pi x\,dx$

7. $u(x, y) = \dfrac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\cosh\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi}$
$\times \cosh\left(\dfrac{2n-1}{2}\right)\pi x\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n-1}{2}\right)\pi y$

9. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4\operatorname{sen}\alpha_n}{\alpha_n^2(k\alpha_n^2 - 2)(1 + \cos^2\alpha_n)}$
$\times \left(e^{-2t} - e^{-k\alpha_n^2 t}\right)\operatorname{sen}\alpha_n x$

EJERCICIOS 12.8 (PÁGINA 469)

1. $u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-k(m^2+n^2)t} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny,$

donde $A_{mn} = \dfrac{4u_0}{mn\pi^2}[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n]$

3. $u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny \cos a\sqrt{m^2 + n^2}\, t,$

donde $A_{mn} = \dfrac{16}{m^3 n^3 \pi^2}[(-1)^m - 1][(-1)^n - 1]$

5. $u(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{senh} \omega_{mn} z \operatorname{sen}\dfrac{m\pi}{a} x \operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{b} y,$

donde $\omega_{mn} = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab \operatorname{senh}(c\omega_{mn})}\int_0^b\int_0^a f(x, y) \times \operatorname{sen}\frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen}\frac{n\pi}{b} y \, dx\, dy$$

REPASO DEL CAPÍTULO 12 (PÁGINA 469)

1. $u = c_1 e^{(c_2 x + y/c_2)}$

3. $\psi(x) = u_0 + \dfrac{(u_1 - u_0)}{1 + \pi} x$

5. $u(x, t) = \dfrac{2h}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}}{n^2} \operatorname{sen} n\pi a t \operatorname{sen} n\pi x$

7. $u(x, y) = \dfrac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - (-1)^n}{n \operatorname{senh} n\pi} \operatorname{senh} nx \operatorname{sen} ny$

9. $u(x, y) = \dfrac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - (-1)^n}{n} e^{-nx} \operatorname{sen} ny$

11. $u(x, t) = e^{-t} \operatorname{sen} x$

13. $u(x, t) = e^{-(x+t)}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\sqrt{n^2 + 1}\cos\sqrt{n^2 + 1}\,t + \operatorname{sen}\sqrt{n^2 + 1}\,t\right] \operatorname{sen} nx$

EJERCICIOS 13.1 (PÁGINA 475)

1. $u(r, \theta) = \dfrac{u_0}{2} + \dfrac{u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - (-1)^n}{n} r^n \operatorname{sen} n\theta$

3. $u(r, \theta) = \dfrac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{r^n}{n^2}\cos n\theta$

5. $u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta),$

donde $A_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$

$A_n = \dfrac{c^n}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta$

$B_n = \dfrac{c^n}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta\, d\theta$

7. $u(r, \theta) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n}\left(\dfrac{r}{c}\right)^{2n}\cos 2n\theta$

9. $u(r, \theta) = A_0 \ln\left(\dfrac{r}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\dfrac{b}{r}\right)^n - \left(\dfrac{r}{b}\right)^n\right] \times [A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta],$

donde $A_0 \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$

$\left[\left(\dfrac{b}{a}\right)^n - \left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right]A_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta$

$\left[\left(\dfrac{b}{a}\right)^n - \left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right]B_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta\, d\theta$

11. $u(r, \theta) = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - (-1)^n}{n^3}\dfrac{r^{2n} - b^{2n}}{a^{2n} - b^{2n}}\left(\dfrac{a}{r}\right)^n \operatorname{sen} n\theta$

13. $u(r, \theta) = \dfrac{u_0}{2} + \dfrac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n}\left(\dfrac{r}{2}\right)^n\cos n\theta$

EJERCICIOS 13.2 (PÁGINA 481)

1. $u(r, t) = \dfrac{2}{ac}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha_n a t}{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n c)} J_0(\alpha_n r)$

3. $u(r, z) = u_0\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{senh}\alpha_n(4 - z)}{\alpha_n \operatorname{senh} 4\alpha_n J_1(2\alpha_n)} J_0(\alpha_n r)$

5. $u(r, z) = 50\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cosh(\alpha_n z)}{\alpha_n \cosh(4\alpha_n) J_1(2\alpha_n)} J_0(\alpha_n r)$

7. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) e^{-k\alpha_n^2 t},$

donde $A_n = \dfrac{2}{c^2 J_1^2(\alpha_n c)}\displaystyle\int_0^c r J_0(\alpha_n r) f(r)\, dr$

9. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) e^{-k\alpha_n^2 t},$

donde $A_n = \dfrac{2\alpha_n^2}{(\alpha_n^2 + h^2) J_0^2(\alpha_n)}\displaystyle\int_0^1 r J_0(\alpha_n r) f(r)\, dr$

11. $u(r, t) = 100 + 50\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{J_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n r)}{\alpha_n J_1^2(2\alpha_n)} e^{-\alpha_n^2 t}$

13. b) $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n\sqrt{g}\,t) J_0(2\alpha_n\sqrt{x}),$

donde $A_n = \dfrac{2}{L J_1^2(2\alpha_n\sqrt{L})}\displaystyle\int_0^{\sqrt{L}} v J_0(2\alpha_n v) f(v^2)\, dv$

EJERCICIOS 13.3 (PÁGINA 485)

1. $u(r, \theta) = 50\left[\dfrac{1}{2}P_0(\cos\theta) + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{r}{c}\right)P_1(\cos\theta) - \dfrac{7}{16}\left(\dfrac{r}{c}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \dfrac{11}{32}\left(\dfrac{r}{c}\right)^5 P_5(\cos\theta) + \cdots\right]$

3. $u(r, \theta) = \frac{r}{c}\cos\theta$

5. $u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{b^{2n+1}\, r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$, donde

$$\frac{b^{2n+1} - a^{2n+1}}{b^{2n+1}\, a^{n+1}} A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta\, d\theta$$

7. $u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^{2n} P_{2n}(\cos\theta)$, donde

$$A_{2n} = \frac{4n+1}{c^{2n}}\int_0^{\pi/2} f(\theta) P_{2n}(\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta\, d\theta$$

9. $u(r, t) = 100 + \frac{200}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 t}\,\text{sen}\, n\pi r$

11. $u(r, t) = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi a}{c}t + B_n\,\text{sen}\frac{n\pi a}{c}t\right)\text{sen}\frac{n\pi}{c}r,$

donde $A_n = \frac{2}{c}\int_0^c r f(r)\,\text{sen}\frac{n\pi}{c}r\, dr,$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^c r g(r)\,\text{sen}\frac{n\pi}{c}r\, dr$$

REPASO DEL CAPÍTULO 13 (PÁGINA 486)

1. $u(r, \theta) = \frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\left(\frac{r}{c}\right)^n \text{sen}\, n\theta$

3. $u(r, \theta) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3} r^n\,\text{sen}\, n\theta$

5. $u(r, \theta) = \frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{4n} + r^{-4n}}{2^{4n} + 2^{-4n}}\frac{1-(-1)^n}{n}\,\text{sen}\, 4n\theta$

7. $u(r, t) = 2e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} J_0(\alpha_n r)\, e^{-\alpha_n^2 t}$

9. $u(r, z) = 50 - 50\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh(\alpha_n z)}{\alpha_n \cosh(4\alpha_n)\, J_1(2\alpha_n)} J_0(\alpha_n r)$

11. $u(r, \theta) = 100\left[\frac{3}{2} r P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8} r^3 P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16} r^5 P_5(\cos\theta) + \cdots\right]$

EJERCICIOS 14.1 (PÁGINA 490)

1. a) Sea $\tau = u^2$ en la integral $\text{erf}(\sqrt{t})$.

7. $y(t) = e^{\pi t}\,\text{erfc}(\sqrt{\pi t})$

9. Utilice la propiedad $\int_0^b - \int_0^a = \int_0^b + \int_a^0$

EJERCICIOS 14.2 (PÁGINA 495)

1. $u(x, t) = A\cos\frac{a\pi t}{L}\,\text{sen}\frac{\pi x}{L}$

3. $u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right)\mathcal{U}\left(t - \frac{x}{a}\right)$

5. $u(x, t) = \left[\frac{1}{2}g\left(t - \frac{x}{a}\right)^2 + A\,\text{sen}\,\omega\left(t - \frac{x}{a}\right)\right] \times \mathcal{U}\left(t - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}gt^2$

7. $u(x, t) = a\frac{F_0}{E}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\left(t - \frac{2nL + L - x}{a}\right) \times \mathcal{U}\left(t - \frac{2nL + L - x}{a}\right) - \left(t - \frac{2nL + L + x}{a}\right) \times \mathcal{U}\left(t - \frac{2nL + L + x}{a}\right)\right\}$

9. $u(x, t) = 2(t - x)\,\text{senh}\,(t - x)\mathcal{U}(t - x) + xe^{-x}\cosh t - e^{-x} t\,\text{senh}\, t$

11. $u(x, t) = u_1 + (u_0 - u_1)\,\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$

13. $u(x, t) = u_0\left[1 - \left\{\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - e^{x+t}\,\text{erfc}\left(\sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right\}\right]$

15. $u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f(t-\tau)}{\tau^{3/2}} e^{-x^2/4\tau}\, d\tau$

17. $u(x, t) = 60 + 40\,\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-2}}\right)\mathcal{U}(t - 2)$

19. $u(x, t) = 100\left[-e^{1-x+t}\,\text{erfc}\left(\sqrt{t} + \frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right) + \text{erfc}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right)\right]$

21. $u(x, t) = u_0 + u_0 e^{-(\pi^2/L^2)t}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right)$

23. $u(x, t) = u_0 - u_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\text{erfc}\left(\frac{2n+1-x}{2\sqrt{kt}}\right) + \text{erfc}\left(\frac{2n+1+x}{2\sqrt{kt}}\right)\right]$

25. $u(x, t) = u_0 e^{-Gt/C}\,\text{erf}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right)$

EJERCICIOS 15.2 (PÁGINA 521)

Las tablas de esta sección son una selección del número total de aproximaciones.

1.

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.100	0.3728	0.6288	0.6800	0.5904	0.3840	0.2176	0.0768
0.200	0.2248	0.3942	0.4708	0.4562	0.3699	0.2517	0.1239
0.300	0.1530	0.2752	0.3448	0.3545	0.3101	0.2262	0.1183
0.400	0.1115	0.2034	0.2607	0.2757	0.2488	0.1865	0.0996
0.500	0.0841	0.1545	0.2002	0.2144	0.1961	0.1487	0.0800
0.600	0.0645	0.1189	0.1548	0.1668	0.1534	0.1169	0.0631
0.700	0.0499	0.0921	0.1201	0.1297	0.1196	0.0914	0.0494
0.800	0.0387	0.0715	0.0933	0.1009	0.0931	0.0712	0.0385
0.900	0.0301	0.0555	0.0725	0.0785	0.0725	0.0554	0.0300
1.000	0.0234	0.0432	0.0564	0.0610	0.0564	0.0431	0.0233

3.

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.100	0.4015	0.6577	0.7084	0.5837	0.3753	0.1871	0.0684
0.200	0.2430	0.4198	0.4921	0.4617	0.3622	0.2362	0.1132
0.300	0.1643	0.2924	0.3604	0.3626	0.3097	0.2208	0.1136
0.400	0.1187	0.2150	0.2725	0.2843	0.2528	0.1871	0.0989
0.500	0.0891	0.1630	0.2097	0.2228	0.2020	0.1521	0.0814
0.600	0.0683	0.1256	0.1628	0.1746	0.1598	0.1214	0.0653
0.700	0.0530	0.0976	0.1270	0.1369	0.1259	0.0959	0.0518
0.800	0.0413	0.0762	0.0993	0.1073	0.0989	0.0755	0.0408
0.900	0.0323	0.0596	0.0778	0.0841	0.0776	0.0593	0.0321
1.000	0.0253	0.0466	0.0609	0.0659	0.0608	0.0465	0.0252

Los errores absolutos son aproximadamente 2.2×10^{-2}, 3.7×10^{-2}, 1.3×10^{-2}.

5.

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	0.3972	0.6551	0.7043	0.5883	0.3723	0.1955	0.0653
0.20	0.2409	0.4171	0.4901	0.4620	0.3636	0.2385	0.1145
0.30	0.1631	0.2908	0.3592	0.3624	0.3105	0.2220	0.1145
0.40	0.1181	0.2141	0.2718	0.2840	0.2530	0.1876	0.0993
0.50	0.0888	0.1625	0.2092	0.2226	0.2020	0.1523	0.0816
0.60	0.0681	0.1253	0.1625	0.1744	0.1597	0.1214	0.0654
0.70	0.0528	0.0974	0.1268	0.1366	0.1257	0.0959	0.0518
0.80	0.0412	0.0760	0.0991	0.1071	0.0987	0.0754	0.0408
0.90	0.0322	0.0594	0.0776	0.0839	0.0774	0.0592	0.0320
1.00	0.0252	0.0465	0.0608	0.0657	0.0607	0.0464	0.0251

Los errores absolutos son aproximadamente 1.8×10^{-2}, 3.7×10^{-2}, 1.3×10^{-2}.

7. a)

Tiempo	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
2.00	27.6450	29.9037	29.9970	29.9999	30.0000	29.9999	29.9970	29.9037	27.6450
4.00	25.6452	29.6517	29.9805	29.9991	29.9999	29.9991	29.9805	29.6517	25.6452
6.00	23.9347	29.2922	29.9421	29.9963	29.9996	29.9963	29.9421	29.2922	23.9347
8.00	22.4612	28.8606	29.8782	29.9898	29.9986	29.9898	29.8782	28.8606	22.4612
10.00	21.1829	28.3831	29.7878	29.9782	29.9964	29.9782	29.7878	28.3831	21.1829

b)

Tiempo	$x = 5.00$	$x = 10.00$	$x = 15.00$	$x = 20.00$	$x = 25.00$	$x = 30.00$	$x = 35.00$	$x = 40.00$	$x = 45.00$
0.00	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
2.00	29.5964	29.9973	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	29.9973	29.5964
4.00	29.2036	29.9893	29.9999	30.0000	30.0000	30.0000	29.9999	29.9893	29.2036
6.00	28.8212	29.9762	29.9997	30.0000	30.0000	30.0000	29.9997	29.9762	28.8213
8.00	28.4490	29.9585	29.9992	30.0000	30.0000	30.0000	29.9993	29.9585	28.4490
10.00	28.0864	29.9363	29.9986	30.0000	30.0000	30.0000	29.9986	29.9363	28.0864

c)

Tiempo	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	18.0000	32.0000	42.0000	48.0000	50.0000	48.0000	42.0000	32.0000	18.0000
2.00	15.3312	28.5348	38.3465	44.3067	46.3001	44.3067	38.3465	28.5348	15.3312
4.00	13.6371	25.6867	34.9416	40.6988	42.6453	40.6988	34.9416	25.6867	13.6371
6.00	12.3012	23.2863	31.8624	37.2794	39.1273	37.2794	31.8624	23.2863	12.3012
8.00	11.1659	21.1877	29.0757	34.0984	35.8202	34.0984	29.0757	21.1877	11.1659
10.00	10.1665	19.3143	26.5439	31.1662	32.7549	31.1662	26.5439	19.3143	10.1665

d)

Tiempo	$x = 10.00$	$x = 20.00$	$x = 30.00$	$x = 40.00$	$x = 50.00$	$x = 60.00$	$x = 70.00$	$x = 80.00$	$x = 90.00$
0.00	8.0000	16.0000	24.0000	32.0000	40.0000	32.0000	24.0000	16.0000	8.0000
2.00	8.0000	16.0000	23.9999	31.9918	39.4932	31.9918	23.9999	16.0000	8.0000
4.00	8.0000	16.0000	23.9993	31.9686	39.0175	31.9686	23.9993	16.0000	8.0000
6.00	8.0000	15.9999	23.9978	31.9323	38.5701	31.9323	23.9978	15.9999	8.0000
8.00	8.0000	15.9998	23.9950	31.8844	38.1483	31.8844	23.9950	15.9998	8.0000
10.00	8.0000	15.9996	23.9908	31.8265	37.7498	31.8265	23.9908	15.9996	8.0000

9. a)

Tiempo	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
2.00	27.6450	29.9037	29.9970	29.9999	30.0000	30.0000	29.9990	29.9679	29.2150
4.00	25.6452	29.6517	29.9805	29.9991	30.0000	29.9997	29.9935	29.8839	28.5484
6.00	23.9347	29.2922	29.9421	29.9963	29.9997	29.9988	29.9807	29.7641	27.9782
8.00	22.4612	28.8606	29.8782	29.9899	29.9991	29.9966	29.9594	29.6202	27.4870
10.00	21.1829	28.3831	29.7878	29.9783	29.9976	29.9927	29.9293	29.4610	27.0610

b)

Tiempo	$x = 5.00$	$x = 10.00$	$x = 15.00$	$x = 20.00$	$x = 25.00$	$x = 30.00$	$x = 35.00$	$x = 40.00$	$x = 45.00$
0.00	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
2.00	29.5964	29.9973	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	29.9991	29.8655
4.00	29.2036	29.9893	29.9999	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	29.9964	29.7345
6.00	28.8212	29.9762	29.9997	30.0000	30.0000	30.0000	29.9999	29.9921	29.6071
8.00	28.4490	29.9585	29.9992	30.0000	30.0000	30.0000	29.9997	29.9862	29.4830
10.00	28.0864	29.9363	29.9986	30.0000	30.0000	30.0000	29.9995	29.9788	29.3621

c)

Tiempo	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	18.0000	32.0000	42.0000	48.0000	50.0000	48.0000	42.0000	32.0000	18.0000
2.00	15.3312	28.5350	38.3477	44.3130	46.3327	44.4671	39.0872	31.5755	24.6930
4.00	13.6381	25.6913	34.9606	40.7728	42.9127	41.5716	37.4340	31.7086	25.6986
6.00	12.3088	23.3146	31.9546	37.5566	39.8880	39.1565	35.9745	31.2134	25.7128
8.00	11.1946	21.2785	29.3217	34.7092	37.2109	36.9834	34.5032	30.4279	25.4167
10.00	10.2377	19.5150	27.0178	32.1929	34.8117	34.9710	33.0338	29.5224	25.0019

d)

Tiempo	$x = 10.00$	$x = 20.00$	$x = 30.00$	$x = 40.00$	$x = 50.00$	$x = 60.00$	$x = 70.00$	$x = 80.00$	$x = 90.00$
0.00	8.0000	16.0000	24.0000	32.0000	40.0000	32.0000	24.0000	16.0000	8.0000
2.00	8.0000	16.0000	23.9999	31.9918	39.4932	31.9918	24.0000	16.0102	8.6333
4.00	8.0000	16.0000	23.9993	31.9686	39.0175	31.9687	24.0002	16.0391	9.2272
6.00	8.0000	15.9999	23.9978	31.9323	38.5701	31.9324	24.0005	16.0845	9.7846
8.00	8.0000	15.9998	23.9950	31.8844	38.1483	31.8846	24.0012	16.1441	10.3084
10.00	8.0000	15.9996	23.9908	31.8265	37.7499	31.8269	24.0023	16.2160	10.8012

11. a) $\psi(x) = \frac{1}{2}x + 20$

b)

Tiempo	$x = 4.00$	$x = 8.00$	$x = 12.00$	$x = 16.00$
0.00	50.0000	50.0000	50.0000	50.0000
10.00	32.7433	44.2679	45.4228	38.2971
30.00	26.9487	32.1409	34.0874	32.9644
50.00	24.1178	27.4348	29.4296	30.1207
70.00	22.8995	25.4560	27.4554	28.8998
90.00	22.3817	24.6176	26.6175	28.3817
110.00	22.1619	24.2620	26.2620	28.1619
130.00	22.0687	24.1112	26.1112	28.0687
150.00	22.0291	24.0472	26.0472	28.0291
170.00	22.0124	24.0200	26.0200	28.0124
190.00	22.0052	24.0085	26.0085	28.0052
210.00	22.0022	24.0036	26.0036	28.0022
230.00	22.0009	24.0015	26.0015	28.0009
250.00	22.0004	24.0007	26.0007	28.0004
270.00	22.0002	24.0003	26.0003	28.0002
290.00	22.0001	24.0001	26.0001	28.0001
310.00	22.0000	24.0001	26.0001	28.0000
330.00	22.0000	24.0000	26.0000	28.0000
350.00	22.0000	24.0000	26.0000	28.0000

EJERCICIOS 15.3 (PÁGINA 525)

Las tablas de esta sección son una selección del número total de aproximaciones.

1. a)

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$
0.00	0.1875	0.2500	0.1875
0.20	0.1491	0.2100	0.1491
0.40	0.0556	0.0938	0.0556
0.60	−0.0501	−0.0682	−0.0501
0.80	−0.1361	−0.2072	−0.1361
1.00	−0.1802	−0.2591	−0.1802

b)

Tiempo	$x = 0.4$	$x = 0.8$	$x = 1.2$	$x = 1.6$
0.00	0.0032	0.5273	0.5273	0.0032
0.20	0.0652	0.4638	0.4638	0.0652
0.40	0.2065	0.3035	0.3035	0.2065
0.60	0.3208	0.1190	0.1190	0.3208
0.80	0.3094	−0.0180	−0.0180	0.3094
1.00	0.1450	−0.0768	−0.0768	0.1450

c)

Tiempo	$x = 0.1$	$x = 0.2$	$x = 0.3$	$x = 0.4$	$x = 0.5$	$x = 0.6$	$x = 0.7$	$x = 0.8$	$x = 0.9$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
0.12	0.0000	0.0000	0.0082	0.1126	0.3411	0.1589	0.3792	0.3710	0.0462
0.24	0.0071	0.0657	0.2447	0.3159	0.1735	0.2463	−0.1266	−0.3056	−0.0625
0.36	0.1623	0.3197	0.2458	0.1657	0.0877	−0.2853	−0.2843	−0.2104	−0.2887
0.48	0.1965	0.1410	0.1149	−0.1216	−0.3593	−0.2381	−0.1977	−0.1715	0.0800
0.60	−0.2194	−0.2069	−0.3875	−0.3411	−0.1901	−0.1662	−0.0666	0.1140	−0.0446
0.72	−0.3003	−0.6865	−0.5097	−0.3230	−0.1585	0.0156	0.0893	−0.0874	0.0384
0.84	−0.2647	−0.1633	−0.3546	−0.3214	−0.1763	−0.0954	−0.1249	0.0665	−0.0386
0.96	0.3012	0.1081	0.1380	−0.0487	−0.2974	−0.3407	−0.1250	−0.1548	0.0092

3. a)

Tiempo	$x = 0.2$	$x = 0.4$	$x = 0.6$	$x = 0.8$
0.00	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878
0.10	0.5599	0.9059	0.9059	0.5599
0.20	0.4788	0.7748	0.7748	0.4788
0.30	0.3524	0.5701	0.5701	0.3524
0.40	0.1924	0.3113	0.3113	0.1924
0.50	0.0142	0.0230	0.0230	0.0142

b)

Tiempo	$x = 0.2$	$x = 0.4$	$x = 0.6$	$x = 0.8$
0.00	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878
0.05	0.5808	0.9397	0.9397	0.5808
0.10	0.5599	0.9060	0.9060	0.5599
0.15	0.5257	0.8507	0.8507	0.5257
0.20	0.4790	0.7750	0.7750	0.4790
0.25	0.4209	0.6810	0.6810	0.4209
0.30	0.3527	0.5706	0.5706	0.3527
0.35	0.2761	0.4467	0.4467	0.2761
0.40	0.1929	0.3122	0.3122	0.1929
0.45	0.1052	0.1701	0.1701	0.1052
0.50	0.0149	0.0241	0.0241	0.0149

5.

Tiempo	$x = 10$	$x = 20$	$x = 30$	$x = 40$	$x = 50$
0.00000	0.1000	0.2000	0.3000	0.2000	0.1000
0.60134	0.0984	0.1688	0.1406	0.1688	0.0984
1.20268	0.0226	−0.0121	0.0085	−0.0121	0.0226
1.80401	−0.1271	−0.1347	−0.1566	−0.1347	−0.1271
2.40535	−0.0920	−0.2292	−0.2571	−0.2292	−0.0920
3.00669	−0.0932	−0.1445	−0.2018	−0.1445	−0.0932
3.60803	−0.0284	−0.0205	0.0336	−0.0205	−0.0284
4.20936	0.1064	0.1555	0.1265	0.1555	0.1064
4.81070	0.1273	0.2060	0.2612	0.2060	0.1273
5.41204	0.0625	0.1689	0.2038	0.1689	0.0625
6.01338	0.0436	0.0086	−0.0080	0.0086	0.0436
6.61472	−0.0931	−0.1364	−0.1578	−0.1364	−0.0931
7.21605	−0.1436	−0.2173	−0.2240	−0.2173	−0.1436
7.81739	−0.0625	−0.1644	−0.2247	−0.1644	−0.0625
8.41873	−0.0287	−0.0192	−0.0085	−0.0192	−0.0287
9.02007	0.0654	0.1332	0.1755	0.1332	0.0654
9.62140	0.1540	0.2189	0.2089	0.2189	0.1540

Nota: El tiempo se expresa en milisegundos.

REPASO DEL CAPÍTULO 15 (PÁGINA 526)

1. $u_{11} = 0.8929, u_{21} = 3.5714, u_{31} = 13.3929$

3. a)

$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$
0.2000	0.4000	0.6000	0.8000
0.2000	0.4000	0.6000	0.5500
0.2000	0.4000	0.5375	0.4250
0.2000	0.3844	0.4750	0.3469
0.1961	0.3609	0.4203	0.2922
0.1883	0.3346	0.3734	0.2512

b)

$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$
0.2000	0.4000	0.6000	0.8000
0.2000	0.4000	0.6000	0.8000
0.2000	0.4000	0.6000	0.5500
0.2000	0.4000	0.5375	0.4250
0.2000	0.3844	0.4750	0.3469
0.1961	0.3609	0.4203	0.2922

c) Sí; la tabla en el inciso b) es la tabla del inciso a) corrida hacia abajo.

EJERCICIOS PARA EL APÉNDICE I (PÁGINA APE-2)

1. a) 24 **b)** 720 **c)** $\dfrac{4\sqrt{\pi}}{3}$ **d)** $-\dfrac{8\sqrt{\pi}}{15}$

3. 0.297

EJERCICIOS PARA EL APÉNDICE II (PÁGINA APE-18)

1. a) $\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 14 & -19 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 28 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$

3. a) $\begin{pmatrix} -11 & 6 \\ 17 & -22 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -32 & 27 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 19 & -18 \\ -30 & 31 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 3 & 22 \end{pmatrix}$

5. a) $\begin{pmatrix} 9 & 24 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -6 & -16 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$

7. a) 180 **b)** $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 8 & 16 & 20 \\ 10 & 20 & 25 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$

9. **a)** $\begin{pmatrix} 7 & 38 \\ 10 & 75 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 7 & 38 \\ 10 & 75 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} -14 \\ 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} -38 \\ -2 \end{pmatrix}$

15. singular

17. no singular; $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

19. no singular; $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

21. no singular; $\mathbf{A}^{-1} = -\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -13 & 5 & 7 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

23. $\mathbf{A}^{-1}(t) = \dfrac{1}{2e^{3t}}\begin{pmatrix} 3e^{4t} & -e^{4t} \\ -4e^{-t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}$

25. $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} -5e^{-t} \\ -2e^{-t} \\ 7e^{-t} \end{pmatrix}$

27. $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} - 12\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t}$

29. **(a)** $\begin{pmatrix} 4e^{4t} & -\pi \operatorname{sen} \pi t \\ 2 & 6t \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{8} - \frac{1}{4} & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{4t} - \frac{1}{4} & (1/\pi) \operatorname{sen} \pi t \\ t^2 & t^3 - t \end{pmatrix}$

31. $x = 3, y = 1, z = -5$

33. $x = 2 + 4t, y = -5 - t, z = t$

35. $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}, z = \frac{7}{2}$

37. $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 0$

41. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$

43. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

45. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

47. $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1, \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

49. $\lambda_1 = \lambda_2 = -4, \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

51. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -4,$

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 45 \\ 25 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

53. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2,$

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

55. $\lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i,$

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 - 3i \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ 5 \end{pmatrix}$

LISTA DE DERIVADAS

Reglas

1. Constante: $\frac{d}{dx}c = 0$

2. Múltiplo constante: $\frac{d}{dx}cf(x) = c\,f'(x)$

3. Suma: $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$

4. Producto: $\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

5. Cociente: $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

6. Cadena: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

7. Potencia: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

8. Potencia: $\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$

Funciones

Trigonométricas:

9. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$

10. $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$

11. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

12. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

13. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

14. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

Trigonométricas inversas:

15. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

17. $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$

18. $\frac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\frac{1}{1+x^2}$

19. $\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

20. $\frac{d}{dx}\csc^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Hiperbólicas:

21. $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$

22. $\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$

23. $\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$

24. $\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$

25. $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$

26. $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$

Hiperbólicas inversas:

27. $\frac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

28. $\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

29. $\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$

30. $\frac{d}{dx}\coth^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$

31. $\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

32. $\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$

Exponencial:

33. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

34. $\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b)$

Logarítmica:

35. $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$

36. $\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{x(\ln b)}$

BREVE TABLA DE INTEGRALES

1. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

2. $\int \dfrac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

3. $\int e^u\,du = e^u + C$

4. $\int a^u\,du = \dfrac{1}{\ln a}a^u + C$

5. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

6. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

7. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

8. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

9. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

10. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

11. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

12. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

13. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

14. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

15. $\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

16. $\int u \cos u\,du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

17. $\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

18. $\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

19. $\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$

20. $\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$

21. $\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\frac{1}{3}\left(2 + \operatorname{sen}^2 u\right)\cos u + C$

22. $\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}\left(2 + \cos^2 u\right)\operatorname{sen} u + C$

23. $\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

24. $\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

25. $\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

26. $\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

27. $\int \operatorname{sen} au \cos bu\,du = \dfrac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \dfrac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

28. $\int \cos au \cos bu\,du = \dfrac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \dfrac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

29. $\int e^{au} \operatorname{sen} bu\,du = \dfrac{e^{au}}{a^2+b^2}\left(a \operatorname{sen} bu - b\cos bu\right) + C$

30. $\int e^{au} \cos bu\,du = \dfrac{e^{au}}{a^2+b^2}\left(a\cos bu + b \operatorname{sen} bu\right) + C$

31. $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$

32. $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$

33. $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$

34. $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$

35. $\int \tanh u\,du = \ln(\cosh u) + C$

36. $\int \coth u\,du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

37. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

38. $\int u\ln u\,du = \frac{1}{2}u^2\ln u - \frac{1}{4}u^2 + C$

39. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

40. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\,du = \ln\left|u + \sqrt{a^2+u^2}\right| + C$

41. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \dfrac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

42. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{a^2+u^2}\right| + C$

43. $\int \dfrac{1}{a^2+u^2}\,du = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

44. $\int \dfrac{1}{a^2-u^2}\,du = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right| + C$

GUÍA DE CORRELACIÓN DE TOOLS

Herramientas de ED (DE Tools) es un conjunto de simulaciones que proporcionan una exploración interactiva y visual de los conceptos que se presentan en este libro. Visite academic.cengage.com/math/zill para encontrar más o para contactar con los representantes de ventas de su localidad para que les pregunte acerca de otras opciones para utilizar DE Tools con este libro.

HERRAMIENTAS DEL TEXTO

Capítulo 1

Intervalo de definición

Ilustra el concepto de intervalo de definición de una solución de una ecuación diferencial.

Capítulo 2

Campo direccional

Apoya la exploración visual de la relación entre campos direccionales y las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (EDO) de la forma $dy/dx = f(x, y)$.

Línea de fase

Le permite ver la línea de fase, las gráficas solución y la gráfica de la ecuación diferencial para algunas ecuaciones diferenciales de primer orden.

Método de Euler

Apoya la comparación visual y numérica del método de Euler y del método Runge-Kutta para aproximar soluciones de las EDO de primer orden de la forma $dy/dx = f(x, y)$.

Capítulo 3

Crecimiento y decaimiento

Exploración visual del crecimiento exponencial y decaimiento de las EDO de primer orden, $dx/dt = rx$, o su solución $x(t)$.

Mezclas

Le permiten variar la proporción de entrada-salida y la concentración de entrada, esta herramienta le permite ver cómo cambia la cantidad de sal cuando dos disoluciones son mezcladas en un gran tanque.

Circuitos *LR*

Exploración cualitativa del comportamiento de un modelo de un circuito en serie que contiene un inductor y un resistor cuando varían los parámetros.

Presa-Depredador

Ilustra las curvas solución para el modelo presa-depredador de Lotka-Volterra.

Capítulo 5

Masa/Resorte

Apoya la exploración gráfica de los efectos del cambio de parámetros en el movimiento del sistema masa/resorte: $mx'' + \beta x' + kx = F_0 \operatorname{sen}(\gamma t)$.

Capítulo 7

Péndulo lineal doble

Exploración visual de un péndulo doble.

Capítulo 8

Diagrama de fase lineal

Le permite generar diagramas de fase y curvas solución para sistemas $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ de dos ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes. Podrá ver cómo el diagrama de fase depende de los eigenvalores de la matriz A de coeficientes.

Capítulo 9

Métodos numéricos

Comparación visual y numérica del método de Euler, el método de Euler mejorado y el método de Runge-Kutta de aproximación de soluciones para sistemas de dos ecuaciones diferenciales.

PROYECTOS

Capítulo 1

Proyecto: Deception Pass

Apoya la exploración visual del efecto de la marea y la amplitud de canal en la velocidad del agua moviéndose a través del Deception Pass.

Capítulo 2

Proyecto: Logistic Harvest

Exploración del crecimiento logístico de la población con cualquier constante o recolección proporcional.

Capítulo 3

Proyecto: Swimming

Determine la relación entre la velocidad de un río y la velocidad de una persona nadando a través del río.

Capítulo 4

Proyecto: Bungee Jumping

Explore las fuerzas que actúan en un saltador de bungee cuando usted cambia el peso del saltador y la elasticidad de la cuerda del bungee.

Capítulo 5

Proyecto: Tacoma Bridge

Exploración del levantamiento y caída de la carpeta asfáltica de un puente.

Capítulo 6

Proyecto: Tamarisk

Exploración de la series solución para el crecimiento de un árbol tamarisco en un cañón desértico.

Capítulo 7

Proyecto: Newton's Law of Cooling

Use el modelo matemático de la ley de enfriamiento de Newton para determinar la rapidez con la que un cuerpo se calienta o se enfría para encontrar el tiempo que le toma al "Mayfair Diner Murder" ocupar su lugar y el tiempo en el que el cadáver fue llevado de la cocina al refrigerador.

Capítulo 8

Proyecto: Earthquake

Exploración visual de los desplazamientos de los pisos de tres edificios durante un terremoto.

Capítulo 9

Proyecto: Hammer

Exploración de un modelo de péndulo usando diferentes métodos numéricos, tiempo y tamaño de paso, y condiciones iniciales.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
1. 1	$\dfrac{1}{s}$
2. t	$\dfrac{1}{s^2}$
3. t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, n un entero positivo
4. $t^{-1/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$
5. $t^{1/2}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
6. t^{α}	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, $\alpha > -1$
7. $\operatorname{sen} kt$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$
8. $\cos kt$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$
9. $\operatorname{sen}^2 kt$	$\dfrac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
10. $\cos^2 kt$	$\dfrac{s^2+2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
11. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
12. $\operatorname{senh} kt$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$
13. $\cosh kt$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$
14. $\operatorname{senh}^2 kt$	$\dfrac{2k^2}{s(s^2-4k^2)}$
15. $\cosh^2 kt$	$\dfrac{s^2-2k^2}{s(s^2-4k^2)}$
16. te^{at}	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$
17. $t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, n un entero positivo
18. $e^{at} \operatorname{sen} kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$
19. $e^{at} \cos kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
20. $e^{at} \operatorname{senh} kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2-k^2}$
21. $e^{at} \cosh kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-k^2}$
22. $t \operatorname{sen} kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$
23. $t \cos kt$	$\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$
24. $\operatorname{sen} kt + kt \cos kt$	$\dfrac{2ks^2}{(s^2+k^2)^2}$
25. $\operatorname{sen} kt - kt \cos kt$	$\dfrac{2k^3}{(s^2+k^2)^2}$
26. $t \operatorname{senh} kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$
27. $t \cosh kt$	$\dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$
28. $\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$
29. $\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$
30. $1-\cos kt$	$\dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)}$
31. $kt - \operatorname{sen} kt$	$\dfrac{k^3}{s^2(s^2+k^2)}$
32. $\dfrac{a \operatorname{sen} bt - b \operatorname{sen} at}{ab(a^2-b^2)}$	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
33. $\dfrac{\cos bt - \cos at}{a^2-b^2}$	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
34. $\operatorname{sen} kt \operatorname{senh} kt$	$\dfrac{2k^2 s}{s^4+4k^4}$
35. $\operatorname{sen} kt \cosh kt$	$\dfrac{k(s^2+2k^2)}{s^4+4k^4}$
36. $\cos kt \sinh kt$	$\dfrac{k(s^2-2k^2)}{s^4+4k^4}$
37. $\cos kt \cosh kt$	$\dfrac{s^3}{s^4+4k^4}$
38. $J_0(kt)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+k^2}}$

	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
39.	$\dfrac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$\ln \dfrac{s-a}{s-b}$
40.	$\dfrac{2(1 - \cos kt)}{t}$	$\ln \dfrac{s^2 + k^2}{s^2}$
41.	$\dfrac{2(1 - \cosh kt)}{t}$	$\ln \dfrac{s^2 - k^2}{s^2}$
42.	$\dfrac{\operatorname{sen} at}{t}$	$\arctan\left(\dfrac{a}{s}\right)$
43.	$\dfrac{\operatorname{sen} at \cos bt}{t}$	$\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{a+b}{s} + \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{a-b}{s}$
44.	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$
45.	$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$
46.	$\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$
47.	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\, e^{-a^2/4t} - a \operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$
48.	$e^{ab}e^{b^2t}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + b)}$
49.	$-e^{ab}e^{b^2t}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{be^{-a\sqrt{s}}}{s(\sqrt{s} + b)}$
50.	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
51.	$\mathscr{U}(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
52.	$f(t-a)\mathscr{U}(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
53.	$g(t)\mathscr{U}(t-a)$	$e^{-as}\mathscr{L}\{g(t+a)\}$
54.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
55.	$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$
56.	$\displaystyle\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
57.	$\delta(t)$	1
58.	$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}